NOMBRES ET CALCUL

QUELQUES ELEMENTS DE MISE EN PERSPECTIVE ISSUS DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Renaud Chorlay[1]

Résumé : Nous présentons deux dossiers historiques susceptibles de nourrir la réflexion épistémologique et didactique. Le premier porte sur le calcul sur les grandeurs, et le lien qu'il entretient – ou pas – avec le calcul sur les nombres. Le second porte sur des contextes de calcul dans lesquels le lecteur du 21ème siècle peut reconnaître des calculs sur des nombres négatifs.

Introduction

Il ne saurait s'agir de présenter un survol visant à embrasser l'ensemble des moments et phénomènes qui, dans le développement historique des mathématiques, ont eu trait aux nombres et au calcul. Non seulement la place manquerait, mais la *totalité* des faits, moments et phénomènes n'est pas un objet donné, s'offrant passivement à l'étude ; en histoire comme en didactique, c'est l'étude problématisée qui détermine les contours de l'objet. S'ajoute, en histoire, la question de l'anachronisme, qui impose un scrupule dans la caractérisation selon des catégories contemporaines – se donnant souvent pour anhistoriques – de phénomènes et d'actions issues d'autres contextes.
Notre projet est ici fournir matière à penser, en présentant quelques documents et quelques épisodes choisis pour leur portée épistémologique. On s'y dépaysera, en se déprenant de quelques fausses évidences issues de son passé scolaire personnel (Artigue 1990), par la rencontre de théories, d'organisations mathématiques, de pratiques, de systèmes de notations et d'instruments différents de ceux qui nous sont familiers. Les fonctions d'un tel dépaysement ont été reconnues depuis longtemps, en particulier dans l'école française de didactique, par exemple pour les analyses *a priori*, le repérage de raisons d'êtres ou d'organisations praxéologiques. Ces documents sont aussi sans doute utiles en formation des enseignants, sans que l'impact ait fait l'objet de beaucoup d'études didactiques.
Du point de vue mathématique on peut organiser la diversité des nombres rencontrés dans l'enseignement primaire et secondaire selon le schéma suivant :

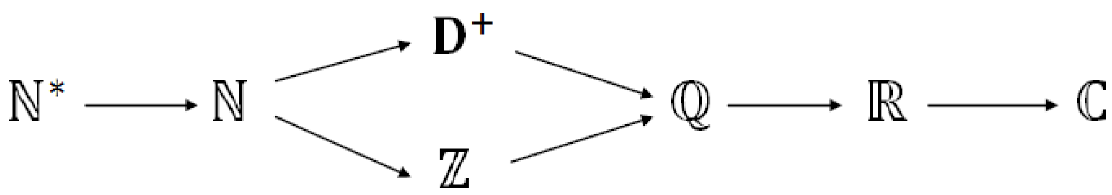


Figure 1 : Ensembles de nombres rencontrés en primaire et secondaire

[1] Renaud.chorlay@espe-paris.fr
Laboratoire de didactique André Revuz (EA 4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN, France
ESPE de l'académie de Paris
IREM de Paris

Les flèches peuvent être interprétées mathématiques comme des inclusions ensemblistes et des morphismes pour les structures algébriques ; le cas échéant, pour l'ordre. La lecture de gauche à droite correspond aussi globalement à la progression curriculaire, de la maternelle à la terminale scientifique (même si les programmes de la fin de l'école primaire recommandent d'introduire les décimaux à partir de la fréquentation de quelques écritures fractionnaires non nécessairement décimales). Cette description relève d'un point de vue savant et ne préjuge en rien des constructions de connaissances visées ou effectives chez les élèves, aussi bien sur chaque ensemble de nombres que sur les liens entre eux.
Chacune de ses extensions soulève la même liste de questions, non indépendantes et préalables à l'analyse proprement didactique :

- Qu'est-ce qui peut motiver l'introduction de ces nouveaux nombres ?
- Comment écrire ces nouveaux nombres ?
- Comment calculer avec ces nouveaux nombres ?
- Comment comparer ces nouveaux nombres ?
- Comment interpréter/représenter ces nouveaux nombres ?

Dans cet exposé, nous présenterons deux dossiers documentaires. Le premier dossier porte sur le calcul sur les grandeurs, et sur les liens qu'il a pu entretenir, à certains moments de l'histoire et dans différentes configurations épistémologiques, avec le calcul sur des nombres. Le second dossier porte sur des exemples d'usage – parfois justifié – de règles de calcul portant sur des expressions complexes dans lesquelles interviennent des nombres ou des quantités soustraites. On verra que ces règles ont été utilisées bien avant qu'une éventuelle notion de « nombre » négatif ne soit considérée comme légitime, voire considérée tout court.

Calculer sur les grandeurs

Le savoir savant formant l'arrière plan des curricula contemporains français sur « nombres et grandeurs » peut se résumer ainsi : le travail sur les grandeurs (en particulier les grandeurs géométriques que sont la longueur et l'aire) invite à dépasser le domaine des entiers. Ce dépassement donne l'occasion de rencontrer des codages de mesures qui seront progressivement à regarder comme des nombres, les rationnels positifs. Parmi eux, la considération des décimaux permet de prolonger au-delà des entiers les techniques opératoires connues pour les entiers tout en permettant d'approcher toute mesure d'aussi près que l'on veut. Ces deux vertus des décimaux étaient déjà mises en avant par Stévin dans *La Disme* (1634, 1ère édition 1585). La décimalisation du système métrologique sous la révolution française achève de rendre ces nombres utiles au quotidien. Cependant, les traditions savantes héritières de l'antiquité gréco-latine savent que les rationnels ne peuvent exprimer exactement tout rapport entre deux grandeurs du même genre ; ou – si une grandeur d'un genre donné est choisie comme unité – toute mesure. Au 19ème siècle, plusieurs constructions des nombres réels ont permis d'asseoir un domaine numérique pouvant à la fois accueillir toutes les mesures de grandeur et servir de fondement à la théorie des fonctions : développement décimaux infinis chez Meray et Weierstrass, classes d'équivalences de suites de Cauchy de rationnels chez Cantor, coupures de l'ensemble des rationnels chez Dedekind (Boniface 2002).
Nous voulons ici compléter cette image – juste – en considérant trois épisodes historiques. Premièrement, les liens entre nombres et grandeurs dans les *Eléments* d'Euclide ne passent pas par la mesure ; la théorie euclidienne des proportions entre grandeurs est une alternative à la mesure, et ne nécessite pas de nombres (si l'on omet l'apparition d'entiers, dérivant de ce que tout groupe abélien peut-être vu comme un **Z**-module) ; elle établit entre nombres

(entiers) et grandeurs des rapports *partiel*s, fondés sur la notion de proportion et un point de vue algorithmique. Nous verrons ensuite comment dans sa *Géométrie*, René Descartes propose de s'inspirer du calcul sur les nombres pour mettre au point un calcul portant directement sur les grandeurs, qui n'est ni notre « méthode des coordonnées », ni notre calcul vectoriel. Quoique très différente de la théorie euclidienne, la théorie cartésienne ne nécessite pas non plus de nombres. Enfin, des mathématiciens de la fin du 19ème siècle reviennent sur la théorie euclidienne et l'articulent explicitement avec la théorie de la mesure reposant sur les nombres réels. Nous regarderons l'exemple donné par le travail de Otto Hölder.

Calcul les grandeurs, calcul sur les nombres dans les **Eléments** *d'Euclide.*

Pour une présentation générale des *Eléments* d'Euclide, nous renvoyons le lecteur au dossier préparé par Bernard Vitrac sur les *Géomètres de la Grèce antique*[2]. Les *Eléments*, rédigés vers -300, héritent d'une tradition de recherche remontant à plus d'un siècle, qui articule mathématiques « pures » et étude des phénomènes astronomiques. Comme le titre l'indique, ils présentent les notions « élémentaires » utiles à l'étude de problèmes plus avancés (coniques, géométrie sphérique). « Elémentaire » est à mettre entre guillemets, puisque l'ouvrage va jusqu'à l'étude des solides platoniciens, et à des preuves par exhaustion (par exemple pour établir que l'aire du disque est proportionnelle à celle du carré construit sur son rayon). L'ouvrage servira non seulement de recueil de résultats, mais aussi de modèle (à suivre ou à critiquer) pour sa recherche de rigueur et de systématicité. Toutes les propositions – qu'elles soient des théorèmes (énonçant un fait, une propriété mathématique) ou des problèmes (où un objet d'un type donné – figure ou nombre entier – est à produire à partir d'éléments donnés) – sont démontrées ; les démonstrations n'utilisent que des théorèmes démontrés avant, des postulats, des notions communes, ou les définitions.
Le mot « nombre » (*arithmos*) est introduit au livre 7, le premier des trois livres consacrés à l'arithmétique savante (par opposition à l'arithmétique pratique, celle des techniques opératoires et des résolutions de problèmes du quotidien, non traitée par Euclide). Le nombre y est défini comme la multitude d'une unité insécable, la monade. Il s'agit donc de ce qu'on pourrait représenter par une collection de petits bâtons tous identiques, autrement dit de **N*** (même si, au sens strict, 1 est la monade et non un « arithme »).
La notion de grandeur (*megethos*) est introduite au livre V, sans être définie ni exemplifiée. Dans des livres ultérieurs, on rencontrera les longueurs et le aires comme exemples de grandeur. D'autres auteurs traiteront dans ce cadre les volumes, les durées, les hauteurs de note, les angles (cette dernière grandeur posant des problèmes spécifiques). Pendant des siècles on se contentera de caractérisations assez vagues de la notion de grandeur, comme ce qui est susceptible de croître ou diminuer par degrés insensibles. Chez Euclide, la notion de rapport (*logos*) entre deux grandeurs est ensuite définie de manière verbale assez vague : c'est le rapport, selon la taille, entre deux grandeurs du même genre. La notion de grandeur de même genre est par contre mieux définie : deux grandeurs sont du même genre si elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre. On verra plus loin comment ces « définitions » ont été relues à la fin du 19ème siècle. Pour l'heure, il suffit de voir que cette définition de « genre » de grandeur suppose une structure d'ordre (archimédienne) et une structure algébrique. Il s'agit en fait d'une structure additive, la « multiplication » n'étant que la combinaison/addition répétée (il ne s'agit pas d'une multiplication *entre* grandeurs, fussent-elles du même genre). Les segments sont le paradigme de la grandeur : la mise bout à bout tient lieu d'addition ; la comparaison va de soi (et l'existence du « compas de report » est

[2] http://culturemath.ens.fr/content/les-g%C3%A9om%C3%A8tres-de-la-gr%C3%A8ce-antique-0
Consulté le 18/1/2019.

démontrée en I.2[3]). Les aires de polygones sont des grandeurs puisqu'il a été établi en II.14 que, pour tout polygone, il est possible de construire à la règle et au compas un carré de même aire. Or la comparaison d'aires de carrés est triviale, et les carrés forment un domaine où l'addition est bien définie (c'est notre « théorème de Pythagore », démontré en I.47).
Les grandeurs font, au livre V des *Eléments*, l'objet d'une théorie générale (englobant toutes les grandeurs possibles) et indépendante de la notion de nombre. C'est la notion d'*égalité de rapport* entre grandeurs du même genre qui fait l'objet d'une définition précise et opératoire. Introduisons-là par un exemple, en prenant deux segments A et B. On peut, pour chacun des deux, considérer une infinité de segments « multiples » : d'une part A, 2A, 3A, …, d'autre part B, 2B, 3B … Toutes ces grandeurs étant de même genre, elles sont comparables. On peut donc considérer l'ordre dans l'ensemble formé des deux séries, par exemple :

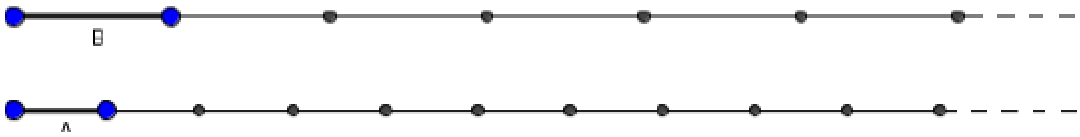


Figure 2 : Multiples de deux segments A et B

Dans cet exemple on a A < B < 2A < 3A < 2B < 4A < 5A < 3B < 6A < 4B < 7A < 8A < 5B < 9A < 10A < 6B … La série peut contenir des cas d'égalité. Dans l'exemple, nous avions en fait B = 1,3 A, on a donc 10B = 13A, mais aussi 20B = 26 A etc. Euclide définit implicitement le rapport entre A et B comme ce qui est caractérisé par l'ordre de la série des multiples de A et de B. Il définit explicitement l'égalité des rapports en disant que le rapport entre A et B est le même que celui entre C et D lorsque l'ordre dans la série des multiples de A et B est le même que celui dans la série des multiples de C et D, ce qu'il exprime de manière correcte mais obscure par la célèbre définition 5 du livre V :

> *Des grandeurs sont dites* être dans le même rapport*, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun et pris de manière correspondante.* (Euclide 1990-2001, vol.2 p. 41)

Autrement dit, si quels que soient les entiers naturels non nuls *n* et *m*, l'ordre entre *n*A et *m*B est le même qu'entre *n*C et *m*D. A partir de la Renaissance on notera souvent A : B :: C : D le fait que le rapport de A à B est le même que celui de C à D (lire « A est à B comme C est à D »).
Cette définition ne recouvre pas celle de nombre rationnel. Elle en partage certains traits, en particulier la propriété d'invariance fondamentale : le rapport entre deux grandeurs est le même qu'entre deux mêmes multiples – ou deux mêmes parties aliquotes – de ces grandeurs. Autrement dit, quel que soit l'entier naturel non nul *n*, on a A : B :: *n*A : *n*B et A : B :: $\frac{1}{n}$A : $\frac{1}{n}$B. Cette théorie dépasse cependant celle des rationnels (positifs stricts) en ceci que le rapport entre, par exemple, le côté et la diagonale du carré est bien défini. Elle permet donc de traiter la théorie des rapports entre grandeurs géométriques sans rencontrer de problèmes sur les domaines de nombres associés, puisqu'aucun nombre n'intervient dans les définitions. Ainsi Euclide peut-il au livre VI utiliser en géométrie plane la notion de grandeur définie et étudiée au livre V. Il démontre en particulier ce que nous appelons le théorème de Thalès et sa réciproque (proposition VI.2) ainsi que le théorème fondamental sur la similitude des polygones : deux triangles équiangles sont semblables (i.e. les côtés correspondants sont dans

[3] Lire : Livre I proposition n°2.

le même rapport, proposition VI.4). Cette théorie interdit cependant certaines manipulations qui sont toujours possibles sur les rationnels, pour des raisons d'homogénéité : le rapport n'est défini qu'entre grandeurs du même genre ; autrement dit, il est « sans dimension » ; ou encore, à partir de deux grandeurs différentes on ne forme pas une nouvelle grandeur « quotient ». Ainsi, dans les *Eléments*, les propriétés d'échange (du type A : B :: C : D ⇒ A : C :: B : D) sont-elles démontrées sous la condition que les quatre grandeurs soient du même genre (sans quoi les rapports ne sont pas définis). En dépit de ces contraintes d'homogénéité (ou grâce à elles, puisqu'elles imposent aux rapports d'être sans dimension), la théorie est assez souple pour permettre de comparer des rapports entre des couples de grandeurs de genres différents. Par exemple, la proposition VI.1 établit que si des triangles ont la même hauteur, alors le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases. Au livre V, une théorie additive[4] et multiplicative des rapports est établie sous les mêmes restrictions d'homogénéité.

La notion de nombre – entendre « entier naturel non nul » – fait l'objet d'une étude autonome aux livres VII, VIII et IX. L'addition est définie implicitement, et la multiplication est définie par addition itérée. La notion de rapport entre deux nombres est définie sans lien avec les grandeurs. Après les définitions, les deux premières propositions démontrées (VII.1 et VII.2) présentent ce que nous appelons l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd de deux entiers. On pourrait reformuler l'algorithme en :

- Entrée : deux entiers naturel non nuls n et m.
- Si $n > m$, échanger n et m
- Tant que n ne divise pas m
    - Remplacer m par m-n
    - Si $m > n$ échanger n et m
- Sortie : n

La division euclidienne des entiers – avec sa sortie double (quotient, reste) – n'est pas définie dans les *Eléments*, seul le cas diviseur/multiple l'est (i.e. reste 0) ; lorsque m est multiple de n, Euclide dit que n « mesure » m (i.e. n entre dans m un nombre entier de fois). L'algorithme procède donc par soustractions itérées et alternées (quand le résultat est inférieur au nombre soustrait sans que la condition d'arrêt soit vérifiée), d'où son nom d'algorithme d'*anthyphérèse* ou *antanarèse*. Le « 1 » n'étant pas traité comme un « nombre », le même algorithme donne lieu à deux propositions : VII.1 établit que si la sortie est 1 alors les entrées sont premières entre elles ; VII.2 établit que si la sortie n'est pas 1, alors les entrées ne sont pas premières entre elles et la sortie en est le pgcd (qu'Euclide appelle la plus grande commune mesure).

Permettons-nous de quitter Euclide pour une digression mathématique. On connaît le lien entre recherche de pgcd par divisions euclidiennes itérées et développement en fractions continuées. Par exemple pour les nombres 751 et 93 :

[4] Par exemple : A : B :: C : D ⇒ (A+B) : B :: (C+D) : D

$$751 = 93 \times 8 + 7 \qquad \frac{751}{93} = 8 + \frac{7}{93} = 8 + \frac{1}{\frac{93}{7}}$$

$$93 = 7 \times 13 + 2 \qquad \frac{751}{93} = 8 + \frac{1}{13+\frac{2}{7}} = 8 + \frac{1}{13+\frac{1}{\frac{7}{2}}}$$

$$7 = 2 \times 3 + 1 \qquad \frac{751}{93} = 8 + \frac{1}{13+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

Figure 3 : Lien entre recherche de pgcd et développement en fractions continuées

L'algorithme d'Euclide s'arrête. Il s'arrête toujours, car deux nombres entiers ont toujours un diviseur commun (et même un pgcd), d'où un développement en fraction continuée fini pour tout rationnel. Ici, 751 et 93 sont premiers entre eux (pgcd 1), et le rapport 751/93 est entièrement caractérisé par la suite (finie) d'entiers 8 – 13 – 3 – 2. On aurait pu s'appuyer sur ce résultat général pour donner une définition du rapport entre deux entiers reposant sur l'*anthyphérèse* (définition certes peu commode pour les définir les opérations dans $\mathbf{Q}^{+}*$). On sait que la considération de développement en fractions continués i*nfinis* permet de retrouver l'ensemble des réels.

Puisque la théorie exposée par Euclide ne permet de considérer, du point de vue numérique, que des entiers naturels non nuls et des rapports entre eux (qui ne sont pas vus comme des nombres), les ressources numériques sont insuffisantes pour exprimer *tous* les rapports entre grandeurs. Certains, cependant, peuvent l'être, et le livre X est consacré à l'étude des liens possibles entre nombres et grandeurs. Citons-en les premiers éléments (Euclide 1990-2001, vol.3):

> Définition X.1. *Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.*
> Proposition X.2. *Si, de deux grandeurs inégales proposées, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs sont incommensurables.*
> Proposition X.3. *Etant donnée deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.*
> Proposition X.5. *Les grandeurs commensurables ont comme rapport l'une par rapport à l'autre celui d'un nombre relativement à un autre nombre.*

Illustrons cela par le cas des segments A et B utilisés plus haut (Figure 2). Deux nombres sont toujours « co-mensurables », puisqu'ils ont toujours une « mesure » (i.e. un diviseur) commun, au pire 1. Par contre, pour deux segments A et B, il n'existe pas toujours un troisième segment qui « mesure » à la fois A et B au sens où A et B en seraient des multiples (entiers). Si c'était le cas, il existerait un segment C et deux nombres entiers n et m tels que A = nC et B = mC. On retrouve bien la notion actuelle de mesure : en choisissant C comme étalon de longueur, la mesure de A est le nombre n, la mesure de B est le nombre m. On est cependant loin de la théorie actuelle de la mesure, puisque seul les nombres entiers sont considérés, et que la théorie porte sur la co-mesurabilité des paires de grandeurs du même genre. Dans notre exemple, nous avions choisi A et B de telle sorte que B = 1,3 A. Le segment C = $\frac{1}{10}$A est une commune mesure (et même la plus grande) à A et B, puisque A = 10 C et B = 13 C. Dans ce cas, il a été facile de trouver C en disposant de l'information B = 1,3A, mais comment aurions-nous pu faire sans cette information ? C'est ici qu'on voit la puissance de l'algorithme d'*anthyphérèse* évoqué aux propositions X.2 et X.3. Pour les nombres il ne repose que sur 3 notions : la comparaison, la notion de nombre diviseur d'un autre, la soustraction d'un nombre strictement plus petit à un nombre strictement plus grand. Or ces trois notions existent aussi bien pour les segments. On peut ainsi relire le schéma donné à la figure 2 en termes de divisions euclidiennes de segments (dans laquelle les « quotients » sont des nombres entiers et les restes des segments) :

- Comme $A < B < 2A$ écrivons $B = 1A + R_1$ on a $R_1 < A$
- Comme $13R_1 < A < 4R_1$ écrivons $A = 3R_1 + R_2$ on a $R_2 < R_1$
- Comme $R_1 = 3\ R_2$ l'algorithme s'arrête

Le segment R_2 mesure A et B, qui sont donc co-mensurables. On a bien A = 10 R_2 et B = 13 R_2. On est dans le cas de la proposition X.3, analogue pour les grandeurs de la proposition VII.2 pour les entiers. Par contre, à la différence des entiers toujours mesurés par l'unité (par définition), deux grandeurs ne sont pas nécessairement co-mensurables. Au sens strict, la proposition X.2 n'affirme pas que ce cas se réalise, et la discussion du lien entre le côté et la diagonale du carré – paradigmatique pour nous – n'est pas dans les éléments d'Euclide. Plus généralement, les historiens ont montré le peu de fondement de l'idée selon laquelle l'édifice euclidien serait héritier d'une hypothétique « crise des irrationnels » qui auraient secoué un monde savant Grec des périodes archaïques et classiques supposément pythagoricien (Knorr 2001). La proposition X.2 se contente d'une lecture négative de la X.3 et proposition un critère algorithmique de non-co-mensurabilité: elle correspond au non-arrêt de l'algorithme d'*anthyphérèse*. On voit cependant que, dans ce cas, l'algorithme produit une suite, certes infinie, d'entiers qui caractérise parfaitement le rapport entre les deux grandeurs incommensurables; on retrouve l'analogue de la caractérisation des réels par développement en fractions continuées évoqué plus haut. Au cours des siècles, de nombreux commentateurs – mathématiciens et historiens – se sont interrogés sur le fait qu'Euclide n'ait pas utilisé l'*anthyphérèse* comme moyen unique pour définir les rapports à la fois pour les nombres et pour les grandeurs, quitte à accepter les suites infinies d'entiers. Sur ces débats nous renvoyons le lecteur à (Rabouin 2016).
Dans le cas de deux grandeurs co-mensurables, la proposition X.5 est le premier théorème reliant explicitement grandeurs et nombres. Ainsi, dans notre exemple, on a bien l'égalité de rapports A : B :: 10 : 13.

Calculer sur les longueurs de segments dans **La Géométrie** *de Descartes (1637)*

Descartes propose dans *La Géométrie* une méthode de résolution des problèmes de construction pour une large classe de problème qu'il tentera de délimiter au début du livre 2 (sur 3 livres). Le mot « méthode » est ici fondamental, et pas uniquement parce que *La Géométrie* est en fait une annexe du *Discours de la méthode*. Plus profondément, le projet de ce traité de Descartes n'est pas de démontrer de nouveaux *théorèmes* – de nouvelles vérités mathématiques – mais de proposer une méthode d'*analyse* des problèmes de constructions. Le terme *analyse* lui aussi à prendre au sens strict, celui qui s'oppose – depuis l'Antiquité tardive – à la *synthèse*. La synthèse expose un procédé de construction partant des éléments *donnés* pour aboutir aux éléments *requis*, et établit la validité de cette construction sans avoir à en expliquer l'origine. En ce sens, toutes les propositions des *Eléments* relevant du type *problème* présentent des synthèses. L'analyse, en revanche, procède à rebours : elle travaille dès le départ sur la figure finale (celle qui est en réalité *à construire*) et isole uns à uns les liens entre les donnés et les requis. Sa valeur est heuristique (elle permet de trouver une construction) et non démonstrative. Comme beaucoup de ses contemporains, Descartes voit dans la synthèse une tâche mécanique de pure vérification, qui produit de la certitude mais pas de la compréhension. L'analyse est seule valorisée, qui met l'intelligence à l'épreuve – c'est dans l'analyse qu'on *trouve* la solution – et fait saisir l'idée de la construction.

Le projet de Descartes dans *La Géométrie* est d'exposer une méthode qui, pour une large classe de problèmes de construction en géométrie plane, rende l'analyse aussi automatique et routinière que la synthèse. Il propose pour cela de s'appuyer sur les ressources de l'algèbre, lue à l'époque comme une méthode d'analyse dans les problèmes numériques. Cette lecture est d'ailleurs ancienne, puisque Diophante (2ème ou 3ème siècle de notre ère) décrivait déjà explicitement ses *Arithmétiques* comme un ouvrage d'analyse. Une petite digression permet d'illustrer ce point. Simon Stevin propose une traduction (très libre) des six premiers livres du traité de Diophante, voici comment il expose l'étude d'un des premiers problèmes : « *Partons* [partageons] *10 en deux parties telles que la majeure soit le triple plus deux de la moindre* » (Stévin 1634, 103) . Stévin distingue une phase de « construction » et une phase de « démonstration » disposées ainsi :

CONSTRVCTION.

Soit la moindre partie requise	1 ①	2
Ergo la majeure	3 ① + 2	8
Leur somme	4 ① + 2	10
Egale à	10	

Lesquels reduicts 4 ① seront egales à 8. Et par le 67 probleme, 1 ① vaudra 2.

Je di que 2 & 8 sont les deux nombres requis. *Demonstration.* La somme de 2 & 8, est 10, ce sont doncques les parties de 10. Item 8 est le triple + 2 de 2, selon le requis; ce qu'il falloit demonstrer.

Figure 4 : Résolution d'un problème de Diophante chez Stevin

Le « 1 dans un rond » est le symbole choisi par Stévin – et Bombelli avant lui – pour désigner l'inconnue à la puissance 1. La « construction » expose donc les étapes de ce que nous nommerions la mise en équation, pour aboutir à $4x+2 = 10$. Dans cette phase, on s'autorise à manipuler les nombres connus (tels 3 ou 2) aussi bien que l'inconnue ; cette phase relève donc de l'analyse. La résolution de l'équation est ici triviale et rhétorique. La phase de « démonstration » ou de synthèse consiste en ce que nous appelons la « vérification » ; elle est exposée deux fois, de manière rhétorique à la fin du texte, et dans la colonne de droite de la partie plus symbolique.

La « méthode » d'analyse cartésienne consiste à emprunter à l'algèbre la capacité à coder des relations – numériques en algèbre, géométriques dans le système cartésien – sous une forme symbolique dans laquelle l'on peut faire figurer aussi bien les donnés que les requis, et qui se prêtant au calcul. Les objets sur lesquels porte le système cartésien ne sont pas les nombres mais les segments considérés comme des grandeurs (et dont la « position » est donc libre). Ces objets ne sont pas nos vecteurs puisqu'ils n'ont ni direction ni sens. Dans un problème de construction, les segments donnés seront désignés par les lettres du début de l'alphabet *a, b, c* … et les segments requis – les inconnues – par les dernières *x*, *y*, *z*. Au livre 1, cinq constructions géométriques bien connues sont rappelées, que Descartes propose d'appeler « addition », « soustraction », « multiplication », « division » et « racine carrée ». Les trois dernières nécessitent qu'un segment auxiliaire ait été choisi comme segment unité. Rappelons les figures données par Descartes :

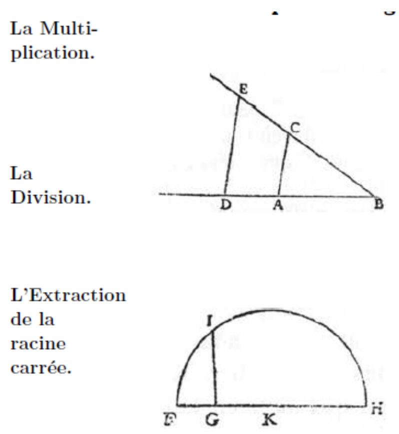


Figure 5 : Constructions géométriques portant un nom emprunté à l'arithmétique

Dans la figure du haut AB est le segment unité, et l'angle en B est quelconque : Descartes appelle BE le « produit » des segments BD et BC ; de même, BC est le résultat de la « division » de BE par BD. On notera l'étrangeté du système de Descartes, dans lequel le produit de deux longueurs n'est pas une aire mais une longueur. Cette sémantique non-standard lui permet de définir le produit et le quotient comme des opérations internes aux grandeurs du type « longueurs », ce qui le libère des problèmes d'homogénéité. Ainsi, dans ce système, si a désigne un segment, alors $aa+a$ désigne la somme – bien définie – de deux segments, et non la somme – non définie – d'une aire et d'un segment ; de même $aaaa$ désigne un segment et non un hypothétique hypervolume quadridimensionnel. Dans la figure du bas, FG est l'unité, l'angle en G est droit, et GI est appelé la « racine carrée » de GH. Descartes ne prend pas la peine de rappeler au lecteur ce qui justifie son choix ; il le suppose familier des *Eléments* d'Euclide dans lesquels la proposition VI.13 garantit l'égalité de rapports $\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH}$. La lecture euclidienne de cette proposition était bien différente de celle de Descartes : cette figure permet de résoudre un problème de construction dans lequel FG et GH sont donnés et GI requis. Ce problème de construction peut se formuler de deux manières différentes : GI est la moyenne géométrique entre FG et GH (VI.13) ; le carré de côté GI est égal en aire au rectangle de côtés FG et GH (II.14). Au livre 2, d'autres instruments que la règle et le compas sont évoqués, qui permettent de définir des constructions géométriques réalisant le calcul de « racine *n*-ième » d'un segment donné.

Une fois ce petit système mis en place, Descartes expose son programme d'analyse : face à un problème de construction n géométrie plane, supposr la construction déjà réalisée, nommer tous les segments impliqués avec la convention rappelée plus haut pour distinguer le requis du donné, exprimer toutes les relations géométriques (en réalité, essentiellement des relations de parallélisme et de perpendicularité ; plus, au livre 2, des relations de tangence à une courbe algébrique) pour traduire ces relations en un système d'équations polynomiales, en général à plusieurs inconnues. Procéder par élimination pour se ramener à un système dans lequel la dernière équation est à une seule inconnue, la précédente ayant une inconnue de plus, la précédente une de plus etc. (l'analogue étant, pour les systèmes du premier degré, la triangularisation), puis résoudre. Ce plan général esquissé en 20 lignes engage bien sûr tout un programme de recherche algébrique, sur la résolution par radicaux des équations polynomiales à une inconnue et sur l'élimination des inconnues dans un système d'équations polynomiales ; programme pour les siècles à venir, à peine engagé par Descartes.

L'ampleur du projet n'a d'égale que son étrangeté, une étrangeté redoublée par la familiarité des notations. Donnons un exemple. Les premiers exemples de résolution de problèmes géométriques donnés par Descartes rappellent au lecteur du 21ème siècle des formules bien connues. Descartes suppose que, a et b étant donnés, on cherche z tel que $z^2 = az + b^2$. Il démontre que la solution est donnée par $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. On pourrait s'étonner que Descartes démontre ce résultat bien connu de la théorie des équations du second degré, mais c'est oublier que dans ses notations, les lettres désignent des longueurs de segments (et non des nombres) et les opérations des constructions (ici réalisables à la règle et au compas). Dans ce cadre, sa résolution s'appuie sur la figure suivante, dans laquelle LM = b, LN = $\frac{1}{2}a$ et l'angle en L est droit:

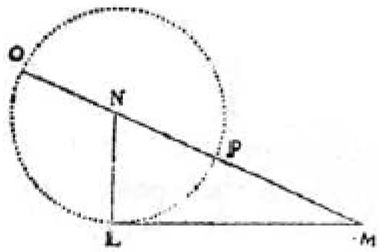


Figure 6 : Résolution d'une équation du second degré chez Descartes

Descartes affirme que, si l'on construit cette figure à partir de segment a et b de longueurs données, alors la longueur z = OM vérifie la relation demandée. Il laisse au lecteur le soin de dérouler le raisonnement : l'étude de la puissance du point M par rapport au cercle (Livre III des *Eléments*) permet d'écrire ML² = MP × MO, donc b^2 = (MO – OP) × MO. Or OP = 2 NO = 2 NL = a, on a donc bien $b^2 = (z - a) \times z = z^2 - az$. Par ailleurs, z = OM peut se calculer aisément par théorème de Pythagore : $z = OM = ON + MN = ON + \sqrt{NL^2 + LM^2} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Cette résolution d'équation du second degré n'a donc rien de numérique. Le radical de la formule n'invite à aucune réflexion sur la rationalité ou l'irrationalité des nombres concernés, puisqu'aucun nombre ne l'est.

Inutile de souligner que ce système d'aller-retour entre géométrie et notations algébriques n'est ni notre calcul vectoriel (les segments n'ont, rappelons-le, ni direction ni sens) ni notre méthode des coordonnées. Dans cette dernière, le plan est avant tout considéré comme un ensemble de points ; deux axes auxiliaires sont nécessaires, ainsi que des unités (éventuellement différentes) choisies sur chaque axe ; chaque point est repéré par un couple de nombre réels. Il n'est pas faux de dire que les « méthodes des coordonnées » – qu'on considère que les coordonnées sont des distances aux axes ou reposent sur un cadre vectoriel non nécessairement métrique – dérivent de l'approche cartésienne, mais il serait tout à fait faux de dire que Descartes met en place une méthode des coordonnées. On trouve par contre un point commun au système cartésien et aux méthodes des coordonnées en géométrie plane : les courbes y sont caractérisées par des (en général une) équation reliant deux inconnues ; il est vrai que pour caractériser ainsi une courbe, Descartes introduit un axe auxiliaire muni d'un point origine (sur lequel lire les y) et d'une direction (en générale orthogonale à celle de l'axe) sur laquelle la famille des segments allant de l'axe à la courbe est désignée par x. Les « coordonnées de points » sont ici des longueurs et non des nombres réels, et n'apparaissent que comme des auxiliaires dans la formation des équations de courbes.

Pour aller plus loin sur Descartes, nous invitons le lecteur à consulter (Descartes 1925), (Bos 2001) et (Mancosu 1996).

L'axiomatique des grandeurs et la théorie de la mesure de Otto Hölder (1901)

Complétons cette sélection de morceaux choisis sur le calcul sur les grandeurs et leurs relations (ou absence de relations) avec les nombres par un texte publié en 1901 par Otto Hölder sous le titre *Die axiome des Quantität une die Lehre vom Mass* (les axiomes de la quantité/grandeur et la théorie de la mesure) (Hölder 1996). Hölder y propose une axiomatique inspirée de la théorie euclidienne des rapports entre grandeurs plus conforme aux standards de clarté demandées par le lecteur de 1901 (et du 21ème siècle), et l'articule explicitement avec l'approche concurrente, celle reposant sur le choix d'un étalon permettant de rapporter les grandeurs aux nombres réels ; autrement dit, à la notion de mesure des grandeurs.
Présentons les principales articulations de ce texte bref et de lecture aisée, en omettant les démonstrations. Un genre de grandeurs est un domaine d'objets indéterminés soumis à 6 axiomes :

1. Deux grandeurs a, b étant données, une et une seule de ces trois relations est vérifiée : $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$
2. La somme $a+b$ de deux grandeurs est bien définie
3. $a+b > a$ et $a+b > b$
4. Si $a < b$ alors il existe x et y tels que $a + x = b$ et $y + x = b$
5. On a toujours $(a+b)+c = a+(b+c)$
6. Lorsque les grandeurs sont réparties en deux classes de telle sorte que chaque grandeur appartient à une et une seule des deux classes, et toute grandeur de la première classe est inférieure à toute grandeur de la seconde classe ; alors il existe une grandeur x telle que $a < x$ pour tout a dans la première classe, et $x < b$ pour tout b dans la deuxième classe (selon les cas, a appartient à l'une ou l'autre classe).

Hölder déduit une série de conséquences : on peut, par addition itérée, définir le produit na d'un entier naturel non nul n et d'une grandeur a ; l'ordre est archimédien ; l'addition est commutative ; existence des parties aliquotes (i.e. pour toute grandeur a et tout entier naturel non nul n il existe une grandeur b telle que $nb = a$, ce que l'on peut noter $b = \frac{a}{n}$). Ces résultats mathématiques conduisent à un paragraphe de réflexion générale sur « les conceptions anciennes et modernes de la théorie des proportions » :

> *Il existe essentiellement deux traitements de la théorie des proportions entre grandeurs : l'euclidienne et la moderne. Euclide explique ce que signifie, pour quatre grandeurs a, b, c, d, que a est à b dans le même rapport que c à d. Cette explication demande seulement que les grandeurs puissent être additionnées (et, donc, multipliées) ; en outre, qu'on puise savoir reconnaître si deux grandeurs sont égales ou non et, dans le second cas, laquelle est la plus grande.*
> (…) *Le point de vue moderne sur la théorie des proportions repose sur une idée exprimée de manière précise par Newton, selon laquelle le rapport d'une grandeur à une autre de même genre (cette seconde étant prise comme unité) s'exprime au moyen d'un nombre abstrait (i.e. réel positif). Selon ce point de vue, la relation de la grandeur a à la grandeur b est le même rapport que de c à d lorsque a mesuré par b donne le même nombre que c mesuré par d. Ici, le concept de proportion repose sur celui de mesure.* (Hölder 1996, 241, traduction libre)

Hölder reprend le fil mathématique pour rappeler comment construire les rationnels positifs comme classes d'équivalences de couples d'entiers, et les réels positifs comme coupures des rationnels. Ces constructions numériques lui permettent de démontrer le théorème fondamental :

Théorème : *pour tout rapport de quantités a : b (c'est-à-dire pour deux quantités prises dans un certain ordre) il existe une coupure bien définie (i.e. un nombre bien défini) au sens général du terme. Notons-le* $[a : b]$.
On peut appeler $[a : b]$ *la mesure obtenue en mesurant la quantité a par la quantité b, auquel cas b est appelé l'unité*. (Hölder 1996, 244, traduction libre)

L'auteur montre ensuite que cette notion de mesure vérifie les propriétés attendues : deux grandeurs a et b sont co-mensurables si et seulement si $[a : b]$ est un nombre rationnel ; un étalon b étant choisi, la mesure réalise un morphisme additif, autrement dit $[a : b] + [a' : b] = [(a+a') : b]$; le changement d'étalon de mesure donne lieu à des relations multiplicatives entre nombres réels, autrement dit $[a : b] . [b : c] = [a : c]$.

Ce texte de Hölder formalise et clarifie des idées bien classiques. Un exemple parmi beaucoup d'autres est fourni par les remarques que Joseph Bertrand fait dans les premières pages de son *Traité d'arithmétique* (1849). Il y revient en particulier sur la différence entre, d'une part les collections discrètes, pour lesquelles il existe une unité absolue et qui sont caractérisées du point de vue de la quantité les nombres entiers ; et d'autre part les grandeurs, pour lesquelles il n'existe par d'unité absolue et dont la caractérisation numérique par la mesure demande le choix d'une grandeur unité et la considération d'un rapport considéré comme nombre :

Le résultat de la mesure d'une grandeur s'exprime par un nombre. *Quand on dit, par exemple, une distance de trois mètre, un poids de quinze kilogramme, un vase de trois quarts de litres, etc.,* trois, quinze, trois quarts, *expriment des nombres.*
L'idée de nombre a son origine la plus naturelle dans la considération de plusieurs objets distincts. C'est par extension que l'on introduit la mesure de toutes les grandeurs. Si l'on dit, par exemple, un troupeau de quinze moutons et un poids de quinze kilogrammes, la grandeur contient, dans les deux cas, quinze fois son unité, mais, dans le premier, l'idée est plus simple, parce que la séparation des unités est matérielle, tandis que dans la seconde elle est purement fictive.
Les fractions et les nombres incommensurables, que géomètres [i.e. les mathématiciens] *considèrent comme des nombres, expriment entre la grandeur et son unité une relation plus complexe, dont nous développerons plus tard la nature.* (Bertrand 1849, 2)

Les négatifs comme *calculation generated numbers*

Le thème de cette seconde partie a été choisi pour faire contraste avec celui de la première. Dans la première partie, aucun négatif n'intervenait ; non plus que zéro. Lorsque l'on rencontrait des nombres (de $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Q}^{+*}$ ou $\mathbf{R}^{+*}$) et des relations numériques (d'ordre, additives, multiplicatives), des domaines d'objets (porteurs de grandeurs) fournissaient à la fois l'objectif principal d'une étude pour laquelle les nombres étaient des outils, et un domaine d'interprétation pour ces nombres et pour les relations numériques. Ici, par contraste, nous voudrions montrer combien des usages anciens qui – pour le lecteur du 21ème siècle – évoquent les « nombres négatifs », sont bien plus issus d'une nécessité calculatoire interne à des algorithmes que de la recherche d'outils numériques pour représenter des domaines d'objets. C'est en ce sens, que nous forgeons l'expression de *calculation generated numbers*, en clin d'œil aux *proof generated concepts* de Lakatos (1976).
Rappelons que nous ne cherchons pas à aborder l'ensemble des questions mathématico-épistémologiques préalables à l'étude didactique des phénomènes d'enseignement et apprentissage des nombres négatifs. Dans ce cadre, on devrait examiner une série des questions :

- sur l'usage – éventuellement justifié – de règles de calcul sur des *expressions* comprenant des nombres (ou quantités) – connu(e)s ou inconnu(e)s – soustrait(e)s ;
- sur l'usage / la dénotation de nombres soustraits/négatifs isolé ;
- sur l'interprétation des symboles dénotant des quantités soustraites isolées, donnant lieu à des débats sur leur légitimité et leur statut de « nombre ».

Un certain nombre de ces points ont fait l'objet de travaux déjà classiques, dans une perspective épistémologique (Glaeser 1981) ou d'histoire de l'enseignement (Schubring 2005). Nous présentons des éléments susceptibles de nourrir la réflexion sur les deux premiers points.

Calculer sur des expressions comprenant des nombres/quantités soustrait(e)s

Les *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* (九章算術) forment un recueil de problèmes et de procédures systématiques de résolution de problèmes mathématiques, compilé sous la dynastie Han (-206 – +220). Le lecteur francophone a la chance de disposer d'une traduction et édition critique de ce classique et de deux strates de commentaires anciens (Chemla &Shuchun 2004). Le chapitre 8, intitulé *fangcheng*, y traite de ce que nous appelons la résolution de problèmes du premier degré à plusieurs inconnues, et expose la méthode systématique de résolution que nous appelons méthode du pivot. L'outil de calcul est en effet à l'époque la table à calcul, table quadrillée dans chaque case de laquelle des baguettes mobiles viennent représenter des chiffres ou des nombres. Ce dispositif, adapté au calcul des opérations numériques sur les entiers et les fractions (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines carrées et cubiques) est aussi commode pour représenter un système d'équations linéaires ; on y dispose les coefficients du problème (sans avoir besoin de notation pour les inconnues), d'une manière qui rappelle notre écriture matricielle pour un système d'équations du premier degré. Dans les systèmes linéaires, les quantités peuvent être ajoutées ou retranchées. De plus, la mise en œuvre de l'algorithme du pivot demande que l'on sache ajouter ou soustraire deux lignes, et multiplier une ligne par un coefficient numérique. C'est dans ce cadre qu'on le traité prescrit des manipulations qui, pour nous, évoquent des nombres négatifs. Le complet du chapitre est d'ailleurs : *fangcheng, pour traiter de ce qui est mélangé, ainsi que du positif et du négatif*[5].

Considérons le $8^{\text{ème}}$ problème :

> *Supposons que, si l'on vend 2 bœufs et 5 moutons pour acheter 13 porcs, il reste 1000 sapèques, que si l'on vend 3 bœufs et 3 porcs pour acheter 9 moutons, on ait juste assez de sapèque, et que si l'on vend 6 moutons et 8 porcs pour acheter 5 bœufs, on ait un déficit de 600 sapèques. On demande combien valent respectivement les prix d'un bœuf, d'un mouton et d'un porc*. (Chemla & Shuchun 2004, 635)

Le texte prescrit une résolution passant par des états successifs de la table à calculer que l'on peut présenter matriciellement au lecteur moderne (nous reprenons la description de (Chemla & Shuchun 2004) :

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1\,000 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2C_2\text{-}3C_3 \rightarrow C_2 \\ 3C_1+5C_2 \rightarrow C_1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -27 & -33 & 5 \\ 39 & 45 & -13 \\ -1\,800 & -3\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$$

[5] Nous ne pouvons ici, faute de place et de compétence, discuter des choix ayant conduit les traducteurs à retenir les termes français « positif » et « négatif ». Nous renvoyons à l'introduction érudite au chapitre 8.

Simplifier C_1 par 3 et C_2 par -3 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 13 & -15 & -13 \\ -600 & 1\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$ $11C_1 + 9C_2 \rightarrow C_1$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 8 & -15 & -13 \\ 2\,400 & 1\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$

Figure 7 : Résolution d'un problème par *fangcheng*

Le lecteur ne manquera pas d'en déduire qu'un porc vaut 300 sapèques, un mouton 500 et un bœuf 1200.
Nous avons bien entendu utilisé le codage avec un petit trait pour désigner les négatifs (e.g. « -5 »), mais le codage sur la table à calculer est d'utiliser des baguettes noires ou rouges pour indiquer les quantités ajoutées et les quantités soustraites (respectivement). Ce chapitre 8 contient aussi la règle de « transposition » ; ainsi, la première étape de résolution du problème n°2 s'écrirait symboliquement $(7x - 1) + 2y = 10 \quad \rightarrow \quad 7x + 2y = 10 + 1$.
On trouve donc bien dans les *Neuf chapitre* un ensemble de règles de calcul portant sur un objet syntaxique complexe (un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues représenté parle tableau des coefficients numériques) ; règles permettant de résoudre des problèmes « concrets ». Il serait cependant imprudent de dire qu'on trouve des « nombres » négatifs dans les *Neuf chapitres*. Il va sans dire que ni l'énoncé ni problème ni celui de la solution ne nécessitent de tels « nombres » ; il suffit de dire qu'il « reste » ou qu'il « manque » tant de sapèques à l'issue d'une transaction. Dans l'exposé de la procédure, les règles d'addition, de soustraction et de transposition des nombres noirs ou rouges font l'objet d'énoncés rhétoriques non justifiés ; les multiplications et divisions sont utilisées dans les résolutions particulières mais la règle générale n'est énoncée nulle part. Par ailleurs, ces nombres « rouges » ne sont utilisés dans aucun autre chapitre de l'ouvrage, alors que leur considération aurait permis, per exemple, d'unifier les techniques de résolution des problèmes du premier degré à une inconnue par double fausse position (chapitre 7).
On pourrait s'attendre à trouver plus d'éléments dans le commentaire que l'érudit Liu Hui rédigea au 3ème siècle. Ce dernier a en effet repris toutes les procédures des *Neuf chapitre* et leur a cherché une justification (parfois plusieurs), dans un souci démonstratif absent du traité original. Pourtant Liu Hui est très peu disert sur l'algorithme de *fangcheng*. En particulier, il n'utilise aucun plongement sémantique – en termes de dettes, ou de déplacement vers la droite ou la gauche – pour justifier les règles du *fangcheng*. Il souligne le caractère symétrique du couple noir-rouge, en signalant qu'on peut inverser les couleurs d'une colonne sans modifier le problème.

Un deuxième petit dossier historique permet d'illustrer la formulation de règle de calculs sur des expressions complexes comprenant des quantités ou nombres soustraits, sans qu'il y ait pour autant d'extension du domaine numérique du côté négatif. Nous nous appuyons ici entièrement sur l'article d'Hélène Bellosta sur *L'émergence du négatif* (2004), traitant des mathématiques médiévales en langue arabe.
Le point de départ de la tradition de recherche algébrique est bien entendu le traité d'algèbre d'al-Khwārizmī, rédigé vers 820 à Bagdad. Les équations du second degré y sont classées en trois types, de sorte que dans le types canonique n'apparaissent que des quantités ajoutées :

Des carrés plus des racines sont égaux à un nombre [6]

[6] On pourrait écrire : $ax^2 + bx = c$, avec *a, b* et *c* positifs ; ou $ax + b\sqrt{x} = c$; ou encore $\begin{cases} ax + by = c \\ x = y^2 \end{cases}$. Cette dernière formulation est plus proche des formulations rhétoriques d'al-Khwārizmī, qui travaille avec deux

Des carrés plus un nombre sont égaux à des racines
Des racines plus un nombre sont égaux à des carrés

Lorsqu'un problème conduit à une équation du second degré dans laquelle une quantité est soustraite, on se ramène à l'un des types canoniques en « restaurant » la quantité manquante. Cette opération de restauration (*al-jabr*) porte sur les équations et non sur les nombres, et permet des formulations du type : « $2x = x^2 - 5$ *restaure* 5, *il vient* $2x + 5 = x^2$ ».

Les algorithmes de résolution ne donnent aucuns résultats négatifs (ils donnent par contre les deux positifs, le cas échéant), et aucune des étapes de calcul de la résolution ne peut faire apparaitre de nombre soustrait isolé. Par ailleurs, la validité des algorithmes de résolution est établie par plongement dans une sémantique géométrique dans laquelle les inconnues « racines » sont représentées par des longueurs de segments et les inconnues « carrés » par des aires de carrés.

Outre les méthodes de résolution des équations du second degré et les règles de réécriture d'équations, l'ouvrage expose des règles de réécriture d'expressions « algébriques » telle que la double distributivité :

> *Sache que, pour tout nombre multiplié par un autre nombre, il est nécessaire d'additionner l'un des nombres autant de fois que l'autre contient d'unités.*
> *Si on a des dizaines auxquelles on a ajouté des unités, ou dont on a retranché des unités, il est nécessaire de les multiplier quatre fois : les dizaines par les dizaines, les dizaines par les unités, les unités par les dizaines, les unités par les unités. Ainsi, si les unités qui sont avec les dizaines sont toutes ajoutées, la quatrième multiplication est additive ; et si elles sont toutes retranchées, la quatrième multiplication est aussi additive. Mais si les unes sont ajoutées et les autres retranchées, la quatrième multiplication est soustractive.* (Rashed 2007, 122)

Seul les nombres entiers sont considérés ici, et al-Khwārizmī appuie son développement sur un rappel – allusif – de la définition du produit comme addition itérée ; rappel qui, en effet, permet bien de justifier la distributivité de la multiplication sur l'addition lorsque l'un des facteurs est entier. Cette justification potentielle n'est pas plus explicitée dans la suite du texte, et les justifications par les aires ne sont pas mentionnées. Al-Khwārizmī déroule quelques exemples à partir du modèle de la multiplication des nombres à deux chiffres $(10 \pm a) \times (10 \pm b)$ (où a et b sont des entiers entre 1 et 9). Il traite successivement les exemples : $(10+1) \times (10+2)$, $(10-1) \times (10-1)$ (« *dix par dix est cent ; un soustrait par dix est dix soustractif, et un soustrait par dix est dix soustractif. Ceci est quatre-vingts ; et un soustrait par un soustrait est un additif ; ceci est donc quatre-vingt-un* » (Rashed 2007,122), $(10+2) \times (10-1)$, $(10-x) \times 10$, $(10+x) \times (10+x)$, et $(10-x) \times (10-x)$ (« *Si ont dit : dix moins une chose par dix moins une chose. Tu dis : dix par dix est 100 et moins une chose par 10 est dix choses soustractives ; moins une chose par dix est dix choses soustractives ; moins une chose par moins une chose est un carré additif. On a donc cent plus un carré moins vingt choses* ») (Rashed 2007, 124). On pourrait remarquer qu'aucune restriction sur la « chose » n'est indiquée, ce qui pourrait permettre à « dix moins une chose » de désigner un négatif. Rien n'est dit sur cela chez al-Khwārizmī.

C'est dans une même perspective que les successeurs d'al-Khwārizmī explicitent certaines règles. Ainsi Abū Kāmil (9ème-10ème siècles) explicite les règles de réécriture que nous écririons $a + b - b = a$ et $a - (b+c) = a - b - c$. Dans des calculs, on le voit utiliser (sans justification) $a - (-b) = a + b$. Dans son étude des règles générales de calcul sur les polynômes, al-Karağī (10ème-11ème siècles) mentionne des recommandations de prudence du type : dans une soustraction, le polynôme soustrait doit être plus petit que celui dont il est

---

inconnues non indépendantes, puisque l'une est le carré de l'autre (et l'autre la racine de l'une). Pour une introduction générale, nous renvoyons le lecteur à (Rashed 2007) et (Djebbar 2005).

retranché ; le sens de « petit » n'est pas précisé. Dans les cas particulier, les réécritures sont décomposées en étapes qu'H. Bellosta retranscrit ainsi (Bellosta 2004, 74) :

$$A = (8x + 20 + 2x^2) - (10x + 4 - x^2)$$
$$A = (8x + 20 + 2x^2 + x^2) - (10x + 4 - x^2 + x^2)$$
$$A = 8x + 20 + 3x^2 - (10x + 4)$$
$$A = 8x + (20 - 4) + 3x^2 - (10x)$$
$$A = (8x + 16 + 3x^2) - (10x)$$
$$A = 16 + 3x^2 - (10x - 8x)$$
$$A = 16 + 3x^2 - 2x$$

L'arithmétique des polynômes est complétée au 12$^{\text{ème}}$ siècle par al-Samaw'al, qui explicite de nouvelles règles à l'occasion de la présentation d'algorithmes généraux de division euclidienne et d'extraction de racines carrées dans **Q**[X, 1/X]. Ces algorithmes prolongent les algorithmes « chiffre à chiffre » connus pour les entiers écrits en système positionnel décimal (introduit dans le monde savant de langue arabe par al-Khwārizmī). Les règles complètes de calcul sur ce que nous appelons des nombres négatifs sont données, sans justification, dans le cadre d'algorithmes avancés sur les polynômes dans lesquels apparaissent des termes *nāqiṣ* (retranchés/négatifs) aussi bien que *zā'id* (ajoutés/positifs).

Usage ancien des négatifs isolés comme exposants

Rien de ce qui a été exposé jusqu'ici ne faisait rencontrer de symboles isolés renvoyant à des quantités ou des nombres soustraits. Dans l'arithmétique des polynômes, les règles de calcul sur les exposants donnent lieu à l'énoncé de ce que nous appellerions les règles d'addition dans **Z**. Ainsi chez al-Samaw'al :

> *Du fait que la multiplication donne un nombre dont le rapport à l'un des facteurs est égal au rapport de l'autre facteur à l'unité, il faut que la distance entre le rang du produit de deux nombres – placés à deux quelconques de ces rangs – et le rang de l'un des facteurs soit égale à la distance entre le rang de l'autre facteur et l'unité. Si les deux facteurs sont de deux côtés différents de l'unité, nous comptons depuis le rang de l'un des deux facteurs un nombre égal à la distance entre l'autre facteur et l'unité, du côté de l'unité.* (Bellosta 2004,79)

Ici le « rang » désigne la puissance de l'indéterminée dans la série des puissances de l'indéterminé X et de son inverse, que nous noterons X':

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & 4 & 3 & 2 & 1 & . & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \ldots & X^4 & X^3 & X^2 & X^1 & 1 & X'^1 & X'^2 & X'^3 & X'^4 & \ldots \end{array}$$

Tableau que l'on pourrait réécrire de manière anachronique avec des exposants négatifs

$$\ldots \quad X^4 \quad X^3 \quad X^2 \quad X^1 \quad 1 \quad X^{-1} \quad X^{-2} \quad X^{-3} \quad X^{-4} \quad \ldots$$

Soulignons que ce n'est pas ce que fait al-Samaw'al, qui parle de puissances d'une « partie » de X, c'est-à-dire de l'inverse de X. Dans le texte cité, il part de la relation multiplicative $\frac{X^n}{X^m} = \frac{X^p}{1}$ pour en déduire, en termes de « rang du produit », les relations additives entre les exposants *n*, *m* et *p* ; règles qu'on peut lire comme les règles d'addition et de soustraction dans **Z**. La règle générale est illustrée par des exemples[7] :

> *Deuxième exemple : nous voulons multiplier une partie d'un cube* [i.e. X'^3, qu'on pourrait noter X^{-3}] *par une partie d'un carré carré* [X^{-4}] (…) *nous trouvons dans le tableau en face du rang de la partie du cube 3 et en face du rang de la partie du carré-carré 4, nous les ajoutons, et c'est 7 en face de quoi est le rang de la partie du quadrato-cube* [X'^{-7}].

[7] Dans les traductions des citations d'al-Samaw'al, les inserts entre crochets sont bien entendu de nous.

Troisième exemple : trois parties de carré $[3X^{-2}]$ par sept cubes $[7X^3]$, *nous multiplions 3 par 7, il vient 21, (...) si nous voulons la différence entre les deux nombres qui sont en face des deux rangs des facteurs – ce sont 2 et 3 – nous trouvons que c'est un, et nous trouvons en face, du côté du facteur qui correspondait au nombre qui était le plus grand, le rang de la chose.* (Bellosta 2004, 79-80).

Ainsi, si étrange que celui puisse nous sembler, les règles d'addition dans **Z** sont énoncées dans un contexte où il n'y a pas de nombres négatifs, dans le cadre d'un calcul avancé sur les polynômes en une indéterminée et son inverse (produit, division, extraction de racine carrée de polynômes). C'est le travail dans un groupe multiplicatif dont les objets ne posent pas de problèmes d'existence, à savoir ($\mathbf{Q}^{+*}$,×) qui invite à un calcul additif sur des exposants. Les rôles de X (ou d'un nombre donné) et de son inverse étant symétriques du point de vue multiplicatif, les exposants sont réparties en deux séries symétriques, sans que l'une soit par nature « positive » et l'autre « négative ».
Ce même contexte donnera lieu à une apparition ancienne de notations désignant des négatifs isolés, mais toujours considérés comme des exposants. On retrouve les règles données par al-Samaw'al, mais cette fois avec des négatifs, dans le *Triparty en la science des nombres* rédigé par Nicolas Chuquet, mathématicien actif à Lyon et Paris à la fin du 15ème siècle. Dans son texte, la notation « 12.^{3} » désigne ce que nous noterions « 12 x^3 », x étant l'inconnue d'un problème d'algèbre (Chuquet 1881, 155):

Qui multipliroit aussi .12.^{3} par .10.^{5} lon doit p̃mier multiplier .12. par .10. monte .120. puis fault adioster les denomĩacions ensemble qui sont .3. et .5. mõtent .8. Ainsi la multiplicacion monte .120.^{8}

(…)

Semblement qui multipliroit .8.^{3} par .7.$^{1.\tilde{m}.}$ Il conuiẽt p̃mier multiplier .8. par .7. montẽt .56. puis fault adiouster les denomĩacions cestasſ 3. p̃. auec .1. m̃. montent .2. ainsi ceste multiplicacion monte .56.^{2} et ainsi fault entendre des aultʒ.

Figure 8 : Multiplications de monômes chez Chuquet

Enfin, dans le document ci-dessous, les puissances « négatives » d'un nombre donné, ici 2, servent à illustrer l'utilité de nombres que Clavius dit « fictifs, ou moindres que rien » (*De numeris fictis, sive minoribus quam nihil*) (Clavius 1609, 30):

&c.	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	&c.
&c.	—$\frac{1}{128}$	—$\frac{1}{64}$	—$\frac{1}{32}$	—$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Figures 9 : Les puissances de 2, d'exposants positifs ou négatifs, chez Clavius

Négatifs isolés comme résultats intermédiaires dans algorithme

Un deuxième contexte, moins ancien que celui du calcul sur les exposants, donne lieu à l'apparition de négatifs isolés. Ce contexte est d'ailleurs le même que celui de l'apparition de ce que nous nommons des nombres complexes, à savoir celui de la résolution de certaine équations du troisième degré. La méthode mise au point par les algébristes italiens au 16ème

siècle – Tartaglia, Cardan, Scipio del Ferro – est présentée ainsi en 1579 dans l'*Algebra* de Bombelli (1579, 290):

$1\overset{3}{\smile}$ Eguale à $6\overset{1}{\smile}$ p. 40.

2. 20.
2. 20.

4. 400.
2. 8.

8. 392.
R.q.392.
20.p.R.q.392. 20.m.R.q.392.
R.c.L20.p.R.q.392⅃.p.R.c.L20.m.R.q.392.⅃
Lati. 2.p.R.q.2. 2.m.R.q.2, che
ſommati inſieme fanno 4, ch'è la ualuta del
Tanto.

Figure 10 : Résolution de $x^3 = 6x^1 + 40$ chez Bombelli

Le nombre au-dessus d'une cupule est la puissance de l'inconnue. Ce document présente donc les étapes de calcul de l'algorithme de résolution d'une classe d'équations du troisième degré, ici sur le cas de l'équation $1x^3 = 6x^1 + 40$. L'algorithme est le suivant : le coefficient 6 est divisé par 3, le résultat est élevé au cube, il vient 8 ; le coefficient 40 est divisé par 2, le résultat est élevé au carré, il vient 400. On calcule la différence 400 – 8 = 392, la solution est

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$$

On notera que le système symbolique de Bombelli est déjà assez perfectionné, avec non seulement des symboles pour la racine cubique (R.c.) et la racine carrée (R.q.), mais aussi des séparateurs de blocs permettant de lever d'éventuelles ambiguïtés sur la portée des opérateurs (ici un L pour la parenthèse ouvrante, et son symétrique pour la parenthèse fermante). Le lecteur n'aura pas manqué de calculer que cette expression vaut 4, puisque que, comme le fait remarquer Bombelli, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} = 2 + \sqrt{2}$.

Pour ce même algorithme et ce même type d'équations, les étapes de calcul peuvent se dérouler de manière plus surprenante lorsqu'on change les valeurs des paramètres :

Ancora ſi può procedere nella agguagliatione di tal
Capitolo in queſta guiſa. Agguagliſi $1\overset{3}{\smile}$ à $15\overset{1}{\smile}$ p.4,
pigliſi il terzo delli Tanti, che è 5, cubiſi fà 125, e que-
ſto ſi caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4,
reſta m.121 (ilqual ſi chiamerà più di meno) che di que
ſto pigliata la R.q. ſarà p.di m.11, che aggionta con la
metà del numero, fa 2.p.di m.11, che pigliatone il la-
to cubico, ed'aggionto col ſuo reſiduo, fa 2.p.di m.1.&
2.m.di m.1, che gionti inſieme fanno 4, e 4. è la ualuta
del Tanto. Et benche à molti parerà queſta coſa ſtraua

Figure 11 : Résolution de $x^3 = 15x^1 + 4$ chez Bombelli (1579, 294)

Il n'est pas nécessaire de lire l'italien de 1579 pour décoder ce texte. En appliquant l'algorithme à l'équation $1x^3 = 15x^1 + 4$ on forme d'abord les deux nombres 125 (le cube du tiers de 15) et 4 (le carré de la moitié de 4). On les soustrait, ce qui donne 4 – 125 = – 121, que Bombelli note « m.121 ». On en prend ensuite la racine carrée, que nous noterions[8] $11i$ et que Bombelli note « p.di m.11 ». « p. di m. » est l'abréviation de « *piu du meno* », autrement dit « plus de moins » ; de même, dans d'autres calculs, le symbole « m. di m. » abrège « *meno di meno* » (moins de moins). Ces termes ne font l'objet d'aucune interprétation ; de même que « – 121 » ils sont des symboles qu'on s'autorise à écrire comme des intermédiaires dans un algorithme. Ils font l'objet de règles de calculs non interprétées mais déclarées formellement (« *via* » signifie « fois ») (Bombelli 1579, 169) :

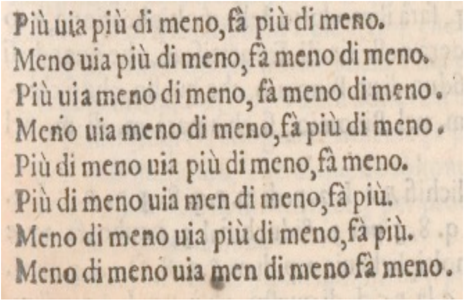
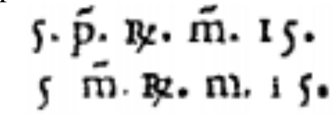

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

Figure 12 : Liste des produits de deux facteurs choisis parmi ±1 et ±*i*

Le déroulement de l'algorithme conduit donc à la solution « formelle »

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$
$$\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$
$$2+i+2-i$$

c'est-à-dire 4. On voit que les seuls « nombres » apparaissant dans le problème ($1x^3 = 15x^1 + 4$) et dans la solution (4) sont de braves entiers positifs. Les écritures intermédiaires produites par l'application uniforme – et non interprétée – de l'algorithme n'ont pas à être regardées comme des nombres. Tout comme les notations différentielles *dx* et *dy* de la fin du 17ème siècle, ce sont des « fictions utiles ». Elles n'ont pas besoin d'exister pour être utiles, car le contexte est – ici encore – un contexte d'analyse et non de synthèse. Dans le cas de l'équation $1x^3 = 15x^1 + 4$, la synthèse consiste en la vérification – triviale – du fait que 4 est solution. Pour ce qui est du calcul différentiel et intégral, la synthèse est renvoyée – parfois un peu légèrement – aux méthodes « par exhaustion » héritées de la période hellénistique.
Dans ce contexte d'analyse – algébrique puis différentielle – les auteurs sont systématiques *à la fois* dans leur usage d'un système symbolique étendu au-delà de l'interprété, *et* dans leur affirmation de la non existence de « nombres » désignés par certaines notations. Ainsi dans son *Ars Magna* (1545), Cardan pouvait-il *à la fois* affirmer qu'il est impossible en partager 10 en deux parties dont le produit soit 40 (« *manifestum est quad casus seu quaestio est impossibilis* » (Cardan 1545, 67), *et* appliquer l'algorithme général de résolution des équations du second degré pour produire les écritures



dont la somme est bien $5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$ et le produit 40.

[8] Nous nous autorisons l'abus consistant à parler de « la » racine carré dans le domaine complexe.

Bibliographie

Artigue M (1990) Epistémologie et didactique. *Recherche en didactique des mathématiques* 10(2) : 241-286.

Bellosta H. (2004) L'émergence du négatif. In R. Morelon et A. Hasnawi (éds.) *De Zénon d'Elée à Poincarré, Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed* (pp. 64-83). Louvain – Paris : Peeters.

Bertrand, J. (1849). *Traité d'arithmétique*. Paris: Hachette.

Bombelli R. (1579) *Algebra*. Bologne: Giovanni Rossi. http://mathematica.sns.it/opere/9/ ou http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877

Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels*. Paris: Ellipses.

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness*. New-York: Springer.

Cardan G. (1545) *Ars Magna*. In *Oeuvres complètes* vol.4. Lyon : Huguetan et Ravaud, 1663. http://www.cardano.unimi.it/testi/opera.html

Chemla K., Shuchun G. (2004) *Les neufs chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* (édition critique bilingue). Paris : Dunod.

Chuquet N. (1881) *Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien* (publié d'après le manuscrit *fond français* n°1346 de la bibliothèque nationale de Paris). Rome : imprimerie des sciences mathématiques et physiques.

Clavius, C. (1609). *ALgebra Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu.* Disponible sur https://www.e-rara.ch/gep_r/doi/10.3931/e-rara-61632

Descartes R. (1925). *The Geometry of René Descartes* (translated from the French and Latin by D.E. Smith & L. Latham with a facsimile of the first edition, 1637). Chicago: Open Court. https://archive.org/details/geometryofrene00desc

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris : Vuibert-Adapt. Un dossier sur l'algèbre de langue arabe a été préparé par A. Djebbar pour Culturemath : http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html

Euclide (1990-2001) *Les Eléments* (traduction de Bernard Vitrac), 4 volumes. Paris : PUF. Voir aussi : Vitrac B. *Les géomètres de la Grèce antique*, dossier disponible sur le site Culturemath http://www.math.ens.fr/culturemath/

Glaeser, G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs. *Recherche en didactique des mathématiques* 2(4) : 303-346.

Hölder O. (1996) The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement (trad. de J. Mitchell et C. Ernst d'après l'édition originale allemande, 1901). *Journal of mathematical psychology* 40 : 235-252.

Knorr, W. (2001). The impact of modern mathematics on ancient mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques* 7 :121-135.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations : The logic of mathematical discovery*. Cambridge : Cambridge University Press.

Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, 1996.

Rabouin, D. (2016). The problem of a “general” theory in mathematics: Aristotle and Euclid. In K Chemla, R. Chorlay, D. Rabouin (Eds.) *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences* (pp.113-134). Oxford: O.U.P.

Rashed R. (2007) *Al-Khwarizmi, le commencement de l'algèbre* (texte établi, traduit et commenté par R. Rashed). Paris : Librairie Blanchard.

Schubring G. (2005) *Conflicts between generalization, rigor and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany.* New-York: Springer.

Sesiano, J. (1985). The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences* 32 (2) : 105-150.

Stedall J. (2008) *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*. Oxford: Oxford University Press.

Stevin, S. (1634). *La Disme*. In *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard* (pp.206-213). Leyde : Bonaventure & Elsevier..

Stevin,S. (1634). Les six premiers livres d'algèbre de Diophante d'Alexandrie. In *Les Œuvres mathématiques de Simon Stévin, augmentées par Albert Girard* (pp.102-174). Leyde : Bonaventure & Elsevier. http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101_11463Index.asp