Initier au raisonnement dans le secondaire : intentions et realites

Christine CHOQUET, Sylvie GRAU

Résumé
Les professeurs de mathématiques, débutants ou expérimentés, mettent en place dans des classes de collège et de lycée des situations destinées à initier les élèves au raisonnement et à la preuve, notamment en lien avec les instructions officielles (MEN 2016) qui préconisent de développer chez tous les élèves la compétence « raisonner ». Nous proposons dans l'atelier d'étudier certaines de ces situations. Il s'agira, en lien avec le thème 1 du colloque, de comprendre comment la justification et le raisonnement sont abordés.

Nous allons nous appuyer sur un corpus (documents distribués aux élèves, déroulement des séances, productions des élèves ainsi que intentions d'enseignement des enseignants recueillies lors d'entretiens) que nous avons analysé dans le cadre de la formation initiale en Master MEEF[1] 2D (Choquet, 2019), d'une formation continue et d'une thèse (Grau, 2017). Nos analyses se situent dans deux cadres théoriques que nous allons préciser : l'apprentissage par problématisation (Fabre et Orange, 1997) et la double approche didactique et ergonomique en termes d'adaptations des connaissances (Robert, 2008). Nous proposons dans un premier temps une analyse *a priori* de ces situations, et une discussion de leur pertinence au regard des savoirs et compétences mathématiques en jeu. Nous exposons ensuite notre analyse en lien avec les deux cadres théoriques choisis. Tout au long de notre texte, nous examinons ces résultats selon divers axes : les attentes institutionnelles, les cadres théoriques de recherche, leur utilisation en formation initiale et/ou continue. Nous tentons ainsi de détacher des éléments de problématisation du rôle du raisonnement, de la preuve et de la démonstration dans l'activité mathématique scolaire.

Le premier problème que nous appellerons le « problème des angles » a été proposé comme problème ouvert par un professeur-stagiaire dans une classe de 5ème (élèves de 12-13 ans) et analysé collectivement dans le cadre de la formation initiale en Master MEEF 2D. Le second problème « la piscine » a été proposé à une classe de 4ème comme une tâche complexe par un professeur de mathématiques et son analyse a été menée dans le cadre d'une formation continue avec une focale sur l'élaboration d'une échelle descriptive permettant d'évaluer les compétences *raisonner* et *chercher*. Le troisième problème « pression-température » a fait l'objet d'une ingénierie didactique en classe de seconde dans le cadre d'une thèse portant sur l'enseignement problématisé des fonctions affines. (Les énoncés des problèmes sont disponibles en annexe).

Dans les trois cas, l'objectif est bien d'initier au raisonnement mais qu'en est-il en réalité ? Quels sont les apprentissages réels ?

L'analyse *a priori* des problèmes doit amener quelques éléments de réponse en permettant de repérer les difficultés ou obstacles que les élèves vont rencontrer et en précisant les étayages permettant de les dépasser. Nous proposons la grille d'analyse suivante :

- Quelles sont les procédures de résolution possibles et envisageables pour les élèves ?
- Quelles compétences doivent être mises en jeu par l'élève ?
- Quels critères permettent à l'élève de savoir s'il a réussi ?

---

[1] Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation, Second degré.

- Quelles conceptions erronées peuvent apparaître ?
- Quelles sont les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer ?
- Quelles sont les variables pédagogiques sur lesquelles on peut agir ?

Cette analyse doit permettre de repérer les prérequis nécessaires pour entrer dans la tâche, les apports qu'il s'agit, au cours des séances, d'institutionnaliser, les aides à prévoir pour permettre à l'élève de réellement mobiliser les compétences que l'enseignant souhaite développer. Dans le chapitre suivant, nous ne donnerons que quelques éléments de cette analyse pour nous focaliser sur la question de l'initiation au raisonnement.

Analyse *a priori* de trois situations

Le problème des angles

Dans le problème des angles, la procédure attendue est l'utilisation des propriétés des angles pour calculer la mesure de l'angle et non une mesure sur la figure. Plusieurs propriétés peuvent être utilisées et à ce niveau de la scolarité, toutes sont censées avoir été étudiées. La difficulté est donc dans le choix des propriétés, choix qui est lié à la manière dont l'élève va analyser la figure. Globalement on peut identifier deux méthodes : penser les angles dans des triangles ou penser les angles par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires. Dans les deux cas, la nécessité d'ajouter des objets dans la figure initiale ne doit pas être un obstacle. Le raisonnement s'appuie donc sur une manière de compléter la figure pour faire apparaître des formes prototypiques connues (triangles, triangles rectangles, droites parallèles).

La variable didactique est principalement l'emplacement choisi pour les points faisant apparaître ou non des alignements ou des perpendicularités. Une autre variable est le choix des mesures données. Ici des valeurs simples entières et non prototypiques comme 30°, 60° ou 45° doivent permettre de calculer mentalement et d'avoir une estimation du résultat permettant de contrôler le travail.

Les élèves peuvent vérifier leur résultat par estimation, tracé ou utilisation d'une autre méthode de calcul. La mise au travail en groupe peut permettre de comparer les procédures et donc d'invalider certains résultats. La consigne ne précise pas si une justification est attendue et sous quelle forme. Implicitement, il semble que des résultats différents sont attendus afin de susciter un débat entre les élèves et de les engager vers la nécessité d'une argumentation autrement dit vers la preuve. En revanche, il est clair que si les élèves trouvent tous le même résultat, l'enseignant ne pourra pas inciter les élèves à expliciter leur raisonnement ni à prouver leur réponse.

Le problème de la piscine

Le problème de la piscine a les caractéristiques d'un problème complexe en ce sens qu'il est contextualisé, qu'il s'appuie sur des données de la vie courante sous différentes formes (schéma, graphiques, tableaux, textes, message), qu'il a plusieurs solutions, que chaque solution est fonction de la modélisation et des hypothèses de travail choisies. Il s'approche des problèmes ouverts ou encore des problèmes dédiés à des tâches à prise d'initiative (MEN 2016) en ce sens où il s'agit pour l'élève de se lancer dans une démarche personnelle et d'effectuer certains traitements pour construire peu à peu le problème.

Une première difficulté réside dans la planification de sous-problèmes qui suppose d'avoir pris en compte l'ensemble des informations pour les organiser en fonction de sous-questions (quantité de carrelage nécessaire, disponible, temps de travail nécessaire, etc.). Il s'agirait pour l'enseignant de penser un étayage permettant à l'élève de se lancer dans cette planification et non de lui donner directement à résoudre des sous-problèmes ou une liste d'étapes.

Les connaissances à mobiliser sont normalement acquises par les élèves à ce stade de leur scolarité mais des difficultés peuvent demeurer avec les opérations sur les fractions, et sur la modélisation par la proportionnalité.

Les supports visuels permettent de se représenter la situation, en particulier la photographie de la piscine permet de visualiser la forme géométrique de la piscine et d'engager plus facilement une modélisation.

La principale variable didactique est le choix des nombres que ce soit pour les quantités de carrelage ou le rythme de travail des ouvriers. Les dimensions de la piscine et la dimension des carreaux ne doivent pas faire obstacle à la modélisation du problème. Les valeurs doivent permettre des réponses différentes toutes cohérentes pour amener les élèves à débattre et à prouver.

La contextualisation peut pourtant gêner les élèves ayant une expérience du travail de carreleur. Il est difficile de parler de rythme régulier de travail, de penser quatre personnes travaillant ensemble sur la même surface à carreler, de négliger la question des coupes ou des joints qui peut largement augmenter le temps de pose. Le problème est un problème de prise de décision. La réponse peut prendre en compte des éléments mathématiques mais d'autres critères, liés à la situation réelle et négligés dans la présentation de la situation, sont à prendre en compte. Quels arguments faut-il attendre dans ce cas ?

Le problème pression-température

Dans ce problème, le paradoxe est que trois tableaux donnent les mêmes mesures de pression et de température, pourtant un tableau est un tableau de proportionnalité alors que les deux autres non étant donné que l'unité de mesure des températures est différente.

La première difficulté réside à faire la différence entre nombres et mesures. Ici la relation de proportionnalité peut être affirmée malgré des écarts sur les nombres du fait des imprécisions de mesures. Les élèves doivent inhiber des procédures automatisées sur la proportionnalité dans les tableaux pour regarder autrement les données et s'intéresser aux variations. Les élèves n'ont donc pas toutes les connaissances disponibles pour résoudre le problème. On peut considérer qu'il s'agit d'une situation-problème (au sens de Douady).

Les variables didactiques sont les valeurs numériques choisies. Elles doivent permettre de conclure à la proportionnalité dans le cas des Kelvins et permettre des comparaisons de variations en utilisant les propriétés de linéarité.

La mise en œuvre nécessite la confrontation entre groupe ayant des données différentes pour amener les élèves à expliciter les choix de procédures et à formaliser les essais.

Le contexte scientifique peut être un obstacle pour les élèves qui estiment ne pas avoir les connaissances nécessaires pour résoudre le problème. Une vidéo de l'expérience et un étayage pour amener les changements de cadres peuvent être nécessaires.

Deux cadres théoriques pour analyser ces situations

La double approche didactique et ergonomique (Robert, 2008)

Le cadre de la double approche considère **trois grands niveaux d'analyse des activités** :

Un niveau ***global*** d'analyse qui s'intéresse à la dynamique globale proposée aux élèves entre cours, exercices et problèmes, à l'étude de la dialectique outil/objet observée ainsi qu'à la construction avec la classe puis à l'exposition et l'institutionnalisation des connaissances étudiées pendant les séquences.

L'analyse *a priori* des tâches proposées. Les tâches sont caractérisées ici par les mises en fonctionnement des connaissances anciennes ou nouvelles des élèves. Pour chaque énoncé, l'analyse consiste à repérer les adaptations que les élèves auront à faire des leurs connaissances, les adaptations que l'on peut prévoir pour une classe donnée. Elles sont répertoriées dans la grille qui suit de A1 à A7, il s'agit :

A1 : de reconnaissances des modalités d'application des connaissances (suite à la lecture/découverte de l'énoncé)

A2 : d'une introduction d'intermédiaires (de nouveaux points sur une figure, une lettre dans un calcul algébrique, etc.)

A3 : de mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue

A4 : d'introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) imposée ou non par la situation

A5 : de l'utilisation de questions précédentes dans un problème

A6 : de l'existence de choix (pour les élèves en termes de procédures)

A7 : d'un manque de connaissances nouvelles pour résoudre le problème.

Le repérage et questionnement des conditions de travail des élèves. Celles-ci peuvent être déduites des déroulements provoqués par l'enseignant en lien avec la durée du travail des élèves selon les différentes tâches, la nature de l'activité demandée aux élèves par l'enseignant ainsi que les régulations et interactions lors des séances (verbalisations demandées aux élèves, nature des validations données au élèves, explications et aides données tout au long du travail, etc.).

Nous avons choisi **pour cet atelier d'analyser *a priori* une situation en termes d'activités et d'adaptation des connaissances des élèves.** Ce travail permet de révéler les activités possibles, envisageables des élèves d'une classe donnée.
Les séances observées sont ordinaires et tous les élèves ne maitrisent pas les mêmes savoirs et le même niveau de compétences. Le cadre d'analyse permet de faire la différence entre ce qu'un élève peut au minimum produire face à l'énoncé de problème en fonction de son engagement personnel dans la tâche et de ses difficultés (cela constitue **l'activité prévue *a minima*)** et ce qu'un élève peut au mieux produire (cela constitue **l'activité prévue *a maxima***).

La problématisation (Fabre & Orange, 1997)

Le cadre de la problématisation s'intéresse à la construction des problèmes et non seulement à leur résolution. L'idée principale est de considérer la construction d'un problème comme la circulation des idées entre quatre pôles que sont la question, la solution, les données et les conditions. Ces quatre pôles peuvent être schématisés sous la forme d'un losange (Schéma 1 ci-après).

Dans ce losange, on trouve sur une diagonale le problème et la solution et sur l'autre les contraintes liées au problème : d'une part les contraintes externes au sujet que sont les données, et d'autre part les contraintes internes au sujet que sont les conditions, c'est-à-dire les connaissances, expériences, savoir-faire, compétences de l'individu, qui vont lui permettre de traiter les données. L'activité de l'individu peut l'amener à produire de nouvelles données ou de nouvelles conditions, ce qui signifie que ce losange n'est pas figé, il peut être différent d'un élève à un autre et même pour un même élève, il diffère à chaque étape de la recherche. En tout état de cause, il y a peu de chance pour que les élèves construisent le même problème que celui que l'enseignant a construit pour son projet d'enseignement. L'analyse *a priori* doit permettre de mesurer les écarts possibles entre ces différents problèmes et leur adéquation avec le problème initial de l'enseignant.

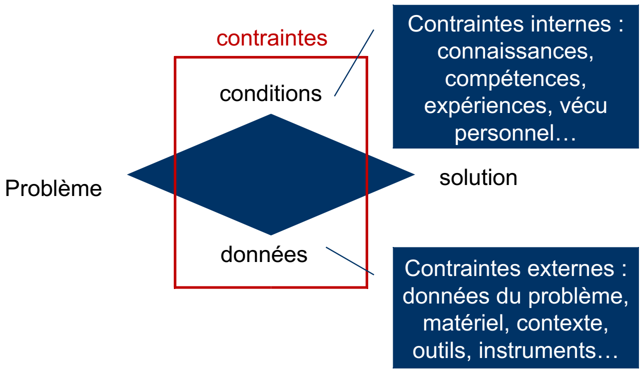


Schéma 1: Losange de problématisation

L'activité de l'individu peut l'amener à produire de nouvelles données ou de nouvelles conditions, ce qui signifie que ce losange n'est pas figé, il peut être différent d'un élève à un autre et même pour un même élève, il diffère à chaque étape de la recherche. En tout état de cause, il y a peu de chance pour que les élèves construisent le même problème que celui que l'enseignant a construit pour son projet d'enseignement. L'analyse *a priori* doit permettre de mesurer les écarts possibles entre ces différents problèmes et leur adéquation avec le problème initial de l'enseignant.

Trois registres de la problématisation peuvent être mis en évidence :

- Le *registre empirique* est celui des faits observés, des résultats d'expériences, des données produites, de ce qui a été effectivement fait ou perçu.
- Le *registre des modèles* est celui des idées, des explications imaginées, des connaissances disponibles.
- Le *registre explicatif* noté REX, est l'ensemble des théories construites, des conventions, des cadres qui peuvent relever de trois mondes (le scientifique, le social et le culturel). Ici le REX attendu est un cadre mathématique (au sens de Douady), c'est-à-dire un ensemble de propriétés, de conventions et de traitements correspondant à un grand domaine mathématique. Mais suivant le contexte, d'autres cadres peuvent

intervenir.

L'apprentissage sera stable et les connaissances disponibles si l'élève arrive à configurer ces différents registres, à être convaincu d'une cohérence, d'un lien logique entre eux.

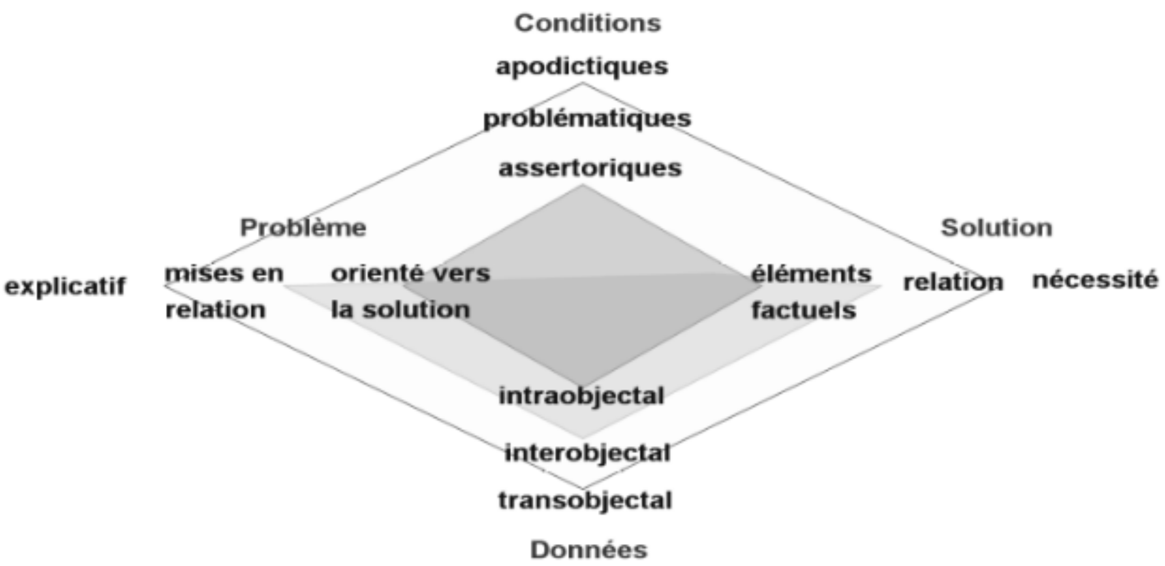


Schéma 2: Niveaux de problématisation

Pour analyser l'activité de l'élève, on peut penser trois niveaux pour chaque pôle du losange (Schéma 2 ci-dessus) :

Le problème peut être orienté vers la solution, la résolution réside alors en un traitement. Il peut être un problème de mises en relation et donc amener une certaine modélisation par comparaison. Il peut encore être un problème explicatif. Les solutions peuvent être des éléments factuels, des relations ou des nécessités (ce qui fait que la solution est ce qu'elle est et ne peut pas être autre chose). Pour les données, le traitement peut se faire de manière intra-objectale, un seul élément porte le sens et sert à la résolution ; de manière inter-objectale, plusieurs éléments mis en relation permettent de porter le sens et de faire des inférences ou de créer de nouvelles données ou de manière trans-objectale, une idée générale est porteuse du sens et sert à interpréter les données. Enfin pour les conditions, elles peuvent être assertoriques (éléments du cours, propriétés admises), problématiques (ouvrir sur de nouvelles hypothèses) ou apodictiques (tenir compte de nécessités explicites). Problématiser suppose donc un processus pendant lequel différents pôles sont mobilisés amenant à déformer le losange et cet outil permet de visualiser le processus à chaque étape de la résolution d'un problème.

Analyse *a priori* des situations dans ces deux cadres théoriques

Le problème des angles

Le repérage *a priori* des adaptations des connaissances des élèves est le suivant :

La figure suggère aux élèves des calculs de mesure d'angles, il existe donc une reconnaissance La reconnaissance des modalités d'application des connaissances (A1).

Une introduction d'intermédiaires est envisageable des élèves, il y a des possibilités de prolonger des droites, d'introduire de nouveaux points (A2)

Deux cadres sont mobilisés, les cadres géométrique et numérique (A3)

L'introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) est imposée par la situation (A4)

Un choix existe dans l'utilisation des propriétés sur les mesures des angles (A6)

Les élèves disposent ici de toutes les propriétés et définitions nécessaires, il n'y a donc pas de manque de connaissances nouvelles (A7).

Un élève pourra *a minima* mesurer sur la figure, effectuer quelques tracés (de triangles) ou calculer quelques mesures d'angles. *A maxima*, un élève fera apparaitre les tracés utiles ainsi que l'organisation explicitée des calculs de mesures d'angles pour aboutir à 27°.

Du point de vue de la problématisation, il s'agit d'un problème orienté vers la solution qui a attend comme réponse un élément factuel : la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$. Le traitement des données demande un traitement inter-objectal car il est nécessaire de mettre en relation les informations pour inférer de nouvelles données. Le raisonnement s'appuie sur des conditions assertoriques (propriétés, définitions, théorèmes) que l'on peut alors lister : angles complémentaires, supplémentaires, angles alternes-internes, angles correspondants, somme des angles dans un triangle, mesure d'un angle plat mais aussi sur des conditions problématiques qui suppose de prendre des initiatives : on peut prolonger les tracés, on peut relier des points pour obtenir des figures connues. Le REX est le cadre des mesures d'angle, on est purement dans un cadre mathématique (les grandeurs et mesures).

L'initiation au raisonnement dans ce problème relève donc de la disponibilité de certaines connaissances et de l'anticipation qui permet de prévoir ce qu'on va obtenir en traçant tel ou tel objet. On peut alors, afin de l'engager dans le processus de raisonnement, s'interroger sur des moyens d'amener un élève à faire appel aux connaissances nécessaires et lui permettre d'inhiber certains automatismes pour qu'il s'autorise à tester plusieurs pistes.

Le problème de la piscine

Du point de vue des adaptations des connaissances des élèves, on peut lister :

La reconnaissance des modalités d'application des connaissances puisque la situation suggère un calcul d'aire ou de volume (de la piscine) ou un calcul de la quantité de carreaux disponibles (A1)

L'introduction d'intermédiaires peut être envisagée des élèves comme un schéma représentant ou modélisant la piscine, des lettres pour faciliter l'écriture des calculs, etc. (A2)

Des mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue, les cadres numérique et géométrique pouvant être imbriqués (A3)

L'introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) imposée par la situation (A4)

L'existence de choix notamment dans l'organisation de l'utilisation des savoirs sur les fractions, les nombres décimaux, le calcul d'aire (A6)

En revanche, la recherche/résolution ne nécessite pas de connaissances nouvelles (A7)

Un élève pourra *a minima* tenter de calculer l'aire à carreler ou représenter la piscine. *A maxima*, un élève proposera l'organisation explicitée de calculs et aboutira à la réponse attendue (26 m² et oui en 1 journée).

Du point de vue de la problématisation, il s'agit d'un problème de mise en relation dont la solution est une nécessité. Les données doivent être traitées de manière inter-objectale pour permettre la prise en compte des différentes contraintes. Cependant certaines conditions sont problématiques car elles ne relèvent pas toutes de connaissances assertoriques comme, la mesure de l'aire des faces d'un parallélépipède rectangle, les règles de calcul sur les fractions, ou les comparaisons des fractions à l'unité. Les élèves doivent donc faire des hypothèses en particulier s'ils choisissent d'utiliser le modèle de la proportionnalité pour traiter certaines données.

Le REX peut aussi faire appel au cadre professionnel du métier de carreleur et non seulement au cadre mathématique des grandeurs proportionnelles.

En fait le problème comporte différents sous-problèmes :

- Combien de temps leur faut-il à eux quatre pour faire la piscine ?
- Combien mesure la surface à carreler ?
- Auront-ils 4 cartons pleins lorsque Pierre Dupont apportera le reste de carreaux ?
- Devront-ils attendre Pierre Dupont pour terminer ?

L'initiation au raisonnement porte ici sur la nécessité de faire des hypothèses pour traiter les données et la planification.

Le problème température-pression

Du point de vue des adaptations, on peut identifier :

La reconnaissance des modalités d'application des connaissances puisque la situation suggère la mesure de grandeurs et la mobilisation de la proportionnalité (A1)

L'introduction d'intermédiaires comme le recours à un graphique, un tableau, au tableur (A2)

Des mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue en particulier, le cadre numérique, le cadre de la mesure des grandeurs et le cadre fonctionnel (A3)

L'introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) imposée par la situation (A4)

L'utilisation de questions précédentes dans la recherche/résolution du problème (A5)

L'existence d'un choix dans la mobilisation des différents registres (tableau, graphique, calcul) (A6)

Pas de manque de connaissances nouvelles (A7)

Un élève pourra *a minima* vérifier par des calculs s'il est face à une relation de proportionnalité ou non et un élève pourra *a maxima* repérer une fonction affine et tenter le calcul des coefficients.

Pour ce qui est de la problématisation, il s'agit d'un problème explicatif qui s'appuie sur des connaissances assertoriques et qui nécessite de traiter les données de manière inter-objectale pour obtenir une solution qui est une nécessité. Le REX peut être le cadre mathématique des grandeurs proportionnelles mais il peut aussi être celui des mesures en sciences physiques. L'occasion ici est de montrer aux élèves comment la conversion d'un cadre à l'autre permet des traitements qui sinon seraient impossibles à réaliser.

Retour sur l'activité, analyse *a posteriori*

Problème des angles

Les élèves ont utilisé trois procédures différentes (Annexe 4). Certains éléments ont été ajoutés aux productions pour expliciter la procédure car le document ne garde pas toujours la trace de l'ordre dans lequel les calculs et les tracés ont été effectués. Aucun élève n'a utilisé le tracé de droites parallèles. On peut faire l'hypothèse que le REX mobilisé est le cadre géométrique mais d'objets de dimension 2. Les élèves cherchent à obtenir des figures (ici des triangles) et non des droites. Une piste peut être d'amener les élèves à travailler les changements de dimension pour apprendre à raisonner sur les figures en dimension 0 (raisonnement sur les points), en dimension 1 (raisonnement sur les lignes) ou en dimension 2 (raisonnement sur les surfaces). Le bilan proposé par l'enseignante reprend les deux procédures en listant les conditions qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème. Dans le cadre de la problématisation, il aurait été bénéfique de faire apparaître les nécessités qui appellent ces conditions et amener d'autres possibles pour enrichir le répertoire des élèves. Du point de vue de l'initiation au raisonnement, le bilan de fait pas état d'une quelconque institutionnalisation. La situation ne rend pas la preuve nécessaire, ni l'argumentation puisque les élèves ont le même résultat et sont donc convaincus qu'il est valide.

Un groupe a cependant tracé une perpendiculaire mais la place particulière des points sur la figure donnée a fait que les élèves ont considéré les points A, C et E comme alignés. On a ici un obstacle lié à la géométrie perceptive que l'enseignante ne semble pas avoir identifié au moment de la mise en commun. Comme au final cette erreur se compense, les élèves trouvent le bon résultat. Il aurait été possible de partir de ce cas pour essayer de formaliser une propriété générale. Même si cette propriété n'est pas expressément au programme, sa formalisation peut être une occasion intéressante de comprendre comment naît une nouvelle connaissance au sein des mathématiques.

Le problème de la piscine

Les productions des élèves montrent un soin apporté à la rédaction de leur procédure et à la présentation des étapes (Un exemple en annexe 6). Nous allons surtout nous attarder sur l'échelle descriptive élaborée par l'enseignante (Annexe 2) car cette échelle présente ses critères de validation pour la compétence raisonner. Il s'avère que tous reviennent à évaluer l'investissement au sein du groupe. Un élève peut donc être évalué positivement par rapport à cette compétence en ayant fait des erreurs de raisonnement, ou en n'ayant pas raisonné du tout puisque la très bonne maîtrise suppose de prendre des initiatives (bonnes ou mauvaises), d'être un élément moteur (donc une position de leader) et d'aider les autres (suppose de ne pas avoir travaillé de manière solitaire). Par contre dans les critères d'évaluation de la compétence « chercher » apparaît la capacité à décomposer un problème en sous-problèmes mais le second critère est la résolution. Le cadre de la problématisation permet de comprendre en quoi amener l'élève à ne penser que sur l'axe de la résolution ne lui permet pas d'apprendre à construire le problème, c'est-à-dire à réaliser en quoi ses représentations et le cadre dans lequel il travaille induisent les traitements et les connaissances mobilités.

Le problème pression-température

Ici nous avons un enregistrement des échanges langagiers entre les élèves. L'analyse permet de repérer ce qui peut devenir un obstacle pour les élèves. Par exemple dans les arguments exposés par les élèves dans le tableau ci-dessous, on peut identifier les interprétations dans les modèles que les élèves utilisent. Cet extrait montre que les registres langagiers mobilisés sont insuffisants pour permettre aux élèves de communiquer efficacement.

Arguments exposés par les élèves	Interprétation dans les modèles mobilisés
A1 : (Adrien) 1 degré Celsius équivaut pas à 1 degré Kelvin	Un même nombre ne mesure pas la même grandeur suivant l'unité.
A2 : (Lucie) On multiplie par je sais plus combien pour trouver en Fahrenheit	Suppose une conversion par proportionnalité d'une unité à l'autre.
A3 : (Adrien) c'est un chiffre approximatif	« chiffre » désigne le coefficient de proportionnalité. Un coefficient de proportionnalité serait un entier.
A4:(Adrien) 1 degré Kelvin est égal à… un tout petit peu moins de 3hPa	Il existe une relation entre la température en K et la pression en hPa : 1 K → 3 hPa

A5 : (Adrien) 1°F n'est pas égal à 1°K et n'est pas égal à 1°C.	Reprise de l'argument 1 pour les degrés Fahrenheit.
A6 : (Adrien) Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnels entre eux.	La conversion entre les deux unités n'est pas une relation de proportionnalité.

Certains extraits montrent la difficulté à formaliser les raisonnements qui pourtant peuvent être exprimé mathématiquement. En fait le manque de vocabulaire et de symboles ne permet pas aux élèves de débattre ni de rédiger leur raisonnement. D'ailleurs au moment de laisser une trace écrite, les critères de validation énoncés par les élèves sont des critères de forme (présentation, écriture, orthographe, notations, phrases, formules). Il faut l'intervention de l'enseignant pour préciser que l'attente est du côté de la preuve, de l'explication, de la démonstration ce que les élèves traduisent après son passage en disant « il faut montrer qu'on est intelligent ».

Formulation des élèves de seconde	Mise en forme mathématique des propriétés utilisées
R7 : (Adrien) Si on dit que l'un n'est pas proportionnel à l'autre et ensuite on dit que Celsius et Fahrenheit n'est pas proportionnel à hectopascals	Transitivité de la relation de proportionnalité $\forall x, y, z \in E \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$
R7 reformulé par Aurélie ça c'est pas égal à ça, c'est pas égal à ça donc ça c'est pas égal à ça	« égalité » désigne toute relation entre deux éléments.
R8 : (Adrien) 1 n'est pas égal à 2 et 2 n'est pas égal à 1 et pourtant 1 est égal à 1	Non transitivité de l'égalité $\exists x, y, z \in E \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \wedge \neg(x\mathcal{R}z).$

Conclusion

Les trois situations montrent une intention commune qui est d'apprendre à raisonner mais la réalité des mises en œuvre est très différente d'une situation à l'autre. Pour le problème des angles, l'institutionnalisation ne met pas en évidence les raisonnements, pour le problème de la piscine seules les attitudes sont visées et pour le problème pression-température, l'écart entre les raisonnements que l'on peut identifier à l'oral et les traces écrites montre la difficulté que les élèves peuvent avoir à formaliser leur pensée.

Nous retenons de cette analyse quelques principes à retenir.

Il est important de savoir analyser *a priori* les situations proposées pour savoir quels raisonnements sont attendus et non seulement les procédures ou résultats. Il est nécessaire d'expliciter le contrat didactique et le but de l'activité : que souhaite-t-on observer, évaluer, travailler ? Cela suppose aussi de définir et d'expliciter aux élèves les critères de validation des productions. Il est nécessaire aussi d'expliciter le REX mobilisé (Travaille-t-on en mathématiques, en sciences ? Quels autres registres théoriques peuvent empêcher l'avancée du travail ?).

Si les élèves sont amenés à échanger entre eux, et dès qu'ils vont devoir formaliser à l'écrit, il est nécessaire de leur donner les éléments langagiers nécessaires et qui peuvent leur faire défaut comme le vocabulaire adapté, les signes mathématiques, les codages usuels, etc.

Les résultats des analyses présentés dans cet atelier et notre travail plus global de recherche mené sur ce sujet montre que pour ce qui concerne les énoncés proposés, les problèmes explicatifs sont de bonnes situations pour rendre nécessaire l'explicitation des raisonnements. Par ailleurs, si le travail est effectué en groupes, il apparaît également qu'il est utile de définir des rôles pour montrer les différentes étapes du raisonnement et les différentes postures qu'il faut prendre lors de ces différentes étapes (chercher, évaluer, questionner, effectuer des traitements, etc.).

D'autres pistes ne doivent pas être négligées comme former les élèves à réfléchir sur des situations qui ne les encouragent pas uniquement à chercher la solution mais bien à poser les problèmes.

Finalement, il est nécessaire de rappeler qu'apprendre à raisonner, problématiser, sont des processus qui s'inscrivent dans la durée. Il faut donc installer cet enseignement dans une temporalité et organiser/penser *a priori* une programmation sur une année scolaire ou même sur un cycle d'enseignement en proposant régulièrement des situations ayant pour objectif de construire peu à peu ce qu'on pourrait nommer une « communauté de chercheurs » au sein de la classe de mathématiques.

Bibliographie

ARSAC, G. et al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses universitaires de Lyon, IREM de Lyon.

BALACHEFF, N. (1982) Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 3 (3). 261-304.

CHOQUET, C (2019) Formation à l'analyse de l'activité des élèves en mathématiques au cycle 3 : une complémentarité de deux cadres théoriques. *Ressources pour la formation, l'Ecole et les apprentissages scolaires*. Nantes. Disponible en ligne [https://espe.univ-nantes.fr/recherche-innovation/nos-publications--2343712.kjsp?RH=1223642640840]

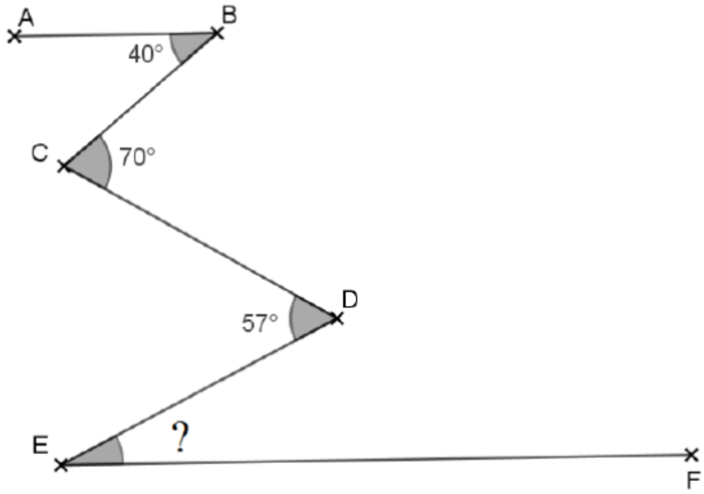
FABRE, M. et ORANGE, C. (1997) Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *Aster 24*. 37-57. INRP.

GRAU, S. (2017) Modélisation : le cas des fonctions affines. *Repères IREM* 108. 41-62.

ROBERT, A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck, F. (Dir.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès édition.

Annexe 1 : Problème des angles

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
<u>Question</u> : Quelle est la mesure de l'angle DEF ?



Annexe 2 : Problème de la piscine

La piscine

Marc, Jérémy, Vanessa et Medhi sont quatre carreleurs chargés de carreler les piscines (toutes identiques) d'un lotissement.

Leurs expériences professionnelles sont très différentes et jusqu'à présent, chacun posait seul les carreaux d'une piscine.

Ils décident aujourd'hui de travailler ensemble sur une même piscine.

- D'après les documents fournis ci-dessous, pourront-ils carreler entièrement une piscine durant une journée de travail ?

Doc. 1 Rythme régulier de travail

Marc et Vanessa : une piscine en 3 jours chacun

Medhi : une piscine en 5 jours

Jérémy : une piscine en 7 jours

Doc. 2 Message d'un collègue

Doc. 3 Conditionnement des carreaux

- 4 cartons pleins de carrelage : 26 m²
- Quantité de carrelage disponible pour la journée :

Plein Plein Plein

$\frac{2}{3}$ vide

Le carrelage restant occupe $\frac{4}{7}$ du carton.

Doc. 4 Caractéristiques de la piscine

Parallélépipède rectangle :
- 2 m de large
- 4 m de long
- 1,5 m de profondeur

Document de l'enseignant (Problème de La Piscine)

Analyse a priori de l'activité

Cibler les objectifs d'apprentissage :

Compétences travaillées :

	MI	MF	MS	TBM
Raisonner : Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.	J'accepte d'effectuer des tâches proposées au sein du groupe. Je participe à la conversation lorsqu'on me sollicite. J'écoute les autres.	J'accepte d'effectuer des tâches proposées au sein du groupe. Je donne mon avis lorsqu'on me sollicite. J'écoute les autres et je suis capable d'expliquer le travail effectué au sein du groupe.	Je coopère activement au travail de groupe. Je prends en compte le point de vue des autres élèves.	Je prends des initiatives. Je suis un élément moteur en animant le débat et en aidant les autres.
Chercher : S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler expérimenter.	Je comprends l'énoncé mais n'arrive pas à commencer les recherches.	Je comprends l'énoncé. Je repère quelques étapes de résolution mais j'ai des difficultés à les résoudre.	Je comprends l'énoncé. Je repère quelques étapes de résolution et j'arrive à les résoudre.	Je comprends l'énoncé, repère toutes les étapes de résolution et j'arrive à les résoudre.

Connaissances associées :

Somme, différence de deux nombres rationnels.
Aire d'un rectangle.

Objectifs d'apprentissage :

Réinvestir leurs connaissances sur les nombres rationnels pour résoudre un problème.

Annexe 3 : Problème pression-température

<u>Étape 1 : (groupe A)</u>

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique.

Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Anders :

T en °C	-14	8,5	11	23,5	41	43,5	46	51
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?
Justifiez votre réponse.

<u>Étape 1 : (groupe B)</u>

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique.

Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Gabriel :

T en °F	7,0	47,5	52,0	74,5	106,0	110,5	115,0	124,0
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?
Justifiez votre réponse.

<u>Étape 1 : (groupe C)</u>

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique.

Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Thomson:

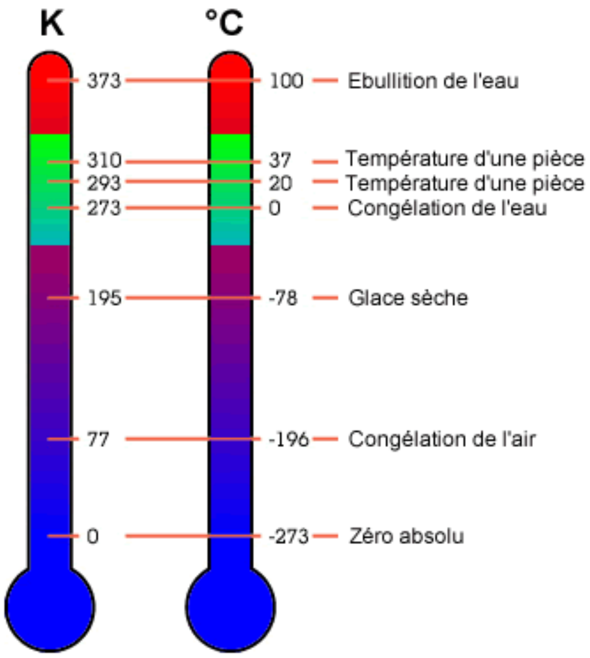
T en K	259	281,5	284	296,5	314	316,5	319	324
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?
Justifiez votre réponse.

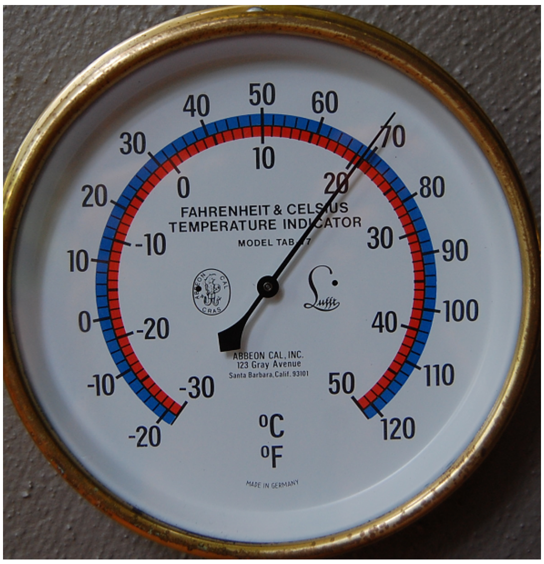
Étape 2 : (regrouper un élève de chaque groupe A, B et C)

Les trois professeurs n'ont pas utilisé les mêmes unités pour mesurer les températures : Anders mesure en degrés Celsius, Gabriel en degrés Fahrenheit et Thomson en Kelvin. Ils comparent leurs résultats et cherchent une relation entre la température et la pression qui soit toujours vraie, quelle que soit l'unité de mesure de température. Aide-les à rédiger leurs conclusions.

Doc 1 : correspondance entre Kelvin et degrés Celsius

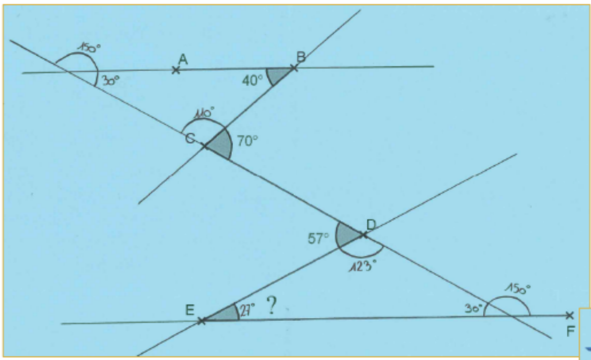


Doc 2 : thermomètre canadien à double lecture en degrés Celsius et degrés Fahrenheit

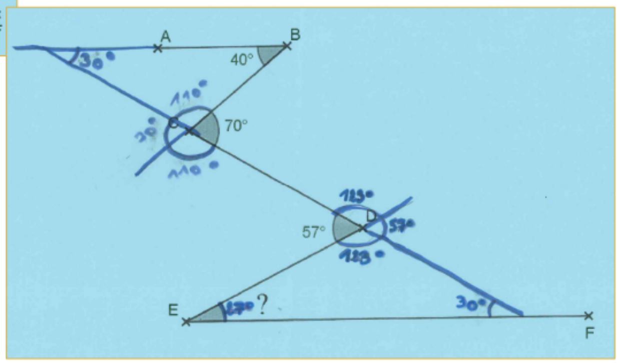


Annexe 4 : Procédures des élèves pour le problème des angles et bilan de séance

Procédure 1 :

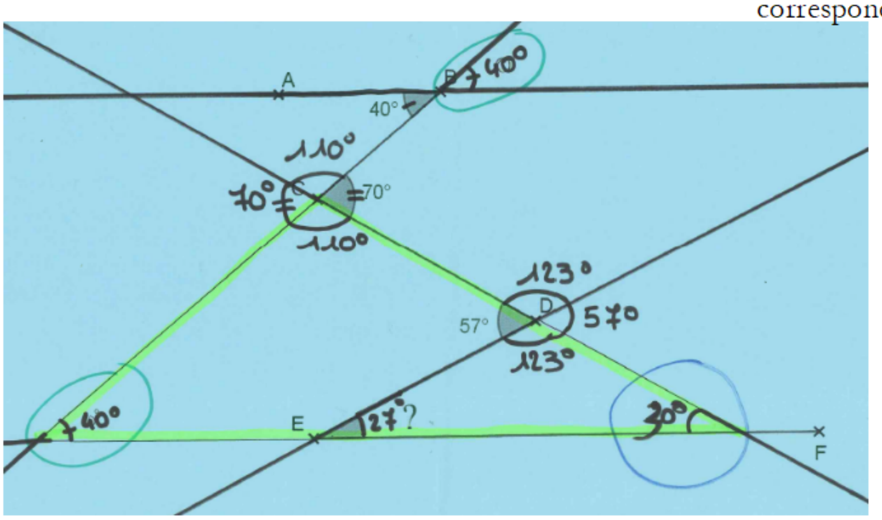


Angles alternes/internes

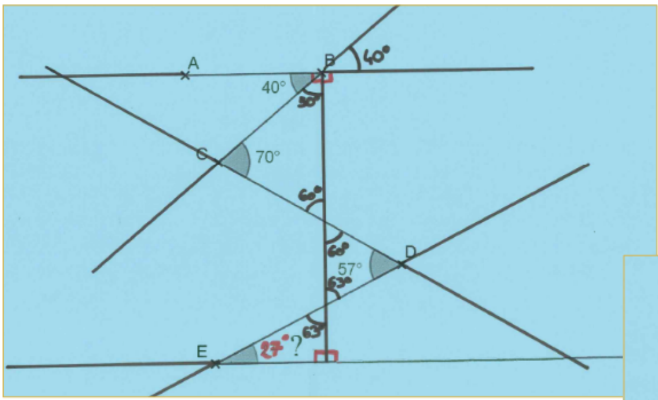


Procédure 2 :

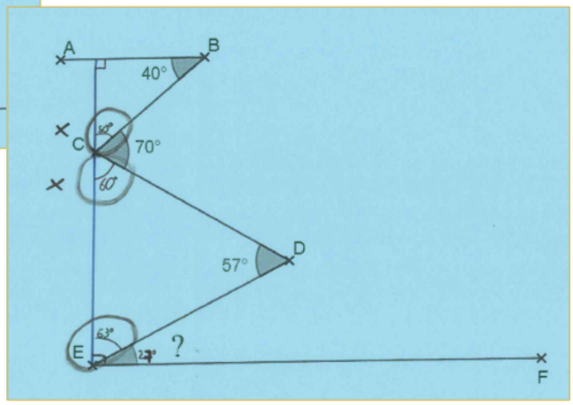
Angles correspondants



Procédure 3 :



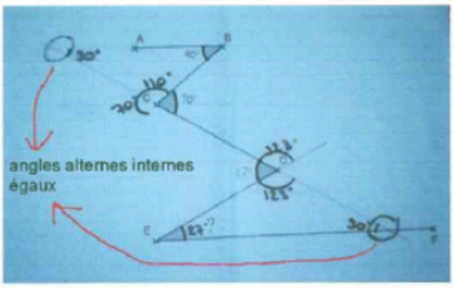
Tracé d'une droite perpendiculaire aux deux droites parallèles



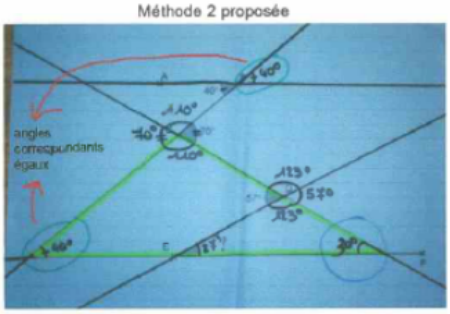
Bilan distribué lors de la séance suivante

Bilan du problème

Méthode 1 proposée



Méthode 2 proposée

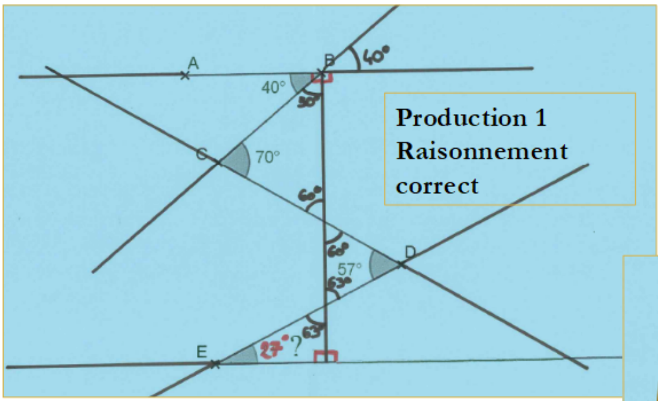


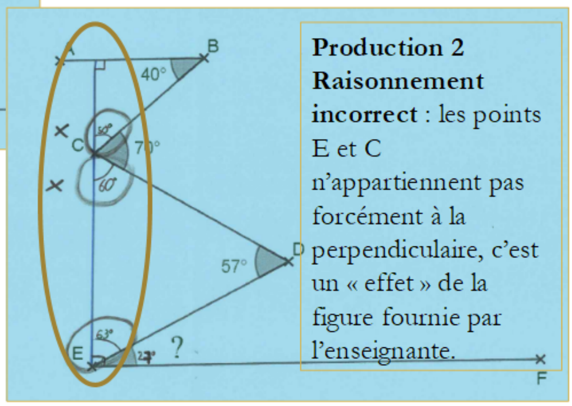
→ On prolonge toutes les droites.

→ On marque les angles que l'on peut trouver grâce à :

- angle plat égal à 180°
- angles opposés par le sommet égaux
- la somme des angles dans un triangle est égale à 180°
- angles alternes internes ou correspondants égaux quand les droites sont parallèles.

Annexe 5 : Résultat correct malgré une erreur de raisonnement





Annexe 6 : Production d'un groupe pour le problème de la piscine

Combien faut-il de m² de carlage pour remplir la piscine ?

Nous avons une piscine de 4 m de long sur 2 m de large

Le plus grand rectangle a une aire de 8 m² ensuite les triangle B F G C et E A D H sont identique et ont une aire de 6 m² quand aux triangles I J B A et D C K L qui sont eux aussi identiques ils ont une air de 3 m²

Calcul :

4 × 2 = 8 = aire grand rectangle

largeur grand rectangle

longueur grand rectangle   1,5 × 2 = 3

1,5 × 4 = 6

3 × 2 + 6 × 2 + 8 = 26

Il y a donc 26 m² a couvrir de carrelage

Il y a t-il assez de carrelage dans les cartons ?

Il nous faut d'abord trouver la somme de carrelage dans un carton

26 : 4 = 6,5

m² de carrelage dans 4 cartons   m² de carrelage dans 1 carton

Y a t-il assez de carlage ?

Combien y a t-il de m² de carlage dans un carton ?

26 ÷ 4 = 6,5

m² de carrelage   il y a donc 6,5 m² dans un carton   de carrelage dans un carton

Il nous faut 4 cartons pleins nous en avons déjà 3 + $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{10}$ d'un carton

$\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ $\frac{1}{10} = \frac{2,1}{21}$

$\frac{7}{21} + \frac{12}{21} + \frac{2,1}{21} = \frac{21,1}{21}$ donc plus de 1 carton   3 cartons + 1 carton = 4 carton

Ils ont donc assez de carrelage pour carreler toute la piscine

Ont-ils assez de temps ?

Il faut d'abord calculer quel temps en moyen mettent-il pour faire une piscine séparément

3 + 3 + 5 + 7 : 4 = 4,5   Moyenne du temps qu'il leur faut pour faire une piscine

Mel Yasmin Math Jérémy temp pour carreler une piscine en jours

Si on considère qu'à 4 ils vont 4 fois plus vite alors 4,5 : 4 = 1,125 ils mettront donc 1,125 journée pour carreler entièrement la piscine ce qui est trop ils ne pourront donc pas finir a temps

Annexe 7 : extraits transcription des échanges dans un groupe d'élèves autour du problème pression-température

Locuteur	Temps	
E3 Adrien	20:47	Ouais bah... faut que ce soit en Kelvin pour que ce soit proportionnel... parce qu'en Fahrenheit et en Celsius ça l'est pas
E2 Aurélie	20:57	Oui mais pourquoi
E3 Adrien	20:59	Ben parce qu'on n'avance heu... on n'avance pas de... on n'avan... heu. On... enfin...un degré n'équivaut pas à... **1 degré Celsius équivaut pas à 1 degré Kelvin** et qui n'équivaut pas non plus à ça
E2 Aurélie	21:11	Ouais
E1 Lucie	21:11	On multiplie par je sais plus combien pour trouver en Fahrenheit
E3 Adrien	21:13	Ouais et encore c'est un chiffre approximatif

E3 Adrien	24:10	Hum... t'as combien de heu...heu... 250, non, 774 fois
E1 Lucie	24:25	Parce que en fait, un degré Celsius c'est pas égal à un degré Fahrenheit.
E3 Adrien	24:29	Hinhin c'est ça
E1 Lucie	24:35	C'est comme les pouces et les mètres
E3 Adrien	24:37	Je vois pas le rapport, mais bon on sait pas
E2 Aurélie	24:39	Si aux États Unis ils font avec les pouces
E1 Lucie	24:40	Oui, et nous on est avec les centimètres et les mètres

E2 Aurélie	25:22	1 Kelvin c'est égal à à peu près 3 hPa
E3 Adrien	25:26	3 hPa enfin pour être précis 2,98 et... beaucoup de chiffres après
E1 Lucie	25:47	Bon et voilà, on n'a que ça à mettre ?
E3 Adrien	25:48	Quoi ?
E1 Lucie	25:49	Non, on a rien, on a autre chose à écrire ?
E3 Adrien	25:51	Ben tu mets juste ça pour compléter et puis ce sera bon, pour pas faire genre qu'on a juste rédigé une phrase

E1 Lucie	26:54	Monsieur, on a fini... Monsieur, ... on a fini
Prof1	27:06	Alors, qu'est ce que vous avez écrit
Prof1	27:21	Alors ce qui serait intéressant c'est que là vous affirmez des choses , ce serait d'expliquer, en quoi ici lorsque vous écrivez les degrés Kelvin sont proportionnels à la pression en hPa et en quoi les degrés Celsius et Fahrenheit ne le sont pas. On est simplement de l'ordre du constat, faudrait dépasser l'ordre du constat et expliquer pourquoi dans un cas on a proportionnalité et pas dans l'autre, pas dans les deux autres.
E1 Lucie	27:45	On l'a écrit... on l'a dit oralement mais on n'a pas écrit.
Prof1	27:47	Ce serait bien d'avoir une petite trace écrite justement sur heu... votre argumentation. Même si il y a un enregistrement.
E3 Adrien	27:57	D'accord
E1 Lucie	27:58	Ben en gros faut écrire que heu...
Prof1	28:00	Détaillez un petit peu, mais heu c'est déjà intéressant

E3 Adrien	29:05	C'est parce que c'est un, un , c'est parce que c'est 1°F n'est pas égal à 1°K et n'est pas égal à 1°C.
E3 Adrien	29:23	Donc heu...
E2 Aurélie	29:27	Donc rien du tout
E3 Adrien	29:28	{speaker_noise=laugh} tu notes quoi là, mets pas une phrase
E2 Aurélie	29:33	Bah
E1 Lucie	29:34	Ben quoi on est en maths on peut noter des formules

E1 Lucie	29:58	Mais je crois qu'il a dit qu'il fallait prouver pourquoi
E3 Adrien	30:01	Ouais, dé dé dé... enfin développer pourquoi, il faut pas seulement heu... il a dit déjà le mot... faut pas, faut pas...
E1 Lucie	30:09	Faut pas seulement conclure... je crois qu'il a dit ça
E2 Aurélie	30:12	Faut redémontrer quoi
E1 Lucie	30:14	Ouais
E2 Aurélie	30:15	Au pire ils verront bien dans l'enregistrement ce qu'ils ont dit
E1 Lucie	30:18	ce qu'on a dit
E3 Adrien	30:19	Il faudra écouter, suffira juste d'écouter pas de ... voilà
E2 Aurélie	30:25	Bref, du coup heu..;
(Pas de locuteur)	30:27	
E1 Lucie	30:36	Après on peut pourquoi heu... degrés Fahrenheit et Celsius ne sont pas égal à heu... ne sont pas proportionnels
E3 Adrien	30:43	Déjà Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnels entre eux
E1 Lucie	30:48	Oui mais alors on peut dire que c'est pas proportionnel avec heu les hectopascals, la pression
E3 Adrien	30:55	Eh bien si on dit que l'un n'est pas proportionnel à l'autre et ensuite on dit que Celsius et Fahrenheit n'est pas proportionnel à hectopascals
E1 Lucie	31:03	Oui mais il a dit qu'il fallait rédiger donc on rédige... tant pis
E2 Aurélie	31:08	Non mais tu vois c'est pour faire des lignes en plus pour prouver qu'on est intelligents
E3 Adrien	31:12	**On n'a pas besoin de le prouver**
E1 Lucie	31:15	**Mais ouais, on a tout prouvé dans l'enregistrement**
E3 Adrien	31:19	Ouais là il faut lire et tout, et là tu peux être sur un transat en train d'écouter ça
(Pas de locuteur)	31:25	
E3 Adrien	31:57	C'est un peu long cette histoire
E1 Lucie	32:00	Au pire ça on peut le rédiger mais en phrases... si il comprend pas
E3 Adrien	32:14	Ben heu pas comprendre ça
E2 Aurélie	32:17	C'est un prof de maths je sais pas...
E1 Lucie	32:19	Mais si ça se trouve il va se dire par exemple ça eh bien c'est pas égal à ça du coup ben
E2 Aurélie	32:23	**Ben ça c'est pas égal à ça, c'est pas égal à ça donc ça c'est pas égal à ça**
E3 Adrien	32:26	**Ben peut-être 1 n'est pas égal à 2 et 2 n'est pas égal à 1 et pourtant 1 est égal à 1**
E1 Lucie	32:33	Voilà
E2 Aurélie	32:34	Oh vous m'embrouillez là

E3 Adrien	32:36	Non c'est pas grave, c'est pas grave, laisse comme ça
E1 Lucie	32:38	Mais non, faut, oui mais faut dire après faut dire que ... mais après tu fais avec ça là
E1 Lucie	33:52	Faut juste savoir le chiffre pour pouvoir les convertir
Prof2	33:56	Par exemple c'est une idée... enfin vous voyez que ce qu'on attend c'est quelque chose qui soit toujours vrai
E1 Lucie	34:02	Si, faut trouver en fait le chiffre qui est... pour convertir qui... genre un degré Celsius est égal à
E3 Adrien	34:08	Oui mais non, on a dit, on a dit qu'il y en avait pas justement de chiffre … comme ça. On a dit que pour
E2 Aurélie	34:13	Oui ben on peut dire qu'approximativement ben heu
E3 Adrien	34:16	*Déjà ce qui est vrai c'est que si ça augmente, ça augmente et que si ça diminue, ça diminue*
E1 Lucie	34:21	Ben forcément
E3 Adrien	34:23	Ben oui mais dans certains cas ça pourrait ne pas être vrai, d'où déjà on sait qu'il y a ça, tu mets si la...
E2 Aurélie	34:30	Attends tends tends tends... si
E3 Adrien	34:32	*Si la température augmente, laaaa... (silence) comment dire... si la température augmente, la pression augmente et si la température baisse, la pression baisse... voilà... c'est une relation*