

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Daniel PERRIN, Anne PINVIDIC

Résumé.

Nous partons de l'hypothèse, étayée par une analyse mathématique et une analyse didactique appuyée notamment sur les travaux de Duval, que les cas d'isométrie des triangles et les invariants (longueurs, angles, aires) fournissent des outils de démonstration plus accessibles pour les élèves du cycle 4 que les transformations. Les programmes actuels donnent la possibilité d'organiser l'enseignement de la géométrie en les plaçant au début de la progression du cycle 4. Ce choix permet de donner toute sa place à la démonstration dans le cours et fournit de nombreux exercices pour les élèves. Le but de l'atelier était de discuter ces choix en s'appuyant sur des réalisations en classe et un stage de formation continue.

L'atelier a été proposé par des membres du groupe géométrie de l'IREM de Paris. Le point de départ du travail de ce groupe est la parution des nouveaux programmes de cycle 4 dans lesquels reviennent notamment les cas d'isométrie et de similitude des triangles. L'atelier s'appuie sur le travail de ce groupe, notamment pour l'encadrement de stages de formation continue et la rédaction d'une brochure qui devrait paraître en 2020 (Groupe IREM, à paraître). Le lecteur y est renvoyé pour tous détails. Il pourra aussi se référer aux textes respectifs de Daniel Perrin et Marie-Jeanne Perrin-Glorian à paraître dans le livre que doit éditer prochainement la CORFEM et disponibles en ligne dans une version préliminaire.

Dans l'atelier, deux thèmes ont été abordés : le théorème de Thalès et sa démonstration par les aires, les cas d'isométrie des triangles comme outils de démonstration pour les élèves. Sur chaque thème, il y a eu une partie de présentation suivie d'un travail des participants pour amorcer une discussion. Le temps a manqué pour aller au bout des discussions. Sur chaque partie le présent texte va donc un peu plus loin que ce qui a pu être effectivement réalisé dans le temps de l'atelier. On trouvera aussi quelques compléments.

Introduction : les outils de la géométrie

Il est clair que, pour faire de la géométrie, on a besoin d'outils. On peut en répertorier au moins quatre :

- L'utilisation des invariants (longueurs, angles, aires).
- Les cas d'égalité et de similitude.
- Les transformations.
- Le calcul.

Pendant deux mille ans, les cas d'isométrie et de similitude ont été l'outil principal de tous les géomètres¹. Au début des années 1970, la réforme des mathématiques modernes les a bannis, parce qu'elle préférait à l'axiomatique euclidienne celle des espaces vectoriels. On se souvient de l'invective de Dieudonné *À bas Euclide, plus de triangles*. Il précisait d'ailleurs (Dieudonné, 1964) :

¹ Les auteurs des manuels actuels semblent avoir complètement oublié que cela puisse être un outil !

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, avant de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints cas d'égalité ou cas de similitude des triangles ...

L'une des raisons invoquées pour justifier cet ostracisme est l'imprécision des prémisses des Éléments d'Euclide qui pouvait faire penser que ce bel édifice était bâti sur du sable.

Prenant acte de l'échec de la réforme des maths modernes, un virage s'opère dans les années 1980, avec un enseignement de la géométrie plus conforme à l'intuition et plus adapté à l'utilisation pratique. Cependant, l'anathème jeté sur les cas d'égalité des triangles demeure et ceux-ci ne réapparaissent pas, les programmes mettant plutôt en avant l'outil transformations. De surcroît, ces deux réformes ont aussi largement minoré le rôle des invariants, notamment angles et aires. Dans la ligne du rapport de la commission Kahane (2002), nous allons tenter ici d'expliquer en quoi, même dans une perspective résolument moderne de la géométrie, ces outils sont encore essentiels.

1. L'invariant aire, la droite des milieux et le théorème de Thalès

Notre postulat est celui du programme d'Erlangen de Felix Klein (1872, réédition 1974) : une géométrie c'est un ensemble muni d'un groupe de transformations. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la géométrie affine. Cette géométrie met en jeu des propriétés d'incidence (alignement, concours) ou de parallélisme, ou des rapports de mesures² sur une même droite ou des droites parallèles, notamment la notion de milieu, ou encore des barycentres (en gros tout ce qui s'écrit en termes de vecteurs) ou en enfin d'aires³, mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes.

Cette géométrie admet un unique invariant, qui est l'aire (voir Perrin, 2014a). La traduction de cette invariance est ce que nous appelons « *les lemmes du collège* » dans *Mathématiques d'école* (Perrin, 2011). Nous allons expliciter ces lemmes élémentaires et les utiliser abondamment dans ce qui suit.

Ce qui fonde l'emploi de l'aire dans ce cadre est un principe⁴ : tout théorème de géométrie affine peut être prouvé en utilisant ces lemmes. Nous allons illustrer ce principe par deux exemples au niveau du collège : la droite des milieux et le théorème de Thalès.

1.1. La droite des milieux dans la classe d'Anne Pinvidic

1.1.1. Les deux lemmes-clés : la médiane et la parallèle⁵

On note $A(X)$ l'aire d'une partie X du plan.

Lemme (de la médiane)

Soit ABC un triangle et $M \in [BC]$. Alors M est milieu de $[BC]$ si et seulement si l'on a $A(ABM) = A(ACM)$. **(1)**

Lemme (de la parallèle)

² Idéalement, il faudrait considérer des mesures algébriques, mais il y a belle lurette que cette notion a disparu des programmes. Il revient au même de considérer des rapports de vecteurs colinéaires.

³ Oui, l'aire est un invariant de la géométrie affine, ou plutôt un semi-invariant (car elle est multipliée par le déterminant de la transformation). Mais les rapports d'aires sont vraiment invariants par les transformations affines.

⁴ En fait c'est même un théorème, voir Perrin (2014a) Ch. 5.

⁵ Appelé aussi parfois « lemme du trapèze », notamment dans Perrin (2011).

Soient ABC et ABD deux triangles avec (DC) parallèle à (AB) . On a $A(ABC) = A(ABD)$. (2)

Démonstration. Dans les deux cas, le résultat découle de la formule *base x hauteur / 2* mais on peut aussi le montrer directement par découpage et recollement⁶, à partir de l'aire du demi-parallélogramme, comme le fait Euclide (voir Perrin, 2011 ou Perrin-Glorian, 2001).

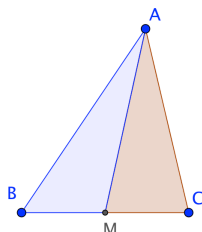


Figure 1. Lemme de la médiane

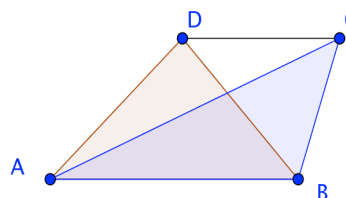


Figure 2. Lemme de la parallèle

1.1.2. Le théorème de la droite des milieux comme application de ces deux lemmes

On peut considérer différents énoncés communément désignés comme théorème de la droite des milieux. Un de ces énoncés se déduit de ces lemmes. Il s'agit du résultat suivant :

Théorème 1. Soit ABC un triangle et D le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par D recoupe $[AC]$ en E . Alors, E est le milieu de $[AC]$. (3)

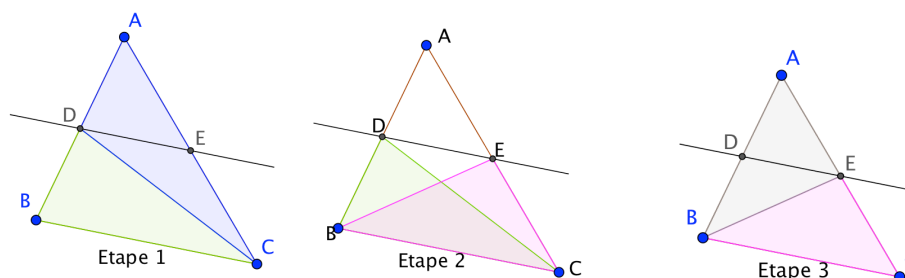


Figure 3. La droite des milieux

Démonstration. (En utilisant des aires, pour d'autres preuves voir 3.1 ci-dessous.)

Comme D est le milieu de $[AB]$ on a $A(ADC) = A(BDC)$ par le lemme de la médiane et ces aires sont égales à la moitié de l'aire de ABC .

Comme (DE) est parallèle à (BC) on a $A(BDC) = A(BEC)$ par le lemme de la parallèle. L'aire de BEC est donc la moitié de celle du triangle, donc égale à l'aire de BEA et la réciproque du lemme de la médiane montre que E est le milieu de $[AC]$.

La réciproque se déduit du premier théorème par un raisonnement qu'on peut formuler directement : On suppose que D et E sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. On trace la parallèle Δ à (BC) passant par D . D'après le théorème 1, elle coupe $[AC]$ en son milieu E , donc Δ n'est autre que (DE) puisqu'il existe une seule droite passant par deux points. Donc (DE) est parallèle à (BC) .

⁶ Le travail sur découpage et recollement contribue de manière essentielle à installer la notion d'aire chez les élèves.

Ce raisonnement est difficile pour les élèves et on peut se demander si la formulation sous forme d'une démonstration par l'absurde⁷ ne serait pas plus convaincante. Si (DE) n'est pas parallèle à (BC) , on trace la parallèle passant par D , elle coupe $[AC]$ en F , que l'on suppose distinct de E . Mais, par le sens direct du théorème F doit être le milieu de $[AC]$ et ce n'est pas possible !

1.1.3. Le déroulement en classe

Le contexte : Les activités mises en œuvre se déroulent dans des classes de 4^{ème} et 3^{ème} du collège Joliot-Curie à Fontenay-sous-Bois. C'est un établissement ordinaire du Val de Marne avec une grande mixité sociale. On évoque ici seulement les séquences relatives aux milieux des côtés d'un triangle en 4^{ème}, d'autres séances ont été menées, toujours en utilisant les aires, sur le théorème de Thalès en 3^{ème}.

Une attention particulière est accordée à la démonstration des théorèmes rencontrés afin d'aider les élèves à entrer pleinement dans le monde mathématique.

Le théorème est présenté aux élèves en 3 énoncés distincts :

Soit ABC un triangle, D le milieu de $[AB]$, E un point de $[AC]$.

- 1) Si (DE) est parallèle à (BC) , alors E est le milieu de $[AC]$.
- 2) Si, inversement, E est le milieu de $[AC]$, alors la droite (DE) est parallèle à (BC) .
- 3) Si l'on a ces propriétés, on a $DE = \frac{1}{2} BC$.

On trouvera en annexe les figures et le texte présentés en classe. Le manuel utilisé *Des maths ensemble et pour chacun*, 4^{ème} de Jean-Philippe Rouquès et Hélène Stäiner fournit aux élèves des énoncés incomplets, ce qui permet un travail sur les conjectures et la représentation de la situation.

Les difficultés des élèves

- 1) Les lemmes préliminaires (médiante, trapèze) ne sont pas disponibles.
- 2) La formule d'aire n'est pas toujours bien maîtrisée et le recours à la formule pour justifier les égalités d'aires pose parfois problème. De plus, le fait d'invoquer cette formule au cours de la preuve est un facteur important de complexification de celle-ci.
- 3) La visualisation des lemmes est difficile quand la base n'est pas horizontale.

Remédiations envisagées

Plusieurs enseignements ont été tirés de cette expérience. Le principal est que les lemmes préliminaires doivent être travaillés beaucoup plus en amont, institutionnalisés et notés dans le cahier de cours si l'on veut qu'ils servent d'outils de démonstration. Ainsi on n'a plus besoin de s'appuyer sur la formule de l'aire du triangle pendant les démonstrations de la droite des milieux et de Thalès. On peut ainsi tirer profit du caractère visuel des aires, à condition d'avoir créé des images mentales. Pour cela, l'utilisation du logiciel GeoGebra en video-projection est essentielle.

Nous reviendrons dans la discussion sur les moyens de renforcer cette approche par les aires. L'exercice suivant est sans doute intéressant en ce sens :

⁷ En vérité, en géométrie élémentaire, toutes les réciproques se prouvent ainsi à partir du sens direct et d'un petit raisonnement par l'absurde, voir (Groupe IREM, à paraître, Annexe 3). Cet exemple est une bonne entrée en matière sur ce thème.

Partage équitable d'un triangle. On considère un triangle ABC et un point D sur $[AC]$. Comment partager le triangle de manière équitable (c'est-à-dire en deux parties de même aire) par une droite passant par D ?

Le point 3) (l'assertion sur la longueur moitié) est donné en exercice aux élèves

L'énoncé (sans la figure) est le suivant :

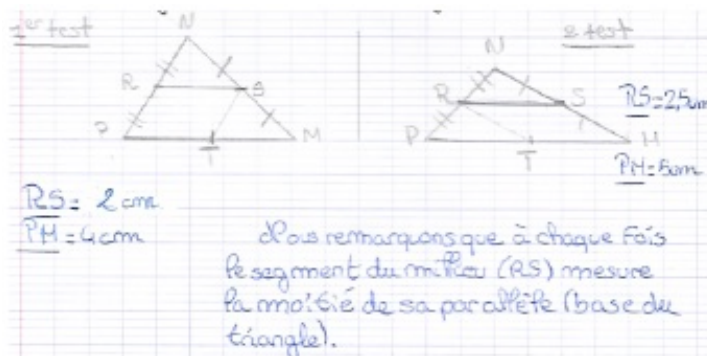
MNP est un triangle, R et S sont les milieux respectifs des côtés $[NP]$ et $[NM]$.

Faire une conjecture concernant la longueur RS .

Au cours de la recherche, il était suggéré aux élèves qui n'avaient pas d'idée de considérer le milieu T de $[PM]$. Des élèves y ont pensé tous seuls, voire ont fait le partage du triangle en quatre en joignant les milieux (Figure 4).

Un plan de la démonstration est élaboré collectivement. Ensuite les élèves doivent rédiger seuls puis en équipe le premier pas. A partir des textes obtenus, les productions sont critiquées et améliorées collectivement.

Exemples de productions d'élèves



Données : $(RS) \parallel (TP)$

Je sais que $[RS]$ mesure la moitié du côté $[TP]$

Il faut utiliser le théorème 2

T est le milieu du segment $[MP]$

$RSTH$ forme un parallélogramme donc $[RT]$ et $[ST]$ sont égaux

Si on relie RST cela forme 3 triangles semblables

1.2. Discussion sur la preuve de la droite des milieux

1.2.1. D'autres preuves du théorème

Bien entendu il y a beaucoup d'autres preuves du théorème de la droite des milieux (voir par exemple Perrin, 2006). Nous en sélectionnons seulement trois ici.

Dans tous les cas, I est milieu de $[AB]$, (IJ) est parallèle à (BC) et on montre que J est le milieu de $[AC]$.

Première méthode : On trace la parallèle à $[AB]$ passant par J . Elle coupe $[BC]$ en K . On conclut en utilisant le parallélogramme $BIJK$ et les triangles égaux AIJ et JKC (Figure 5).

Deuxième méthode : On commence comme la première méthode. Du fait que $BIJK$ est un parallélogramme, on déduit que $IB = JK = AI$ et donc que $AIKJ$ est aussi un parallélogramme puisqu'il est non croisé et a des côtés opposés parallèles et de même longueur (Figure 6). Donc (IK) est parallèle à (AC) et $IJCK$ est aussi un parallélogramme, ce qui permet de conclure.

Troisième méthode : On construit le point K symétrique de J par rapport à I (Figure 7). On a $AKBJ$ parallélogramme à cause des diagonales, ce qui permet de dire que (BK) et (AC) sont parallèles et donc que $KJCB$ est aussi un parallélogramme et la conclusion s'ensuit.

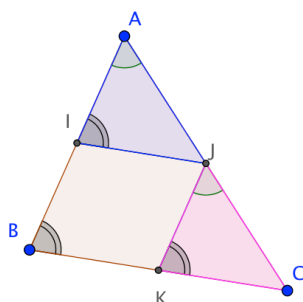


Figure 5

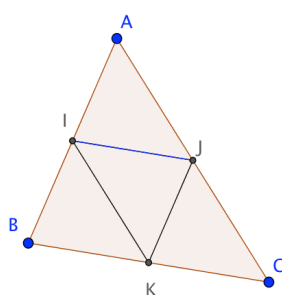


Figure 6

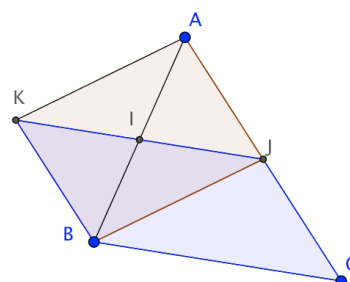


Figure 7

1.2.2. Discussion

Toutes ces démonstrations ont été couramment utilisées dans l'enseignement à un moment ou à un autre et on les trouve dans des manuels. Notons qu'elles nécessitent toutes l'introduction d'un point supplémentaire K , ce qui est une difficulté pour les élèves et exclut pratiquement qu'ils puissent prendre la preuve à leur charge. De plus, la seconde requiert le critère « mal-aimé » pour affirmer que $AIKJ$ est un parallélogramme : avec deux côtés parallèles et égaux, il faut que le quadrilatère soit convexe, ce qu'on peut lire sur la figure à défaut de le démontrer... Enfin, la première utilise des triangles égaux, donc la structure métrique du plan, ce qui n'est pas très logique pour traiter un problème affine.

La preuve par les aires ne nécessite pas l'introduction d'un point supplémentaire. Certes, elle requiert l'apprentissage de la méthode des aires (incorporer les segments dans des surfaces), ce qui demande un apprentissage ou aussi une indication pour les élèves, mais, comme nous le verrons, cette méthode mérite cet investissement, puisqu'elle est universelle : tous les problèmes de nature affine de la géométrie plane peuvent se traiter ainsi.

1.3. Le lemme des proportions et le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès se démontre presque exactement comme le théorème de la droite des milieux, mais en remplaçant le lemme de la médiane par celui des proportions.

1.3.1. Le lemme des proportions

Il s'agit de l'énoncé :

Soit un triangle ABC , et A' un point de $[BC]$, on a

$$\frac{A(AA'B)}{A(AA'C)} = \frac{A'B}{A'C}$$

En effet, les triangles ont même hauteur, donc le rapport des aires est égal à celui des bases.

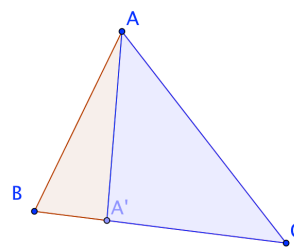


Figure 8

1.3.2. La preuve du théorème de Thalès à l'aide du lemme des proportions

Elle a été donnée comme exercice aux participants de l'atelier :

Prouver le théorème de Thalès (dans la variante triangle) en utilisant les aires. On utilisera les notations suivantes : ABC est un triangle, B' est un point de $[AB]$, C' un point de $[AC]$.

On suppose $(B'C')$ parallèle à (BC) . Montrer qu'on a les égalités :

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}, \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}, \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}; \text{ puis } \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Etudier les réciproques.

Comme indication, nous avons indiqué la stratégie pour traiter ce type d'exercice : transformer les rapports de longueurs en rapports d'aires.

Le ressort de la preuve, comme on l'a dit, est de transformer les rapports de longueur en rapports d'aires. Cela peut presque se faire à l'aveugle, en ajoutant n'importe quel point. Ici, il y a deux choix, nous donnons ici le plus simple (l'autre n'est pas beaucoup plus compliqué, la seule différence étant que certaines aires apparaissent sous forme de sommes).

On montre d'abord $\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}$.

On écrit $\frac{AB'}{BB'} = \frac{A(AB'C')}{A(BB'C')}$ et $\frac{AC'}{CC'} = \frac{A(AC'B')}{A(CC'B')}$.

Il reste à montrer l'égalité $A(BB'C') = A(CC'B')$.

Elle résulte immédiatement du lemme de la parallèle.

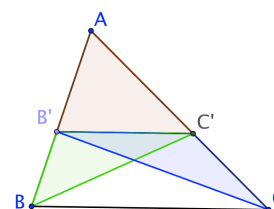


Figure 9

On notera le choix fait ici de montrer la variante de Thalès avec les « petits segments » AB' et $B'B$. Ce choix, qui n'est pas usuel, est celui qui mène à la démonstration la plus simple au sens où il n'y a même pas besoin de découper certaines aires. Pour obtenir les autres formules il y a deux voies.

L'une est algébrique et repose sur la manipulation de fractions. On utilise deux règles de calcul : $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$ d'une part et le fait que l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ d'autre part.

On a donc $\frac{AB}{BB'} = \frac{AB' + BB'}{BB'} = \frac{AB'}{BB'} + 1$ et $\frac{AC}{CC'} = \frac{AC' + CC'}{CC'} = \frac{AC'}{CC'} + 1$. On en déduit $\frac{AB}{BB'} = \frac{AC}{CC'}$ ou, en passant à l'inverse, $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$ soit la troisième égalité. L'inverse de la première égalité donne $\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'}$. On ajoute 1 à nouveau, cela donne $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ soit la deuxième égalité après un nouveau passage par l'inverse.

Ce type de calcul n'est sûrement pas évident pour les collégiens, mais il nous semble que c'est un objectif important de savoir calculer avec les fractions, y compris avec des lettres. On pensera aux difficultés des lycéens, voire des étudiants, sur ce sujet.

L'autre voie est géométrique et consiste à imiter la preuve donnée ci-dessus. Le point de départ est identique, pour calculer un rapport de longueur on le transforme en rapport d'aires par adjonction d'un point. La seule difficulté supplémentaire est qu'il apparaît des sommes d'aires.

Il y a bien d'autres preuves du théorème de Thalès (voir par exemple Perrin, 2006). On en trouvera une dans la partie 3, classique dans l'enseignement des années 50 et 60.

1.4. Des conditions pour faire vivre les preuves par les aires

D'abord, et c'est un point essentiel, les lemmes de la parallèle et des proportions doivent être disponibles. Pour cela, il faut avoir fait des exercices de consolidation, par exemple autour du partage. On en trouvera dans les compléments de la partie 3.

Comme dans le cas de la droite des milieux, il est plus simple d'énoncer le théorème avec les petits segments en premier. Ensuite, il pourra être utile d'explicitier pour les élèves les stratégies utilisées, en commençant par la question : *qu'est-ce qu'on cherche ?* qui mettra en évidence les rapports convoités. Surtout, il faut absolument expliciter la stratégie des preuves par les aires : transformer les rapports de longueurs en rapports d'aires. Cette opération est très simple et quasiment mécanique⁸. En observant les rapports d'aires obtenus on voit qu'il reste à établir une égalité d'aires et en revenant à la figure, on voit que c'est exactement le lemme de la parallèle.

2. Cas d'isométrie et transformations

Un point essentiel tout d'abord : il n'y a pas d'antagonisme entre les deux approches, du point de vue mathématique : les cas d'isométrie sont simplement des critères de *transitivité* des transformations. Sur ce point on pourra se référer à Perrin (2003, 2014b).

En revanche, la difficulté didactique, c'est qu'il semble difficile, voire impossible, de mener les deux approches ensemble et de manière non superficielle au collège. En effet, l'utilisation des cas d'isométrie requiert une pratique non négligeable et c'est encore plus vrai pour les transformations comme nous le verrons. C'est pourquoi il semble nécessaire de choisir entre les deux progressions possibles. L'atelier a essayé de convaincre les participants de l'intérêt de l'approche par les cas d'isométrie.

2.1. Principes pour l'utilisation des cas d'isométrie

Nous avons rappelé aux participants les principes de l'utilisation des cas d'égalité comme outil. L'objectif est de montrer l'égalité de deux longueurs ou de deux angles. La stratégie est simple : on *incorpore* ces éléments dans deux triangles qui semblent visuellement « pareils ». On montre que ces triangles sont isométriques en prouvant que trois de leurs éléments (autres que ceux convoités) sont égaux et on conclut à l'égalité de ceux qu'on cherche.

⁸ Comme on opère sur les signes, on peut la qualifier de sémiotique.

2.2. Deux exercices pour les participants

Nous avons proposé aux participants deux exercices pour lancer la discussion.

Exercice 1. Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte sur (AB) , à l'extérieur du triangle, un point E avec $BE = AB - BC$ et sur (BC) , à l'extérieur du triangle du côté de C , un point D avec $CD = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?

Proposer plusieurs démonstrations en utilisant les triangles isométriques ou les transformations et comparer ces preuves.

Exercice 2. Dans un triangle ABC , les hauteurs BB' et CC' sont égales. Que peut-on dire de ce triangle ?

Proposer au moins quatre preuves du résultat, utilisant notamment les triangles isométriques et les transformations, et comparer ces preuves.

2.2.1. Analyse de l'exercice 1

Si l'exercice est posé ainsi, de manière ouverte et sans figure, le premier travail est de faire une figure en faisant attention aux indications de sens (Figure 10). Ensuite, comme on demande une propriété du triangle ADE on peut penser à isocèle (voire équilatéral). Pour élucider ce point, on peut mesurer les longueurs (si l'on est sur papier) ou les faire afficher (si l'on est sur l'ordinateur). On constate l'égalité $DA = DE$ (mais pas $DA = AE$), de sorte que le triangle ADE est isocèle en D .

Il s'agit maintenant de prouver cette assertion.

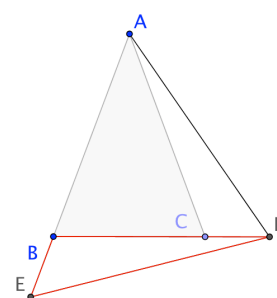


Figure 10

Il y a au moins deux méthodes : en utilisant les cas d'isométrie et en utilisant les transformations.

La preuve par les cas d'isométrie

Le principe est de voir les segments qui nous intéressent, à savoir $[DA]$ et $[DE]$, comme côtés de deux triangles dont on va montrer qu'ils sont isométriques. L'observation de la figure montre les deux triangles pertinents qui sont ACD et DBE . Si on les colorie, on voit les deux triangles comme des surfaces et on imagine bien qu'on va pouvoir transporter l'un sur l'autre. On le voit encore mieux si on fait la figure sur papier et qu'on découpe les triangles.

Pour le prouver, il est prudent de prendre la précaution d'écrire les noms des triangles l'un sous l'autre en faisant se correspondre les sommets homologues. Ici c'est facile car il y a des sommets bien repérables : ceux où l'angle est obtus, c'est-à-dire C pour CDA et B pour DBE . Ensuite on fait par exemple se correspondre les petits côtés qui partent de ces sommets, $[CD]$ et $[BE]$ (et donc les sommets D et E) et enfin les sommets restants A et D . On écrit ainsi les triangles dans l'ordre CDA et DBE . On peut tout aussi bien, après avoir identifié les angles obtus, faire se correspondre les angles les plus petits et écrire les triangles dans l'ordre CAD et BDE . Pour montrer que ces triangles sont isométriques il faut exhiber trois éléments égaux (deux côtés et un angle, deux angles et un côté ou trois côtés). Les hypothèses donnent $CD = BE$ (c'est écrit), puis $BD = BC + CD = AB$, mais AB c'est aussi AC car ABC est isocèle et donc $BD = AC$. Il ne reste plus qu'à prouver l'égalité des angles obtus en C et B (en

n'oubliant pas que le premier cas d'isométrie demande⁹ que l'angle soit celui qui est compris entre les côtés). Mais, l'un et l'autre sont supplémentaires des angles en C et B du triangle isocèle ABC . Ils sont donc égaux. Le premier cas d'isométrie assure que les triangles CDA et BED sont isométriques, donc tous leurs éléments sont égaux, en particulier les côtés non utilisés $DA = DE$ et on a gagné.

Des preuves par les transformations

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations. Partant du principe : « *Qu'est-ce qu'on cherche ?* », il suffit de trouver une isométrie qui transforme $[AD]$ en $[DE]$, voire ACD en DBE . Mais cette transformation n'est pas évidente. Si l'on pense en termes de triangles, en imaginant qu'on les découpe, on voit qu'on passe de ACD à DBE par un déplacement, c'est-à-dire sans retourner le triangle. Comme ce n'est visiblement pas une translation, c'est une rotation. Mais trouver son centre et son angle n'est pas du tout évident.

On change donc notre fusil d'épaule en partant cette fois de « *Qu'est-ce qu'on sait ?* ». On sait que ABC est isocèle en A et, en termes de transformations¹⁰, cela signifie qu'il est invariant par la symétrie s_l d'axe la médiane-médiatrice-hauteur (AH) issue de A . Certes, mais si l'on part par exemple de $[AD]$, il s'envoie sur un segment qui n'est pas encore tracé sur la figure. Qu'à cela ne tienne, traçons le point F symétrique de D par rapport à (AH) . Le segment $[AD]$ est devenu $[AF]$ qu'il faut comparer à $[ED]$.

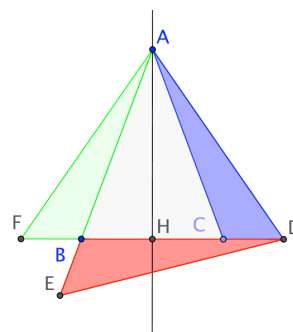


Figure 11

Une nouvelle idée est d'utiliser une autre symétrie axiale et comme on veut envoyer F en E , on peut prendre la symétrie par rapport à la médiatrice¹¹ de $[FE]$. C'est bien, mais il faut aussi envoyer A en D et pour cela il faudrait plutôt prendre la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AD]$. Certes, on voit bien sur la figure que ces deux médiatrices ont l'air égales, mais pourquoi ? Il y a ici une triple difficulté pour des élèves de collège.

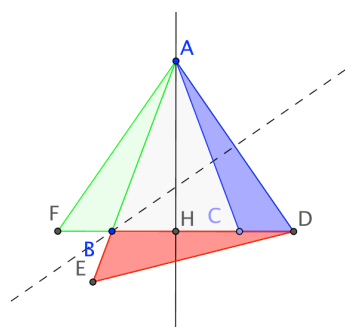


Figure 12

La première c'est qu'ils risquent de sauter à pieds joints par-dessus le problème en pensant que ces deux médiatrices sont évidemment les mêmes. Il faudra déjà les convaincre qu'il y a quelque chose à prouver, ce qui n'est jamais facile.

La deuxième difficulté tient à la preuve elle-même qui nécessite d'utiliser les propriétés de deux triangles isocèles. On note d'abord que FBE est isocèle (car $FB = CD$ par symétrie et $CD = BE$ par hypothèse). La médiatrice de $[FE]$ est donc aussi la bissectrice de l'angle FBE . Il y a ensuite ABD car $AB = BD = BC + CD$. Là encore, la médiatrice est égale à la bissectrice, cette fois de $\widehat{ABD}$, mais comme ces angles sont opposés par le sommet, les

⁹ En réalité ici, comme on a un angle obtus, cette précaution est inutile.

¹⁰ Si l'on est savant, on sait qu'une rotation est composée de deux symétries axiales et cela peut conduire à chercher une symétrie naturelle. Mais ce résultat n'est plus nulle part au collège et au lycée.

¹¹ Le cheminement est repris ici tel qu'il est apparu dans le groupe IREM.

bissectrices sont les mêmes. Mais voilà la troisième raison qui rend ce raisonnement difficile : c'est le mot « bissectrice » qui n'est plus dans les programmes.

En fait, si l'on voulait rédiger cette preuve, il serait plus simple de partir directement de la bissectrice de l'angle en B du triangle ABC et de la symétrie s_2 par rapport à cette droite. Cette symétrie échange les droites (BA) et (BD) et précisément les demi-droites $[BA)$ et $[BD)$ et aussi les demi-droites opposées $[BF)$ et $[BE)$. Il en résulte qu'on a $s_2(F) = E$ (à cause de $BF = BE$) et $s_2(A) = D$ (à cause de $BA = BD$). En définitive, on a $AF = DE$ et, comme $AF = AD$, on a gagné.

La transformation qui fait passer de ACD à DBE est maintenant évidente : c'est la composée¹² des symétries s_2 et s_1 c'est-à-dire une rotation dont le centre est à l'intersection des deux axes de symétrie. Comme ces axes sont deux bissectrices de ABC , cette intersection est le centre du cercle inscrit dans ABC .

On peut imaginer d'autres preuves utilisant les transformations. Par exemple, on peut utiliser la composée d'une rotation et d'une translation (Figure 13). On construit le point M tel que $ACBM$ soit un parallélogramme et le point N de la droite (BC) image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$; la rotation de centre B et d'angle (BE, BC) transforme le triangle BDE en le triangle BMN tandis que la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ transforme ce dernier triangle en le triangle CAD .

Une autre possibilité est de considérer la composée de deux rotations (Figure 14). La première est la rotation r_1 de centre A qui envoie C sur B (elle existe car on a $AC = AB$), la seconde la rotation r_2 de centre B qui envoie A sur D (elle existe car on a $BA = BD$, ce point étant l'une des étapes de la preuve par les cas d'égalité). On considère alors la composée de r_2 et de r_1 (ou simplement on effectue l'une puis l'autre). Elle envoie C sur B et A sur D et on montre qu'elle envoie D sur E .

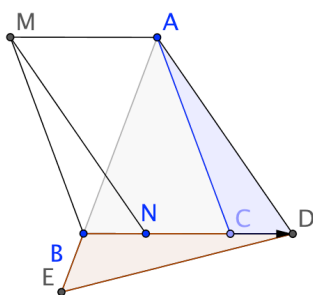


Figure 13

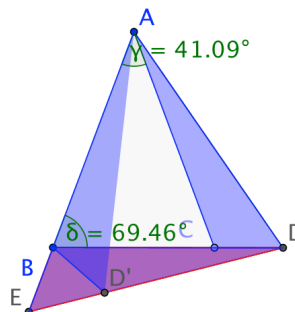


Figure 14

Comparaison des preuves

Si l'on compare les deux premières démonstrations en pensant à leur utilisation au collège, nul doute que celle par les cas d'isométrie apparaît comme bien plus simple et plus intuitive que celle par les symétries.

- Elle est plus visuelle : les triangles, vus comme des surfaces sont bien plus apparents que les droites et les points.
- La preuve par les symétries nécessite une construction supplémentaire (le point F), ce

¹² Bien entendu, ce mot est proscrit au collège et même au lycée.

qui rend presque impossible qu'un élève l'invente tout seul.

- Quelle que soit la variante utilisée, la preuve par les transformations est bien plus difficile à rédiger : qu'on pense à la coïncidence des deux médiatrices, à l'irruption de la bissectrice, aux problèmes de position avec les demi-droites... En revanche, avec les cas d'isométrie, la rédaction est facile : la seule précaution est de bien préciser les sommets homologues.

Les autres preuves par les transformations présentent les mêmes difficultés si on les écrit vraiment (voir la brochure du groupe IREM à paraître pour des détails). Le lecteur scrupuleux qui les écrirait dans les détails se convaincrerait qu'elles ne sont pas à la portée d'un collégien, ne serait-ce que parce qu'on a besoin des angles orientés.

La rédaction de toutes les preuves par les transformations demande de voir des relations fines entre objets géométriques (un point comme intersection de droites, une droite comme définie par deux points, un angle comme défini par des demi-droites) comme nous le verrons plus clairement dans la rédaction de la preuve 4 de l'exercice 2. De plus, dans toutes les preuves par les transformations de cet exercice, on doit en fait montrer les mêmes égalités d'angles ou de longueurs que dans la preuve par les cas d'isométrie.

2.2.2. Analyse de l'exercice 2

On sait que, dans le triangle ABC , les hauteurs BB' et CC' sont égales. Si on fait la figure, on peut conjecturer que le triangle est isocèle.

Preuve n° 1 : Les triangles $AB'B$ et $AC'C$ sont isométriques ce qui permet de conclure $AB = AC$. En effet, ils ont l'angle en A en commun, chacun un angle droit et $CC' = BB'$. Le côté n'est pas compris entre les angles mais on peut conclure avec la somme des angles d'un triangle¹³.

Preuve n° 2 : Les triangles $BB'C$ et $CC'B$ sont isométriques. Ils ont le côté $[BC]$ en commun, deux côtés égaux et un angle droit. L'angle est mal placé mais dans un triangle rectangle, on peut conclure avec l'égalité de deux côtés. On déduit $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

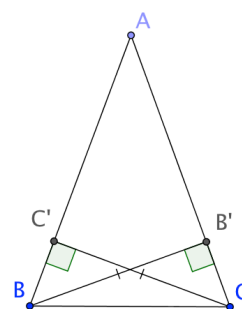


Figure 15

Preuve n° 3 (la plus simple !): On calcule de deux manières l'aire du triangle ABC . On a donc $AB \times CC' = AC \times BB'$. Comme $CC' = BB'$, on en déduit $AB = AC$.

Preuve n° 4 : On montre que le triangle ABC a un axe de symétrie, la médiatrice de $[BC]$, ce qui semble naturel. Cependant, cela revient à montrer que A est sur la médiatrice de $[BC]$; on ne peut donc pas le supposer comme les élèves auront tendance à le faire. Il faut montrer d'abord que B' et C' s'échangent dans cette symétrie. Pour cela il faut voir ces points comme intersections de deux lignes, deuxième grosse difficulté : d'une part, ils sont tous les deux sur le cercle¹⁴ de diamètre $[BC]$ invariant dans la symétrie ; d'autre part, ils sont chacun sur un cercle centré respectivement en B ou en C , de même rayon et ces cercles s'échangent dans la symétrie. B' est à l'intersection de deux de ces cercles et son image est donc à l'intersection des deux cercles images, mais, attention, il y a deux tels points, C' comme attendu, mais aussi son symétrique par rapport à (BC) . Pour conclure il faut un argument de position : le demi-plan limité par (BC) qui contient B' est stable par la symétrie par rapport à la médiatrice de

¹³ Ce qui requiert le postulat d'Euclide, mais ceci est une autre histoire.

¹⁴ Ce point n'est plus traité nulle part au collège.

$[BC]$, troisième difficulté. On en déduit ensuite que la droite (BC') a pour image la droite (CB') dans la symétrie. Ces deux droites se coupent en A qui est donc sur l'axe de symétrie.

La quatrième preuve illustre bien les difficultés de démonstration à l'aide des transformations : il faut voir la figure non comme elle se présente pour un œil naïf mais comme un réseau de lignes et de points en relation : les points permettent de définir les lignes et les lignes permettent de définir les points. C'est tout un apprentissage à construire au long du collège et qui est difficilement opératoire dès l'entrée dans la démonstration.

2.3. Pour conclure

Les cas d'isométrie ont sur les transformations plusieurs avantages qui sont bien apparus dans les exemples ci-dessus.

- Les transformations pertinentes ne sont pas toujours évidentes, ce qui oblige à des constructions supplémentaires.
- Elles sont moins visuelles et la démonstration est plus compliquée à écrire. En particulier, il faut maîtriser les propriétés ensemblistes (voir les points comme intersections de lignes, etc.).
- Pour traiter un problème un peu consistant on a besoin de toute la panoplie des transformations.

Les difficultés des démonstrations dans l'approche par les transformations amènent à réduire la part des démonstrations effectivement réalisées dans le cours et à appauvrir la panoplie des exercices qu'on peut proposer aux élèves du collège.

3. Compléments

3.1. Une autre preuve du théorème de Thalès

Cette preuve est celle qu'on trouvait dans les manuels dans les années 50 et 60.

On montre d'abord que si l'on a des parallèles équidistantes, elles découpent des segments égaux sur toute sécante. On suppose ensuite que le rapport $\frac{AB'}{AB}$ est rationnel, égal à $\frac{p}{q}$ (ici $\frac{3}{5}$) et on montre que c'est aussi le rapport $\frac{AC'}{AC}$.

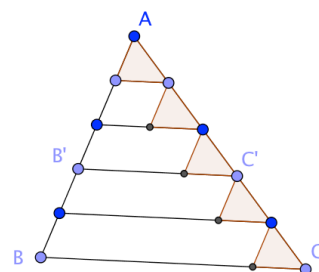


Figure 16

Pour cela on partage $[AB]$ en q parties égales et on trace les parallèles à (BC) par les points de subdivision et les parallèles à (AB) comme sur la figure 16 ci-contre. On a ainsi construit q parallélogrammes et q triangles dont on montre qu'ils sont égaux, ce qui montre que $[AC]$ est partagé en q parties égales et donne la conclusion.

Cette preuve, qui remonte au XVII^e siècle (Arnauld et d'autres) présente plusieurs inconvénients. D'abord, ses auteurs n'avaient manifestement pas compris l'intérêt de la méthode des aires d'Euclide, dont une lecture moderne à la lumière du programme d'Erlangen révèle tout le suc. De plus, il faut encore un raisonnement un peu subtil pour passer d'un rapport rationnel à un rapport réel. Dans la méthode par les aires, ce passage délicat est

dissimulé dans le calcul de l'aire du rectangle¹⁵ (qui donne aussitôt celle du triangle). Alors, mathématiquement c'est un peu la même chose, mais pas du point de vue didactique. En effet, on peut espérer que la formule $\text{base} \times \text{hauteur} / 2$ est bien connue en fin de collège.

3.2. Des exercices pour consolider les lemmes sur les aires mais pas seulement

Exercice 1. On considère un triangle ABC et un point D sur $[AC]$. Comment partager le triangle de manière équitable (c'est-à-dire en deux parties de même aire) par une droite passant par D ?

Si M est le milieu de $[AC]$, la médiane $[BM]$ partage le triangle en deux parties de même aire (lemme de la médiane). Admettons que D soit entre A et M (le raisonnement serait le même dans l'autre cas). Si l'on partage par $[BD]$, le partage est inéquitable ; il manque à l'aire de ABD celle du triangle BDM . On peut donc chercher un triangle de même aire que BDM , de base $[BD]$ et de sommet E sur $[BC]$. Un moyen de l'obtenir est de prendre la parallèle à $[BD]$ passant par M : elle coupe $[BC]$ en E . Le quadrilatère $ADEB$ a bien la même aire que le triangle ABM , soit la moitié de celle du triangle ABC , donc aussi la même que le triangle DCE .

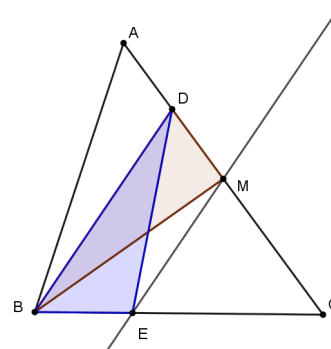


Figure 17

Une autre manière de raisonner est de dire que les triangles DOM et BEO (où O est l'intersection de $[BM]$ et de $[ED]$), doivent avoir la même aire, ce qui correspond au lemme de la parallèle sous la forme « papillon ».

Exercice 2. Il est extrait du manuel Diabolo de 3^{ème}, édition 2008, exercice 64, p. 199. Nous l'avons choisi pour son intérêt pour la formation des maîtres. En effet, il peut être enrichi en faisant varier les données, impliquant aussi une variation des raisonnements, ce qui donne une bonne illustration de la notion de variable didactique et amène les enseignants à réfléchir aux exercices proposés par les manuels, à les comprendre au-delà de ce qui est demandé aux élèves, ce qui donne des pistes pour les transformer avec un objectif d'apprentissage des élèves.

$ABCD$ est un rectangle.

La droite (IJ) est parallèle à la diagonale (BD) .

Les aires des triangles AIC et AJC sont-elles égales ?

La figure est fournie (Figure 18).

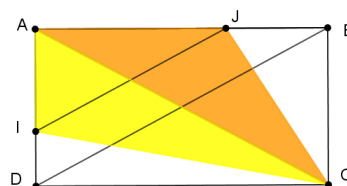


Figure 18

Pour ce calcul, il faut d'abord identifier les données pertinentes sur la figure, les bases $[AI]$ et $[AJ]$ et les hauteurs correspondantes $[CD]$ et $[CB]$ qui sont des côtés du rectangle. C'est une première difficulté car ces hauteurs tombent à l'extérieur des bases. Il faut alors relier AI et AJ aux dimensions du rectangle. Pour cela, il faut oublier les triangles colorés, isoler le triangle ABD et la parallèle $[IJ]$ et appliquer le théorème de Thalès. On déduit

¹⁵ Et une méthode pour échapper à cette difficulté est de postuler dès le début le comportement de l'aire par homothétie, c'est-à-dire par agrandissement-réduction, qui est un objectif fondamental du collège. Voir Perrin (2011) sur ce point.

l'égalité des rapports $\frac{AI}{AD}$ et $\frac{AJ}{AB}$ et donc $AI \cdot AB = AJ \cdot AD$. Il faut encore se servir de l'égalité des côtés opposés du rectangle pour conclure à l'égalité des aires.

Cependant, on peut faire la comparaison des aires sans les calculer en se référant seulement aux rapports (lemme des proportions) : le rapport entre l'aire de ACI et celle de ACD qui ont la même hauteur est égal au rapport des bases $\frac{AI}{AD}$ et le rapport entre l'aire de AJC et celle ABC est égal à $\frac{AJ}{AB}$.

Le théorème de Thalès permet de dire que ces rapports sont égaux ; par ailleurs les aires de ADC et ABC sont égales à la moitié de celle du rectangle, ce qui permet de conclure.

Ce deuxième raisonnement n'utilise pas le fait que les angles du quadrilatère sont droits. Il est donc valable si $ABCD$ est seulement un parallélogramme (Figure 19).

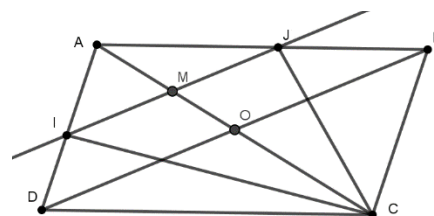


Figure 19

En continuant l'analyse du raisonnement, on voit qu'on n'utilise le partage du quadrilatère en deux que pour la diagonale $[BD]$. Le raisonnement vaut donc aussi pour un « cerf-volant » (Figure 20) où la diagonale $[AC]$ est axe de symétrie. En fait, c'est valable pour une symétrie oblique (Figure 21), mais cet argument n'est pas à la portée des élèves de collège.

Enfin, si le quadrilatère est quelconque (pas nécessairement convexe d'ailleurs) on n'a plus l'égalité des aires, mais seulement l'égalité de rapports : $\frac{A(AIC)}{A(AJC)} = \frac{OD}{OB}$ (Figure 22)

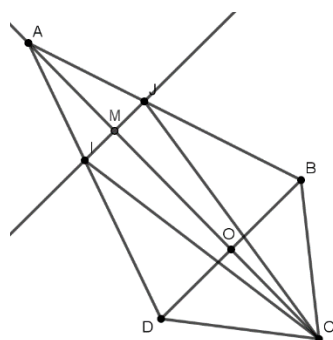


Figure 20

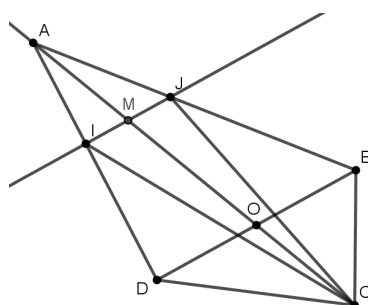


Figure 21

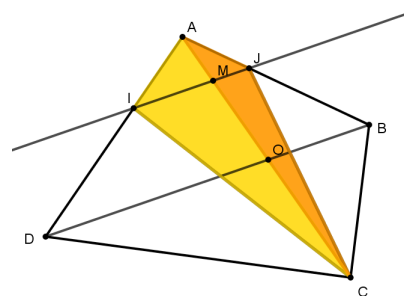


Figure 22

3.3. Quelques exercices de plus pour utiliser les aires comme outil de démonstration

Il s'agit ici de convaincre le lecteur qui ne le serait pas encore de l'efficacité de l'usage des aires pour traiter les problèmes de nature affine (cf. Perrin, 2011 pour des détails). Le signe ¶ indique un exercice plus difficile.

On rappelle la stratégie : transformer les rapports de longueurs (sur une même droite) en rapports d'aires avec le lemme des proportions ou celui du chevron¹⁶ qui fait l'objet du premier exercice.

¹⁶ Celui-là n'est pas dans Euclide.

3.3.1. Lemme du chevron

Soit ABC un triangle, M un point du plan. On suppose que (AM) coupe (BC) en A' différent de B et de C . Montrer qu'on a $\frac{A(ABM)}{A(ACM)} = \frac{A'B}{A'C}$.

3.3.2. Montrer le concours des médianes d'un triangle

Les médianes $[BB']$ et $[CC']$ du triangle ABC se coupent en G et on a $A(GBC) = A(GBA)$ et $A(GBC) = A(GCA)$ par le lemme du chevron. On en déduit $A(GBA) = A(GCA)$ qui montre que G est sur la médiane $[AA']$. Cette preuve du concours des médianes est sans doute la plus simple qui soit.

3.3.3. Ménélaiüs ¶

Soit ABC un triangle. Une droite ne passant pas par les sommets coupe respectivement (BC) , (CA) et (AB) en A' , B' , C' . Montrer l'égalité : $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$. Réciproque ?

On utilise la stratégie en écrivant $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A(C'A'B)}{A(C'A'C)}$.

La réciproque se démontre avec le sens direct, mais, attention, comme le théorème est énoncé avec des longueurs et pas des mesures algébriques, il vaut mieux réfléchir.¹⁷

3.3.4. Céva ¶

Soit ABC un triangle et M un point du plan non situé sur les côtés du triangle. Les droites (AM) , (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés (BC) , (CA) et (AB) en A' , B' , C' .

Montrer l'égalité : $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$. Réciproque ? (Attention, il y a un double piège ...)

3.3.5. Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ? Même question avec $AMCD$, AMB et BMC .

Remarquons que le professeur qui a en tête le programme d'Erlangen a un temps d'avance sur les élèves car il sait qu'on peut se ramener au cas où $ABCD$ est un carré.

3.3.6. Exercice ¶

Soit ABC un triangle et soit I (resp. J , K) le point situé au tiers de $[BC]$ du côté de B (resp. de $[CA]$ du côté de C , de $[AB]$ du côté de A). On appelle E , F , G les points d'intersection de (BJ) et (CK) , (CK) et (AI) , (AI) et (BJ) respectivement. On pose $T = A(ABC)$, $a = A(AEF)$, $b = A(BFG)$, $c = A(CGE)$ et $t = A(EFG)$.

Montrer les formules $t + c = 2b$, $t + a = 2c$, $t + b = 2a$. En déduire qu'on a $a = b = c = t$ (on pourra supposer, par exemple, $a \leq b$). Calculer t en fonction de T .

Le chevron et les proportions font l'affaire, avec une manipulation algébrique un peu astucieuse (on peut penser à supposer $a < b$ ou à faire des sommes d'égalités)¹⁸.

¹⁷ On pourra consulter <https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Menelaus.pdf> pour plus de précisions.

¹⁸ Avec Erlangen on peut se ramener au cas équilatéral, plus facile.

Références bibliographiques

- Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.
- Groupe géométrie de l'IREM de Paris (à paraître). *Géométrie au cycle 4*. IREM de Paris.
- Kahane, J.-P. (dir.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.
- Klein, F. (1974, 1^{ère} édition 1872). *Le programme d'Erlangen*, Paris : Jacques Gabay.
- Perrin, D. (2003). Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations, *Repères IREM*, 53, 91-110.
- Perrin, D. (2006). Autour du théorème de Thales. *Conférence à l'IREM de Paris*. <https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf>
- Perrin, D. (2011). *Mathématiques d'école*. Paris : Cassini.
- Perrin, D. (2014a). Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Les invariants de la géométrie projective linéaire. <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie2.pdf>
- Perrin, D. (2014b). Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface. <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf>
- Perrin, D. (à paraître). L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Une version préliminaire est disponible à l'url : <https://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/CorfemDP.pdf>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2001). Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aux objets géométriques. *Journée IREM-APMEP-IUFM-CRDP sur la géométrie en primaire*. Lille : CRDP Nord-Pas-de-Calais. Disponible sur HAL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428982>
- Perrin-Glorian M.-J. & Godin M. (à paraître). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Une version préliminaire est en ligne <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837>