DES PREUVES EXEMPLAIRES : POUR QUELS APPRENTISSAGES ?

Françoise HÉRAULT, Marie-Noëlle LAMY, Zoé MESNIL, Marie THIRION, Nathalie VILLAIN, Delphine WENZEK et le groupe Raisonner ReChercher Communiquer (R2C2) de l'IREM de Paris

Résumé. L'apparition de « démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées » dans les nouveaux programmes pour le lycée rejoint les préoccupations de notre groupe : que peut-on dire de la démonstration et du raisonnement en général à l'aide de ces démonstrations particulières, avec quels mots, quelle formalisation, selon quelle progression du collège au lycée ?

En introduction

À l'instar de différents groupes IREM qui ont travaillé sur la démonstration (voir par exemple les nombreux travaux de l'IREM de Rennes[1], dont *La démonstration au collège, quelles tâches ? Quels outils ?* Alagroute, Houdebine, Mary et Paugam, 2004, ou la brochure *Initiation au raisonnement* par l'équipe académique de mathématiques de l'académie de Bordeaux, 2003, ou encore la brochure *Enseigner la démonstration au collège*, par le groupe collège de l'IREM de Marseille, 2011), nous distinguons différentes entrées dans l'apprentissage de la preuve, liées à ses différentes facettes (par exemple la preuve comme processus, la preuve comme produit, ou encore la fonction de validation ou la fonction d'explication de la preuve). Précisons d'emblée que nous ne faisons pas de distinction ici entre preuve et démonstration. Une distinction courante consiste à considérer la démonstration comme un type de preuve particulier, à savoir une preuve adoptant une forme particulière qui fait qu'elle est reconnue comme preuve au sein de la communauté mathématique (Balacheff, 1987). Cette distinction n'est pas nécessaire ici : les textes que nous regardons, qu'ils soient produits par des élèves ou par des enseignant·e·s, sont évalués au regard des attendus et pratiques de la communauté mathématique. Nous pourrions donc nous restreindre à n'utiliser que le terme *démonstration*, mais nous ne voulons pas nous priver du terme *preuve*, également largement utilisé dans la communauté.

Nous distinguons trois entrées pour l'enseignement et l'apprentissage de la preuve : comprendre la nature de la preuve, élaborer une conjecture, construire une preuve. Pour le premier point, l'enjeu est de distinguer une preuve mathématique d'un argumentaire, d'une explication, d'une manipulation, de faire sentir la nécessité de la preuve pour généraliser. Pour le deuxième point, l'enjeu consiste à développer des démarches de recherche, à organiser et formuler des conjectures, des sous-questions. Pour le troisième point, l'enjeu est à la fois d'apprendre à structurer une preuve, et de se familiariser avec les pratiques langagières en matière de rédaction de preuves (Hache et Mesnil, 2015).

L'idée que l'apprentissage de la preuve peut se décliner selon différents axes est également présente dans les documents institutionnels : le document ressource pour le collège *Raisonnement et démonstration* (MEN, 2009b) insiste sur la différence entre la phase de recherche d'une preuve et la phase de mise en forme, différence reprise dans le document

[1] Répertoriés par ordre chronologique ici : https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/IREM/ens-demo/chrono.html

ressource pour le cycle 4 *Raisonner* (MEN, 2016). Nous pouvons cependant noter une évolution entre les deux documents : le premier indique que la première phase est « la plus importante », la seconde ne devant pas « donner lieu à un formalisme prématuré », le deuxième remet plus à égale importance les deux phases, puisqu'il convient de proposer des situations qui doivent « ménager à la fois des temps de recherche […] et des temps de mise en forme ». Nous interprétons cette évolution en lien avec les pratiques contemporaines de chaque époque : en 2008, comme le montre Michèle Gandit (2010), la pratique dominante pour l'apprentissage de la démonstration est effectivement d'insister sur ses aspects formels, insistance qui conduit à des productions de textes qui n'ont pas le sens attendu. Surtout, les élèves confronté·e·s à la tâche de prouver se focalisent sur la mise en forme (rédaction) au détriment de la recherche. Nous pouvons faire l'hypothèse que le discours institutionnel, et les résultats de la recherche diffusés à travers la formation initiale et continue, ont eu un effet sur les pratiques, et que dix ans plus tard, le travail sur la mise en forme reprend une plus juste place. Au lycée, le programme de mathématiques de seconde générale et technologique (MEN, 2019a) rappelle que « démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique », et il identifie « quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées ». Le document ressource pour la classe de Seconde *Raisonnement et démonstration* (MEN, 2019b) propose ainsi d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat, de donner des démonstrations en plusieurs niveaux de détail, pistes envisagées « pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels », mais qui peuvent également être vues comme autant de modalités de travail différentes pour l'ensemble de la classe : pour telle preuve, le travail à la charge des élèves peut être seulement de trouver les idées générales, de produire le plan, la rédaction complète étant prise en charge par l'enseignant·e dans un moment collectif, ou à l'inverse, les idées générales et le plan peuvent être dégagées collectivement, le travail de rédaction restant alors à la charge de l'élève.

Cette invitation à varier les modalités de travail autour de la preuve nous semblait pouvoir recouper notre souci de l'aborder selon différents aspects. Par ailleurs, nous entendons dans l'expression « démonstrations exemplaires » le fait que les démonstrations listées sont importantes non pas tant pour le résultat donné par la propriété mais bien pour ce qu'elles permettent de dire de la preuve en général. Et c'est selon cette démarche que nous avons commencé à regarder les treize démonstrations exemplaires du programme de seconde, avec l'idée de pouvoir proposer à travers elles une progression dans l'apprentissage de la preuve. Cette étude globale est encore en cours, et nous ne présentons ici que deux exemples. Dans un premier temps, nous verrons comment la preuve de la propriété « Le projeté orthogonal du point M sur une droite D est le point de la droite D le plus proche du point M » nous a permis de mettre au jour, que produire une preuve, c'est bien sûr choisir des arguments mathématiques, et par là décider de propriétés supposées déjà connues, mais aussi choisir des façons de formuler la preuve. Dans un second temps, nous verrons les différentes modalités de travail envisagées pour la démonstration des variations de la fonction carrée, nous regarderons ce qu'il en est dans les manuels, et nous présenterons la modalité choisie par l'une d'entre nous.

Produire une preuve c'est faire des choix

Lors d'une séance de travail de notre groupe IREM, nous nous sommes donné comme tâche d'écrire chacun·e une démonstration de la propriété « Le projeté orthogonal du point M sur une droite D est le point de la droite D le plus proche du point M », en nous accordant sur la définition suivante : « Soient D une droite et M un point du plan. Le projeté orthogonal du point M sur la droite D est le point d'intersection de D et de la perpendiculaire à D passant par M. ». Nous avons ensuite construit une grille d'analyse pour objectiver les différences dans nos productions. Cette grille nous a aidé à affiner notre regard sur les différences entre nos productions, et nous avons ensuite élaboré à partir de notre travail une séance de formation dans le cadre du master MEEF Second degré de mathématiques à l'ESPE de Paris.

Grille d'analyse des preuves

Cinq preuves sont données en annexe, qui vont nous servir ici à illustrer notre grille d'analyse. Voici les indicateurs que nous regardons :

- Introduction des variables M et D :

Les points M et D sont déjà nommés dans la propriété. Il aurait pu en être autrement, la propriété peut être énoncée de la façon suivante : « Le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de cette droite le plus proche du point donné ». L'utilisation de variables (noms de points) permet d'éviter le recours à des déictiques qui rendent la compréhension plus complexe. Notons également qu'il y a une quantification implicite : la propriété à montrer est une propriété valable pour tout point M et pour toute droite D. Nous identifions trois possibilités :

1. Utilisation d'une expression introduisant les variables (ici en vue de démontrer une proposition universelle) : « soit », « considérons »… (preuves 1, 3, 4).

2. Points placés sur un dessin (preuve 5).

3. Pas d'introduction ni de dessin (preuve 2).

- Introduction de la variable H (le projeté) :

Le point H n'est pas nommé dans l'énoncé de la propriété. Ici encore, un autre choix aurait été possible, par exemple avec la formulation suivante : « si H est le projeté orthogonal d'un point M sur une droite D, alors H est le point de D le plus proche de M ». Dans une telle formulation, il y a une quantification universelle implicite sur les points H, M et sur la droite D. Nous identifions quatre possibilités :

1. Utilisation d'une expression qui donne un nom à un point déjà déterminé une fois introduits M et D : « appelons », « notons », ou tout autre verbe (preuves 1, 3, 4).

2. Utilisation d'une expression introduisant la variable (ici en vue de démontrer une proposition universelle) : « soit », « considérons »… (preuve 2).

3. Point placé sur un dessin (preuve 5).

4. Pas d'introduction ni de dessin.

- Annonce ou non de ce qu'il y a à démontrer, avec ou sans reformulation :

Nous identifions six possibilités :

1. Sans reformulation.

2. Avec reformulation en termes de plus courte distance.

3. Avec reformulation quantifiée sans introduction de nouvelles variables (preuve 4).

4. Avec reformulation quantifiée avec inégalité entre les longueurs et introduction d'une nouvelle variable (preuves 2, 4).

5. Annonce de l'étude de la distance MB (preuve 5).

6. Pas d'annonce ni de reformulation (preuves 1, 3).

- Introduction de la variable B (point quelconque de D) :

Encore une fois, il aurait été possible de choisir une formulation de la propriété dans laquelle le point B apparaît explicitement, par exemple : « si H est le projeté orthogonal d'un point M sur une droite D, alors H est plus proche de M que n'importe quel autre point B de D ». Pour construire la démonstration à partir de la formulation initiale, il est nécessaire de « déplier » l'expression « être le point le plus proche d'une droite », en faisant apparaître la structure de proposition universelle : « H est le point de D le plus proche de M » signifie « quel que soit le point B de D, différent de H, H est plus proche de M que B ». Nous pensons qu'il y a là un point délicat pour des élèves de seconde, qui nécessiterait sûrement une aide de l'enseignant·e si des élèves devaient produire cette démonstration. Il faut aussi traduire « H est plus proche de M que B » en une inégalité entre les longueurs, mais cela nous semble moins difficile. Nous identifions trois possibilités :

1. Utilisation d'une expression introduisant la variable B (ici en vue de démontrer une proposition universelle) : « soit », « considérons… (preuves 1, 2, 3, 5).

2. Point placé sur un dessin.

3. Pas d'introduction (preuve 4).

- Traitement du cas $M \in D$:

Dans le cas où $M \in D$, M est confondu avec H, son projeté orthogonal sur D. Un triangle étant généralement défini comme un polygone qui a trois sommets distincts, il ne sera pas possible dans ce cas de considérer le triangle HMB. Encore une fois, dans le cas où des élèves de seconde auraient à produire cette démonstration, il est peu probable qu'ils et elles pensent à ce cas particulier. Certain·e·s d'entre nous suggéraient alors de le mentionner au moment de la mise en commun, voire de ne pas le mentionner du tout, considérant que la rigueur attendue pour une telle démonstration à ce niveau n'allait pas jusque-là. Il y a pour ce critère seulement deux possibilités :

1. Oui (preuves 1, 3).

2. Non (preuves 2, 4, 5).

- Argument de la démonstration :

Il s'agit ici de distinguer « à gros traits » l'argument mathématique utilisé, nous listons trois possibilités. Pour les deux dernières, elles peuvent être soit démontrées (on peut introduire le terme lemme, souvent utilisé en mathématiques), soit convoquées comme résultat connu antérieurement (mais alors, il ne reste plus grand chose à démontrer pour la propriété en jeu) :

1. Utilisation du théorème de Pythagore pour conclure à l'inégalité (preuves 1, 2, 3 et 5).

2. Utilisation de la propriété « dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté » (preuve 4).

3. Utilisation de la propriété : « la distance entre un point M et une droite *d*, c'est-à-dire la plus courte distance entre M et un point de *d*, s'obtient en traçant la perpendiculaire à *d* passant par M ».

- Justification du triangle rectangle :

Pour les arguments 1 et 2 ci-dessous, il y a entre la définition et l'utilisation d'une propriété nécessité d'un changement de point de vue pour passer d'une relation entre deux droites (perpendiculaires) à une propriété d'un triangle (rectangle), qui peut être explicite ou non :

1. Le passage de droites perpendiculaires à triangle rectangle est explicite (preuve 4).

2. La propriété du triangle n'est pas justifiée (preuves 1, 2, 3, 5).

- B est explicitement supposé différent de H

Encore une précision qui selon nous ne doit pas être une exigence pour des démonstrations produites par des élèves : l'interprétation de « H est le point de D le plus proche M » signifie que tout point de D différent de H est à une distance strictement supérieure. Par ailleurs, dans les démonstrations qui évoquent un triangle rectangle, encore une fois on a un problème si deux des points sont confondus. Nous regardons donc si le point B est explicitement supposé différent de H :

1. Oui (preuve 1, 3, 4).
2. Non (preuve 2)

- Justification ou non des inférences dans la démonstration avec Pythagore.

Dans le cas d'une démonstration qui utilise le théorème de Pythagore, plusieurs choix sont possibles pour justifier l'inégalité $BM<HM$ à partir de l'égalité $MB^2=HB^2+HM^2$. Nous listons différents arguments qui peuvent être (ou non) utilisés, plusieurs pas de déduction qui peuvent être (ou non) justifiés :

1. Argument de minimalité : BM est minimal quand HB est minimal (preuve 5)

2. Justification du passage de l'égalité $MB^2=HB^2+HM^2$ à l'inégalité $MB^2>HM^2$: en justifiant que $HB>0$ (preuve 3) ou non (preuves 1, 2).

3. Justification du passage de l'inégalité avec les carrés à l'inégalité sans les carrés : sans justification (si ce n'est que les longueurs sont positives) (preuve 1), avec justification par croissance de la fonction racine (preuve 2), avec ou sans justification du calcul des racines (car une longueur est un nombre positif), avec justification par factorisation de la différence des carrés (preuve 3), avec justification par la croissance de la fonction carré (en fait, c'est la contraposée de la définition de la croissance que l'on utilise dans ce cas, ou éventuellement on peut faire un raisonnement par l'absurde).

- Retour ou non sur la proposition à démontrer en conclusion :

Nous regardons quels éléments sont repris en conclusion :

1. Reprise de l'énoncé de la propriété (preuves 3, 4, 5).

2. Reprise d'une reformulation de la propriété déjà énoncée.

3. Reformulation de la propriété (preuve 1).

4. Ré-introduction de la quantification universelle sur B (preuve 1).

5. Ré-introduction de la quantification universelle sur M, D (preuve 4).

6. Pas de retour (preuve 2).

Utilisation de cette grille en formation

Nous avons construit un scenario de formation initiale au sein du master MEEF 2ème année, mis en œuvre à l'ESPE de Paris avec environ 22 stagiaires.

Phase 1: Ecriture d'une preuve par les stagiaires en formation dans le cadre de l'UE Géométrie (durée de 20 min).

Dans la partie géométrie des nouveaux programmes de seconde, on a l'intitulé suivant :

Démonstrations

- Le projeté orthogonal du point *M* sur une droite Δ est le point de la droite Δ proche du point *M*.

Pouvez-vous rédiger sur cette feuille :
- La définition de projeté orthogonal que vous donneriez à des élèves de seconde
- La démonstration demandée (toujours au niveau seconde).

Figure 1 : Consigne donnée aux stagiaires lors de la phase 1

Phase 2: À l'issue de ce travail, avec le groupe R2C2, nous avons analysé les productions de preuves des stagiaires :

- Nous avons trouvé très peu d'introduction des variables M et D en dehors du dessin, et *a fortiori* aucune reprise de la quantification universelle sur M et D dans la conclusion.
- Le point H est introduit avec « soit », ou juste sur le dessin (à peu près moitié/moitié).
- Nous avons trouvé une annonce de ce qu'il y a à démontrer dans cinq productions, dont deux seulement avec une reformulation avec un énoncé avec quantification universelle sur B.
- Le point B est majoritairement introduit par « soit ».
- Le cas $M \in D$ n'est pas traité (dans deux productions il est précisé $M \notin D$).
- L'existence du triangle rectangle est assez peu justifiée.
- Le passage de l'égalité à l'inégalité avec carrés est souvent justifié, mais le passage à l'inégalité sans carré n'est justifié qu'une seule fois par croissance de la fonction racine, et une fois par bijectivité de la fonction carrée.
- Nous avons trouvé peu de retours sur la propriété à démontrer, mais tout de même quatre réintroductions de la quantification universelle sur B.

Nous avons ensuite sélectionné six productions très variées pour faire émerger différents critères d'analyse de production de preuves par les stagiaires.

Phase 3: Dans le cadre de l'UE Accompagnement de stage (durée 1h30), les stagiaires sont répartis en 6 groupes, chaque groupe reçoit les 6 copies.

Premier temps de travail (20 minutes) :

Consigne : Regarder toutes les copies, souligner, annoter d'une certaine couleur ce qui vous parait bien, judicieux, pertinent, et d'une autre couleur ce qui vous parait gênant, confus, inutile.

Chaque groupe présentera ces réflexions sur une copie en particulier : Groupe 1 - copie A; Groupe 2- copie B etc…

Deuxième temps de travail (15 minutes) :

Analyse de la copie A présentée par le groupe 1 et complétée collectivement avec l'objectif de faire émerger des critères. La discussion a notamment tourné autour de :

- Reprise de certains arguments parfois erronés (domaine de validité, explicitation des données, des hypothèses)

- Déclaration des variables (la figure suffit-elle ? Etc…)

- L'usage des « donc » (un travail possible, qui n'a pas été fait, serait d'expliciter certains emplois du « donc » en réécrivant le chaînon associé).

Troisième temps de travail (1h) :

Mise en œuvre de la grille sur les autres copies, ce qui a permis de compléter les critères et de les affiner.

Ce travail en formation initiale a permis à travers de nombreux échanges de redéfinir des contenus disciplinaires en particulier liés à la logique : implication, contraposée, réciproque d'une implication, raisonnement par l'absurde etc., notions revues en contexte.

En conclusion pour cette démonstration

Comparer différentes preuves produites et les analyser finement montrent que rédiger une démonstration c'est faire des choix, qui ne seront pas les mêmes d'un·e enseignant·e à l'autre. Cet apprentissage est important, et cette liberté de rédaction doit être laissée aux élèves. Ce qui n'empêche pas de montrer certaines routines de rédaction, mais sans les imposer. Pas de si alors or donc systématique !

Du côté formateur.trice, la grille d'analyse nous a aidé·e·s à anticiper la discussion avec les stagiaires, à objectiver les différences entre les textes. L'idée est que ce travail nous rend conscient·e·s de nos choix, et de nos attentes vis-à-vis de nos élèves. Cela permet aussi d'aménager une progression dans les éléments attendus.

Pour un déroulement en classe, nous avons imaginé faire conjecturer aux élèves le fait que le point de D le plus proche de M est obtenu en traçant la perpendiculaire. Puis passage à la démonstration, avec prise en charge par l'enseignant·e de la reformulation : dire que c'est le point le plus proche, c'est dire que tous les autres points sont plus loin, ça veut dire que pour tout point B de la droite D, MB>MH. On peut alors laisser les élèves chercher, puis comparer les démonstrations produites. Nous n'attendrions pas des élèves qu'ils et elles considèrent le cas où M est un point de D, qui serait traité ensuite guidé par l'enseignant·e. Il peut alors y avoir écriture de la définition du projeté orthogonal puis de la propriété et d'une démonstration (ou de plusieurs?) rédigée collectivement.

Du point de vue de la démonstration, nous pouvons souligner pour réinvestissement qu'il s'agit de la démonstration d'une proposition universelle : d'abord on considère un point M et une droite D, puis on considère un point B quelconque… Les variables sont introduites par « soit », « considérons »…, et ces expressions sont à mettre en relation avec une conclusion dans laquelle apparaissent les quantifications universelles. Nous construisons ainsi un schéma de raisonnement que les élèves pourront réutiliser.

Après avoir réfléchi aux différentes manières de formuler une preuve, nous nous sommes penché·e·s sur les modalités de travail en classe, en nous appuyant d'une part sur les propositions de différents manuels scolaires et d'autre part sur une activité proposée en classe de Seconde.

Différentes modalités de travail pour la démonstration des variations de la fonction carré

Enjeux pour l'apprentissage de la preuve

Les définitions de fonction croissante/décroissante sont d'une structure très courante en mathématiques : ce sont des implications universellement quantifiées. Cependant, pour des élèves de Seconde, et même s'ils et elles ont déjà rencontré souvent des propositions ayant cette structure, c'est peut-être la première fois qu'elle sera donnée aussi explicitement, notamment la quantification universelle. Construire des preuves du sens de variation peut donc être l'occasion de donner deux types de démarches qui pourront être réinvesties :

- Comment on détermine une inégalité (opération sur les deux membres d'une inégalité donnée, étude du signe de la différence…)
- Comment on démontre une implication universellement quantifiée « pour tout x, si P[x] alors Q[x] » : on se donne un élément x, on suppose qu'il vérifie P[x] et on démontre qu'il vérifie Q[x].

La présence de deux variables dans la définition ne rend pas sa structure plus complexe, par contre, c'est une difficulté dans la manipulation des inégalités. En effet, les élèves sont plutôt habitué·e·s à manipuler des inégalités dans le cadre de la résolution d'inéquations, et donc avec des expressions qui ne comportent qu'une seule variable. Il est alors possible qu'ils et elles essaient dans un premier temps de construire un tableau de signe, sans voir pourquoi la tâche est ici différente : l'ordre dépend non seulement des valeurs que peuvent prendre les variables, mais aussi de la relation d'ordre entre elles.

Illustration à partir d'extraits de manuels

Dans les manuels, les démonstrations « exemplaires » citées dans le programme sont toujours traitées. Cependant, les divers manuels ont fait des choix différents : certains donnent toutes les démonstrations dans le cours juste après l'énoncé de la propriété, d'autres renvoient toutes les propriétés à des démonstrations demandées en exercices, d'autres encore rédigent les démonstrations à la fin du cours et ajoutent des questions pour aider les élèves à les comprendre pas à pas. En nous inspirant de ce que nous avons vu dans les manuels, nous avons distingué quatre modalités de travail en classe :

- Preuve donnée dans le cours déjà rédigée, et commentée par le professeur.
- Preuve exposée au tableau par le professeur, avec des commentaires écrits.
- Preuve donnée à construire en exercice par des questions guidant l'élève vers le résultat final.
- Preuve donnée déjà rédigée, avec des questions pour comprendre les pas de démonstration.

Selon la démonstration, et comme préconisé par le programme, ces quatre approches peuvent être choisies et permettent de travailler différentes entrées du travail sur le raisonnement. En effet, le programme conseille d'aborder le travail sur la preuve sous des angles variés : observation et compréhension d'une preuve, recherche d'une démarche de preuve, élaboration guidée… De plus, les démonstrations « exemplaires » proposées par le programme n'ont pas toutes le même niveau de difficulté : certaines ont pu être rencontrées au collège, ou sont abordables par les élèves dans le sens où ils et elles peuvent avoir une idée de la conclusion si elle n'est pas donnée et la justifier par des arguments mathématiques, tandis que d'autres nécessitent un type de raisonnement nouveau, ou un cheminement complexe. Ces différences doivent être prises en compte dans le choix des modalités de travail.

Pour concrétiser nos recherches, nous nous sommes appuyé·e·s sur la démonstration des variations de la fonction carré. Dans ce cas particulier, dans les déroulements des séances, la propriété est généralement d'abord conjecturée à partir de l'observation graphique, ou de l'étude de quelques exemples numériques. Pour la plupart des élèves, les représentations utilisées dans ce premier temps, notamment celles en lien avec la représentation graphique, restent des éléments convaincants : une fonction est croissante parce que « ça se voit » ou parce que c'est vérifié par comparaison de quelques valeurs. Pas facile alors de faire comprendre la nécessité de la démonstration à partir de la définition, surtout que celle-ci est, comme nous l'avons déjà dit, d'une structure logique complexe : quantifications universelles sur deux variables, et implication. Le document d'accompagnement pour la Seconde, *Raisonnement et* *démonstration* (MEN, 2019b) donne des pistes de travail pour les démonstrations des sens de variation des fonctions carré, inverse et racine carré. Les auteur·trice·s concluent : « La méthode d'étude du sens de variation pratiquée en seconde est délicate. Son principe doit être dégagé car il donne du sens à la notion de croissance ou de décroissance ; cependant, sa mise en œuvre ne pourra pas être exigible de tous les élèves car elle est relativement technique. » La méthode dont il est question n'est pas la méthode de démonstration d'une implication universellement quantifiée, mais seulement d'une certaine implication universellement quantifiée. On peut penser qu'il est effectivement raisonnable de se limiter à ce premier niveau de généralisation (on donne une méthode pour toutes les fonctions), sans aller jusqu'au deuxième niveau (on donne une méthode pour toutes les implications universellement quantifiées). Cependant, il nous paraît tout de même dommage de ne pas profiter de cet exemple plusieurs fois répété pour dégager, au moins à l'oral, une structure que les élèves retrouveront à d'autres occasions, par exemple dans la démonstration de l'hérédité dans une récurrence.

Dans les manuels où la preuve est donnée dans le cours, elle sert d'exemple de démarche à suivre pour démontrer les variations d'une fonction. Par exemple, dans le manuel *Math'x* (figure 2), les démonstrations des variations des fonctions carré et inverse sont données dans le cours. Cependant, ces preuves ne sont pas accompagnées de commentaires sur leur structure. De tels commentaires sont-ils faits par l'enseignant·e ? Les élèves doivent-ils et doivent-elles la dégager seul·e·s ?

Démontrons les sens de variations des fonctions carré, et inverse admis précédemment.

Sens de variation de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$:

La fonction carré étant paire, étudions son sens de variation sur $[0 ; +\infty[$:

- Pour tous u et v tels que $0 \leqslant u < v$, comparons $f(u)$ et $f(v)$ en étudiant le signe de $f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Comme } u < v \text{, on a } v - u \text{ strictement positif.}\\ \text{Comme } u \text{ est positif et } v \text{ strictement positif, } v + u \text{ est strictement positif.}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{donc } f(v) - f(u) > 0\\ \text{c'est-à-dire } f(u) < f(v)\end{array}$$

La fonction carré conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$ donc elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- On en déduit, puisqu'elle est paire, qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Figure 2 : démonstration du sens de variation de la fonction carré, manuel Math'x Seconde, Editions Didier.

Dans ce même manuel, à travers des exercices résolus il est ensuite demandé aux élèves d'étudier les variations des fonctions $x \to 2x^2$ et $x \to -0{,}5x^2$, et finalement, des exercices non guidés demandent de démontrer les variations des fonctions $x \to x^2 - 3x$ et $x \to 3/x$. On a donc bien une structure de cours où la démonstration « exemplaire » est un premier exemple d'un type de démonstration qui est répété sur d'autres objets (ici d'autres fonctions). Le réinvestissement dans des exercices permet aux élèves de se détacher d'un « modèle » de rédaction, et donc de formulations et structures de phrase figées, au profit du déroulement logique des pas de démonstration mis en évidence par les questions posées.

Dans d'autres manuels, la preuve est proposée en exercice. Le résultat attendu n'est pas toujours donné. Par exemple, dans le manuel *Maths Seconde* de la collection Le Livre Scolaire (figure 3) l'énoncé annonce que le but de l'exercice est de démontrer les variations de la fonction carré, sans les rappeler. Le travail de reformulation de ce qu'il faut montrer est donc laissé en partie à l'élève (en partie car c'est l'énoncé qui demande de comparer C(a) et C(b)). Dans ce type d'exercice, on peut se demander si les élèves prennent conscience qu'ils et elles sont en train d'écrire une démonstration. La structure de la preuve est construite grâce aux différentes questions posées. Plusieurs exercices construits sur le même principe se succèdent ensuite avec des questions identiques : factoriser *f(a) - f(b)*, comparer *f(a)* et *f(b)* et conclure. Quels sont alors les automatismes que nous voulons développer chez les élèves ? Quelle correction faisons-nous pour ces exercices : question par question ou essayons-nous de reconstituer la preuve ?

Dans d'autres manuels, par exemple dans le manuel *Mathématiques 2nd* de la collection Barbazo (figure 4), la preuve est rédigée dans son intégralité et est accompagnée d'une succession de questions en lien avec certains pas de la démonstration. Cela permet de discuter autour des points sur lesquels nous voulons que les élèves s'attardent.

48 [Raisonner.] DÉMO

On cherche à déterminer les variations de la fonction carré, notée C, sur son ensemble de définition.

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction C.

2. Pour tous réels a et b, donner l'expression factorisée de $a^2 - b^2$.

3. On étudie les variations de C sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
On considère alors deux réels a et b tels que $a < b \leqslant 0$.
On cherche à comparer $C(a)$ et $C(b)$.

a. Quel est le signe de $a + b$?

b. Quel est le signe de $a - b$?

c. En déduire alors le signe de $(a-b)(a+b)$.

d. En s'aidant de la question **2.**, déterminer alors le signe de $C(a) - C(b)$.

e. Conclure.

4. En effectuant les mêmes raisonnements que dans la question **3.**, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Figure 3 : démonstration du sens de variation de la fonction carré, manuel Maths Seconde, Éditions lelivrescolaire.fr

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration

Cette démonstration utilise la définition des variations d'une fonction du chapitre 6.

- On traduit mathématiquement la phrase : « Lorsque les abscisses x augmentent dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$, les ordonnées $f(x)$ diminuent. »

Soient a et b deux nombres réels quelconques de l'intervalle $]-\infty\,;0]$ tels que $a \leqslant b$.
On veut montrer que $f(a) \geqslant f(b)$, c'est-à-dire que $a^2 \geqslant b^2$.
Pour cela, on étudie le signe de $a^2 - b^2$.

On a $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
Comme $a \leqslant b$, le nombre $a - b$ est négatif.
Comme a et b sont tous les deux négatifs, $a + b$ est un nombre négatif.
On en conclut que le produit $(a-b)(a+b)$ est positif. Ainsi, $a^2 - b^2$ est positif, donc $a^2 \geqslant b^2$.
La fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

1. Comment est traduite mathématiquement la phrase : « lorsque les abscisses augmentent dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$ » ?
2. Comment est traduite mathématiquement la phrase « les ordonnées $f(x)$ diminuent » ?
3. Expliquer la phrase : « Comme a et b sont tous les deux négatifs, $a + b$ est un nombre négatif. »
4. Quelle règle a-t-on utilisée pour prouver que $(a-b)(a+b)$ est positif ?

Figure 4 : démonstration du sens de variation de la fonction carré, manuel Mathématiques 2nd, collection Barbazo, Éditions Hachette Éducation

Quelle que soit la modalité de présentation de la démonstration « exemplaire » choisie, les manuels, comme le suggère le document d'accompagnement, en font un exemple de démonstration du sens de variation d'une fonction, avec éventuellement l'idée de présenter des techniques pour étudier une inégalité, mais ne vont pas jusqu'au niveau de généralisation de la démonstration d'une implication universellement quantifiée.

Plus globalement, avant d'aborder une démonstration exemplaire, nous avons relevé trois points à identifier :

- les difficultés que l'élève peut avoir pour comprendre cette démonstration,
- les difficultés que l'élève peut avoir pour construire cette démonstration,
- les points que nous voulons faire travailler, en particulier ceux que nous voulons réinvestir tout de suite dans d'autres exercices ou démonstrations. Ces points peuvent être de l'ordre du type de preuve (absurde, distinction de cas, équivalence, quantificateur universel ou existentiel…), des outils utilisés (calcul littéral …), de la reformulation (mise en problème, explicitation d'une définition …).

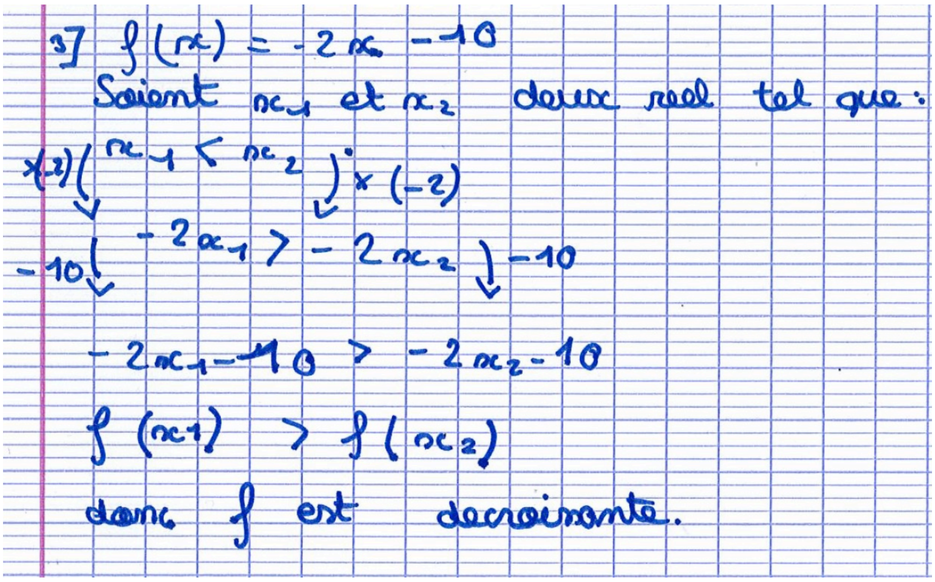
Pour démontrer les variations de la fonction carré, les points à travailler sont nombreux, mais il nous semble important d'en cibler un ou deux en particulier, en fonction de la progression prévue, quitte à revenir à d'autres moments du cours sur cette preuve « exemplaire », dès qu'elle est connue des élèves. Pour illustrer ces choix, nous présentons maintenant une progression testée en classe de seconde.

Itinéraire proposé dans une classe de Seconde

La séquence présentée ci-après a été mise en œuvre dans une classe de Seconde d'un lycée du quatorzième arrondissement de Paris.

Pour préparer au mieux les élèves à la compréhension de cette preuve, la factorisation et les études de signes ont été travaillées en amont à différents moments de l'année et sous différentes modalités. La définition d'une fonction croissante/décroissante a été donnée environ trois mois avant, lors du chapitre « Généralités sur les fonctions ». Elle est reprise ici dans le chapitre « Fonctions de référence ». Dans un premier temps, un travail approfondi a été mené pour manipuler la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction (« Activité variations de fonctions usuelles » donnée en annexe 2). La définition a d'abord été réexpliquée à la classe, en insistant sur le quantificateur universel « pour tous », sur l'implication, sur les variables et sur l'importance de l'intervalle sur lequel on travaille. Les élèves devaient ensuite appliquer cette définition pour démontrer un résultat connu : les variations des fonctions affines. Ils et elles ont d'abord travaillé en groupe sur des fonctions affines particulières. Toutes les combinaisons possibles selon le signe du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine étaient envisagées, afin que les élèves voient ce qui influence l'inégalité finale. Ont ainsi été étudiées $f_1(x) = -2x + 10$, $f_2(x) = 2x + 10$, $f_3(x) = -2x - 10$, $f_4(x) = 2x - 10$ pour arriver finalement à généraliser à l'étude des variations de $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.

Il a fallu traiter le premier exemple ensemble pour lancer l'activité, et finalement, l'ensemble des élèves a réussi à produire des démonstrations telles que celle ci-après (figure 5).



3] $f(x) = -2x - 10$

Soient x_1 et x_2 deux reel tel que :

$\times(-2)\ (x_1 < x_2)\ \times(-2)$

$-10\ (-2x_1 > -2x_2)\ -10$

$-2x_1 - 10 > -2x_2 - 10$

$f(x_1) > f(x_2)$

donc f est decroissante.

Figure 5 : copie d'élève pour l'activité variations de fonctions usuelles

Dans cette production, il y a des éléments importants attendus par l'enseignante :

- commencer la démonstration en considérant deux variables qui vérifient l'hypothèse de l'implication ($x_1 < x_2$) ;
- manipuler les inégalités, avec le changement de signe quand on multiplie par un nombre négatif (connaissances du collège) ;
- conclure sur l'ordre des images, et sur le sens de variation de la fonction.

Le lendemain, en cours, la démonstration des variations de la fonction carrée a été abordée par l'enseignante, comme un exercice (« Et si on essayait à présent de déterminer les variations de la fonction carrée ? »), par une séance dialoguée : conjecture des variations par une approche graphique puis démonstration. Les élèves ont compris globalement chaque point de la démonstration et pourquoi on le faisait. Il y avait un vrai échange mais chaque ligne présentait une difficulté pour les élèves : ils et elles n'étaient pas prêts à refaire cette démonstration seul·e·s. Beaucoup ne comprenaient pas pourquoi soudainement on ne faisait pas un tableau de signes pour étudier le signe d'une expression complexe (ie différente d'une fonction affine). Etudier deux cas différents (positif et négatif) présentait également une nouvelle et immense difficulté pour elles et eux.

Cette démonstration est laissée de côté pour un autre chapitre, ainsi que ces histoires de variations. Le travail sur le sujet reprend dix jours plus tard par un travail de groupe (activité « Étude de variations des fonctions », annexe 2). Après un bref rappel de ce qu'est une fonction croissante et décroissante, la tâche est de déterminer les variations de la fonction carrée puis de faire la démonstration, puis l'étude des variations des fonctions du type « $f(x) = ax^2$ » et « $f(x) = ax^2 + b$ » avec a, b réels. Les élèves réussissent l'étape de conjecture (pour les groupes plus en difficulté via la projection de quelques situations au tableau sur GeoGebra) mais chaque démonstration est laborieuse. Certain·e·s élèves remobilisent le caneva de la démonstration utilisée pour les fonctions affines mais de façon moins massive que pour cette première activité (deux exemples différents dans les copies figures 6 et 7), comme s'ils et elles ne décontextualisaient pas ce caneva de la situation particulière dans laquelle ils et elles l'avaient appliqué.

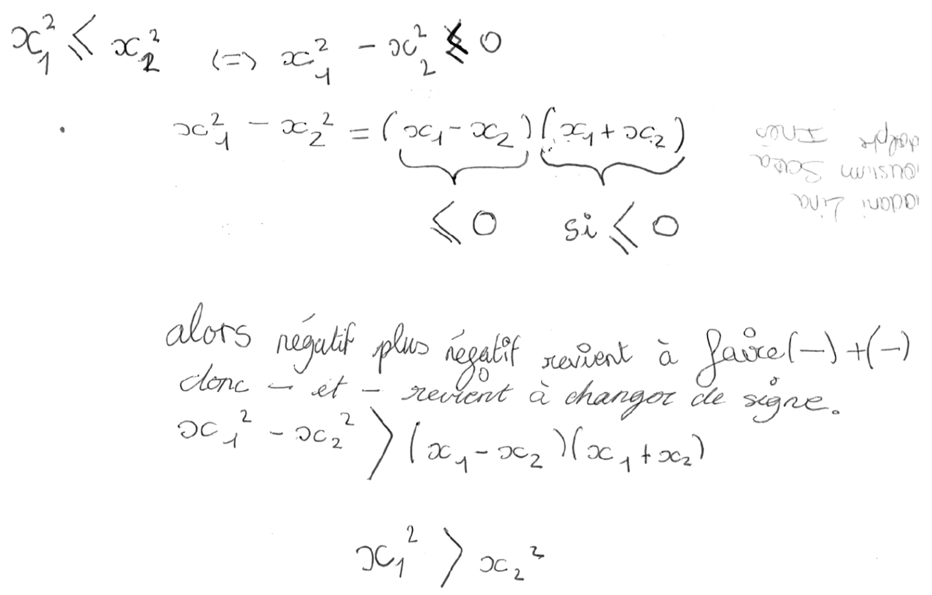


Figure 6 : un·e élève qui ne réinvestit pas le caneva de la démonstration

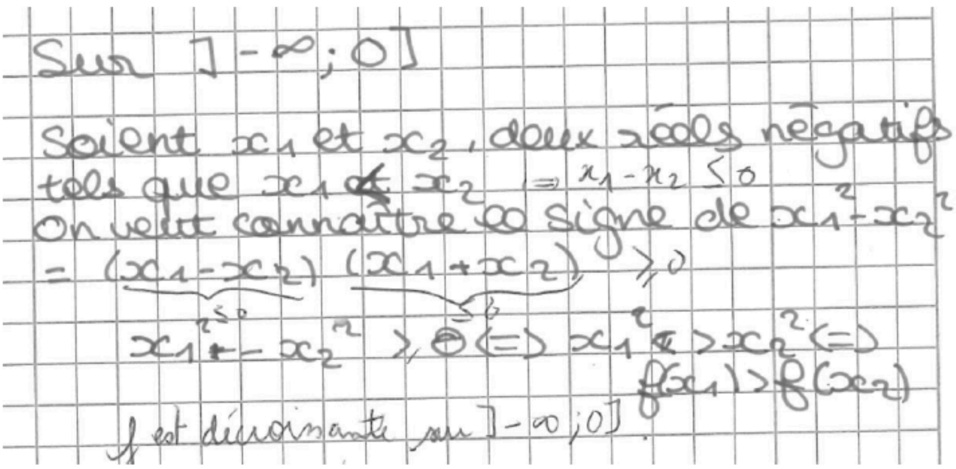


Figure 7 : un·e élève qui réinvestit le caneva de la démonstration

Pour finir, le lendemain l'enseignante reprend la démonstration des variations de la fonction carré collectivement puis un travail plus global est mené sur la fonction carrée (comparaison et encadrement). Finalement, les questions 2) à 4) de la deuxième activité ont été laissées de côté.

Ce travail a été très dur pour les élèves, beaucoup n'ont pas compris l'intérêt de la démonstration puisque les conjectures leurs paraissaient « fiables » au point d'en écrire une propriété. À l'issue de ces activités, une partie de la classe n'est toujours pas capable de refaire cette preuve seule. Cependant, ce travail leur a permis de travailler les inégalités de manière approfondie[2] et de faire un lien entre fonctions et manipulations des inégalités. « Être croissant/décroissant » a un vrai sens pour la classe, les schémas et les définitions ont été vus et revus, et travaillés pour y mettre du sens. Le fait de revenir plusieurs fois sur ces démonstrations a créé des automatismes, comme prendre deux variables ordonnées en début de preuve ou la nécessité de faire attention à l'intervalle sur lequel on travaille. Cela les aidera sans doute dans la suite de leur parcours dans l'étude de fonctions plus complexes.

---

2 À ce moment-là elles étaient travaillées en troisième avec des règles comme « si on multiplie par un réel négatif non nul une inégalité le signe de l'égalité change »

En conclusion

Après nos échanges autour de ces preuves lors des séances du groupe, chacun·e repart nourri·e de ces discussions et se les approprie éventuellement de façon différente. Nous partageons certains fondamentaux. Il est tout d'abord effectivement important de trouver d'autres modalités de travail autour de la preuve qu'une classique présentation par l'enseignant·e qui rédige et commente au tableau. Ensuite, discuter, entre élèves ou avec l'enseignant·e, de preuves construites ou rédigées par les élèves ou par l'enseignant·e prend du temps, mais est pertinent pour l'apprentissage. Enfin, à partir d'un travail explicite sur la formulation des preuves, il est possible d'associer certaines routines de rédaction à des structures des propriétés à démontrer, mais sans imposer de canevas rigide.

Nous entendons l'idée de démonstration « exemplaires » comme des démonstrations qui, au-delà du résultat mathématique qu'elles prouvent, sont l'occasion d'apprendre quelque chose sur la preuve. Reste tout un travail à faire pour penser et organiser ce « quelque chose ». Notamment, nous souhaitons poursuivre le travail autour de l'idée de progression, qui irait du collège au lycée : comment pouvons-nous organiser une progression dans l'apprentissage de la preuve, et quelles sont les occasions, dès le collège, d'avancer dans cette progression ?

Bibliographie

Alagroute F., Houdebine, J., Mary M-N. et Paugam A. (2004) *La démonstration au collège. Quelles tâche ? Quels outils ?* IREM de Rennes.

Balacheff, N. (1987) Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*, pp. 147-176.

Équipe académique Mathématiques (2003) *Initiation au raisonnement*. Académie de Bordeaux.
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

Gandit, M. (2010) Il est urgent de repenser l'enseignement de la preuve. In A. Kuzniak et M.Sokhna (Éds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*, *Dakar, 2009. Revue Internationale Francophone*, numéro spécial, pp. 425-436.

Groupe collège de l'IREM de Marseille (2011) *Enseigner la démonstration au collège*. IREM de Marseille.
http://numerisation.univ-irem.fr/MA/IMA12003/IMA12003.pdf

Hache, C. et Mesnil, Z. (2015) Pratiques langagières et preuves. *XXIIIe Colloque CORFEM*, Juin 2015, Nîmes, France.

MEN (2009) *Raisonnement et démonstration.* Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e} et 3^{e} du collège. Eduscol.

MEN (2016) *Raisonner.* Compétences travaillées en mathématiques, ressource pour le cycle 4. Eduscol.

MEN (2019a) *Programme de mathématiques de seconde générale et technologique.* BO de l'éducation nationale du 20 janvier 2019.

MEN (2019b) *Raisonnement et démonstration*. Ressource pour la classe de Seconde, mathématiques. Eduscol.

Annexe 1 : différentes preuves

Différentes preuves de la propriété « Le projeté orthogonal du point M sur une droite D est le point de la droite D le plus proche du point M »

Preuve 1 :

Soient D une droite et M un point du plan. On appelle H le projeté orthogonal de M sur D.

— Premier cas : si M est un point de D, alors H=M et donc MH=0.

— Deuxième cas : supposons donc que M n'appartient pas à D. Soit B un point sur D, avec $B \neq H$.
MBH est un triangle rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :
$MB^2 = MH^2 + HB^2$ donc $MB^2 > MH^2$.
Puisque $MB > 0$ et $MH > 0$, on a donc $MB > MH$.
Conclusion : pour tout point B de D différent de H, projeté orthogonal de M sur D, on a MB>MH.
Donc MH est la plus petite distance de M à la droite D.

Preuve 2 :

Soit H le projeté orthogonal de M sur D. Alors H appartient à D.
Montrons que pour tout point B de D, $BM \geqslant HM$.
Soit B un point de D. Dans le triangle BMH rectangle en H, on a :
$BM^2 = BH^2 + HM^2$ donc $BM = \sqrt{BH^2 + HM^2}$
or $BH^2 + HM^2 \geqslant HM^2 \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$
Donc $BM \geqslant HM$.

Preuve 3 :

Soient M un point et D une droite du plan. Notons H le projeté orthogonal de M sur D.

— Si M appartient à D, alors M=H et si B appartient à D, B distinct de H, alors BM=BH>0=HM.

— Si M n'appartient pas à D, MH>0. Soit B appartenant à D.
Alors BHM est un triangle rectangle en H, l'égalité de Pythagore est donc vérifiée dans ce triangle et $BM^2 = BH^2 + HM^2 > HM^2$ car $BH^2 > 0$.
$BM^2 > HM^2$ donc $BM^2 - HM^2 > 0$, et donc $(BM - HM)(BM + HM) > 0$
or $BM + BH$, somme de deux distances, est positif, donc $BM - BH > 0$ et $BM > BH$.
Conclusion : H est le point de la droite D le plus proche du point M.

Preuve 4 :

Soit D une droite du plan et soit M un point du plan. Appelons H le projeté orthogonal de M sur D.

On veut donc montrer que H est le point de D le plus proche de M, c'est-à-dire que tous les autres points sont plus loin de M, c'est-à-dire pour tout point B de D distinct de H, MB>MH.

H est le projeté orthogonal de M sur D donc (MH) est perpendiculaire à D.

H et B appartiennent à D, donc D=(HB) et (HB) est perpendiculaire à (MH),

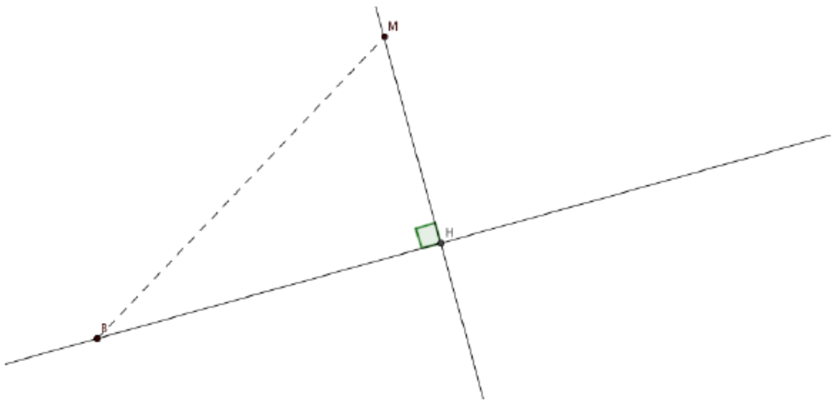
et donc le triangle MHB est rectangle en H.

Or, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

Ici, l'hypoténuse est MB, donc MB>MH.

On a donc bien montré que quel que soient le point M et la droite D du plan, le projeté orthogonal de M sur D est le point de D le plus proche de M.

Preuve 5 :



Soit B appartenant à D, étudions la distance BM.

Par définition de H, le triangle MHB est rectangle en H. On peut écrire l'égalité de Pythagore :

$MB^2 = MH^2 + HB^2$.

H étant donné, la distance MB ne dépend donc que de HB.

La distance MB est donc minimale quand HB est minimale, c'est-à-dire quand H=B.

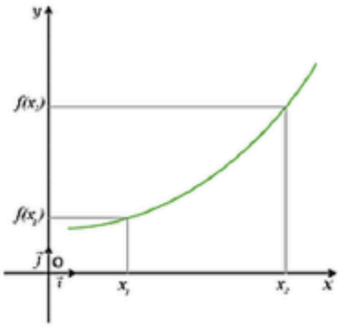
Le projeté orthogonale H est donc le point de la droite D le plus proche de M.

Annexe 2 : activités sur les variations de la fonction carré

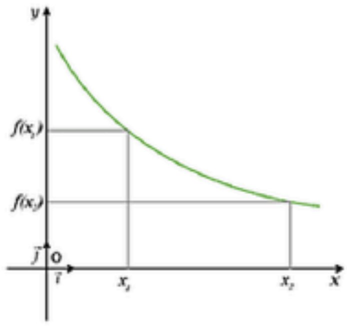
Activité Variations de fonctions usuelles :

Rappel de la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante

Définitions : - Dire que f est croissante sur un intervalle I signifie que: Pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ - Dire que f est décroissante sur un intervalle I signifie que: Pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ - Si f est croissante ou décroissante sur un intervalle I on dit qu'elle est monotone sur I.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Partie 1 : Le but de cette partie est de démontrer la propriété suivante :

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$. (a et b réels) Si $a > 0$, alors f est croissante. Si $a < 0$, alors f est décroissante.

1. Montrer que la fonction f définie sur R par $f(x) = -2x + 10$ est décroissante.
2. Montrer que la fonction f définie sur R par $f(x) = 2x + 10$ est croissante.
3. Conjecturer les variations de la fonction f définie sur R par $f(x) = -2x - 10$ puis le démontrer.
4. Conjecturer les variations de la fonction f définie sur R par $f(x) = 2x - 10$ puis le démontrer.
5. Cas général : Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$. (a et b réels)
   a. Supposons que $a > 0$, montrer que f est croissante.
   b. Supposons que $a < 0$, montrer que f est décroissante.

Etude des variations de fonctions.

1) a. Rappel : Donner les variations de la fonction carrée définie sur R par $f(x) = x^2$.
   b. Démontrer ce résultat.
2) a. Conjecturer les variations de g fonction définie sur R par $g(x) = ax^2$, où a est un réel quelconque.
   b. Démontrer ce résultat.
3) a. Conjecturer les variations de h définie sur R par $h(x) = x^2 + c$, où c est un réel quelconque.
   b. Démontrer ce résultat.
4) a. Conjecturer les variations de la fonction j définie sur R par $j(x) = ax^2 + c$, où a et b sont des réels quelconque.
   b. Démontrer ce résultat.