Raisonner, prouver, démontrer … quelles fonctions dans l'enseignement et de formation ?

Richard CABASSUT Université de Strasbourg IREM de Strasbourg LISEC EA 2310, Antoine FENECH Collège International de l'Esplanade Strasbourg IREM de Strasbourg

Résumé. Cet atelier étudie des tâches de démonstration dans des exemples, du primaire au supérieur : démonstrations issus des rapports de jurys des concours de recrutement du secondaire, des démonstrations issus des programmes et ressources officiels du second degré, des situations de formation propices à la réflexion sur le raisonnement et la démonstration.

Avant de présenter les différents corpus sur la démontrations qui seront étudiés dans l'atelier, nous allons préciser quelques éléments de cadre théorique qui permettront d'outiller cette étude, d'une part les raisonnements et démonstrations présents dans les programmes du secondaire, d'autre part les différentes fonctions qui peuvent leur être assignées.

Raisonnements et démonstrations dans le secondaire

Raisonner est une des six compétences principales de l'enseignement des mathématiques dans le secondaires et un document ressources du Ministère définit le raisonnement en ces termes « raisonnement, processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions » (MEN 2016). On pratique essentiellement ces raisonnements dans deux types de moments : d'abord dans la phase de recherche de la démonstration, puis dans la phase d'exposé de la démonstration, ces deux phases pouvant s'entre-mêler.

Raisonnements inductifs et abductifs

> Les raisonnements inductifs et abductifs, essentiellement mis en œuvre dans la phase de recherche, permettent d'aboutir à l'émission de conjectures qu'il s'agira ensuite de valider ou d'invalider. Si la production d'un contre-exemple suffit à invalider une conjecture, sa validation repose sur une démonstration, moyen mathématique d'accès à la vérité [...] Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie. Le raisonnement abductif consiste à présumer une cause plausible d'un résultat observé. Il fonctionne selon le schéma suivant : » (Ibidem, p.1)

pour démontrer que A est plausible, sachant que (A implique B) est vraie, on va démontrer que B est vraie[1]. Ce raisonnement est notamment effectué lorqu'on accumule des arguments renforçant la plausibilité d'une conjecture. Il est typiquement le raisonnement effectué dans des situations expérimentales (notamment les sciences expérimentales) où la plausibilité d'une cause est renforcée par la réalisation des effets. Avec l'utilisation des TIC qui renforce

---

1 Nous corrigeons la version incorrecte du document ressource (MEN 2016).

le caractère expérimental des mathématiques, notamment dans la phase de recherche, ce raisonnement est très fréquent. Polya (1957, p.113-121) encourage ces raisonnements dans la phase de recherche.

Raisonnements déductifs

Dans la scolarité obligatoire on peut repérer les raisonnements déductifs élémentaires suivants :

> - la déduction proprement dite (ou règle de détachement ou modus ponens), qui fonctionne selon le schéma suivant : sachant que (A implique B) est vraie et que A est vraie, on conclut que B est vraie. Le premier pas d’une déduction consiste à reconnaître une situation de référence A (une configuration géométrique, une situation de proportionnalité, une propriété de nombres, etc.) ; le second consiste à appliquer le théorème qui stipule que (A implique B) ;
> - la disjonction de cas, qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que (A implique B), on sépare l’hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l’implication est vraie dans chacun des cas ;
> - le raisonnement par l’absurde (reductio ad absurbum) qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que A est vraie, on suppose qu’elle est fausse et par déduction on aboutit à une absurdité » (MEN 2016, p.2).

Au lycée dans certaines spécialités etdans le supérieur le raisonnement par récurrence viendra compléter la panoplie des raisonnements déductifs disponibles. Dans l’exposé d’une démonstration, seuls les raisonnements déductifs assurent la nécessaire vérité de la conclusion, même si dans la pratique Cabassut (2007) a montré que beaucoup de démonstrations de l’enseignement secondaire mêlent raisonnements déductifs et raisonnements non déductifs.

On peut donc distinguer les raisonnements de plausibilité qui assurent la plausibilité d’une affirmation, au moyen d’un mélange de raisonnements inductifs, abductifs et déductifs, et les raisonnements de nécessité qui assurent qu’une proposition est nécessairement vraie au moyen des seuls raisonnements déductifs (Cabassut 2007)

Le raisonnement dans les programmes officiels

Le raisonnement en cycle 4

Les formes de raisonnements choisis dépendent des fonctions de ces raisonnements, c’est-à-dire à quoi ils servent, pour quelles raisons ils sont conduits. Nous allons repérer dans les textes des programmes puis dans quelques travaux de recherche ces fonctions principales.
Les programmes officiels du cycle 4 décrivent les attendus sur le raisonnement en ces termes :

> La formation au **raisonnement** et l’initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique, mais également mise au point d’un programme qui doit tourner sur un ordinateur ou pratique de jeux pour lesquels il faut développer une stratégie gagnante, individuelle ou collective, ou maximiser ses chances). Les **pratiques d'investigation (essai-erreur, conjecture-validation,** etc.) sont essentielles et peuvent s’appuyer aussi bien sur des manipulations ou des recherches papier/crayon, que sur l'usage d’outils numériques (tableurs, logiciels de géométrie, etc.). Il est important de ménager une progressivité dans l’apprentissage de la démonstration et de **ne pas avoir trop d’exigences concernant le formalisme** (MEN 2015, p.366)

> Raisonner
> Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.
> Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
> Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.
> Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation. (MEN 2015, p.368)

On voit apparaître différentes fonctions : raisonner pour apprendre à démontrer, raisonner pour résoudre des problèmes en mobilisant des connaissances, raisonner pour chercher (investiguer) en échangeant des arguments, raisonner pour conclure en utilisant des règles établies ou de logique, raisonner pour défendre un point de vue en utilisant des résultats établis et en argumentant.

Le raisonnement en seconde

Le programme de seconde continueà envisager les moments d'expérimentatio et les moments de démonstration MEN 2019).

> **Raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
> Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.
> L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement le dialogue entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.

Comparaison seconde et première spécialité mathématiques

Comparons les contenus de seconde générale et de première spécialité mayhématiques quant au raisonnement (MEN 2019).

Seconde	Première Spécialité Mathématiques
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves rencontrent via des exemples : - les connecteurs logiques « et », « ou » ; - les quantificateurs universel et existentiel (les symboles ∀ et ∃ sont hors programme) ; - des implications et équivalences logiques ; - la réciproque d'une implication ; - l'utilisation d'un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; - des raisonnements par disjonction des cas, des raisonnements par l'absurde. Ils distinguent le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, indéterminée, inconnue, paramètre).	Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à : - utiliser les connecteurs logiques « et », « ou » ; - identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, indéterminée, inconnue, paramètre) ; - utiliser les quantificateurs en langage naturel (les symboles ∀ et ∃ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; - manipuler des implications et des

équivalences logiques, employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- distinguer une proposition de sa réciproque ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- utiliser des raisonnements par disjonction des cas, des raisonnements par l'absurde, par contraposition.

Alors que la logique du cycle 4 semblait se cantonner à la logique des propositions, on voit apparaître ici des éléments de la logique des prédicats avec l'apparition des quantificateurs.

Les fonctions du raisonnement

Pour répondre à la question « pourquoi raisonner dans l'enseignement des mathématiques ? » nous nous appuierons essentiellement sur des travaux qui ont étudié les fonctions de la démonstration : De Villiers (1990) dans l'institution mathématique et Hanna (1995, 2000). Nous proposonsdégageons les cinq fonctions principales du raisonnement dans la classe d emathématoques

Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition par un raisonnement de plausibilité ou par un raisonnement
explication	fournir un aperçu de pourquoi la proposition est vraie
Systématisation (incorporation, entraînement)	organiser des connaissances en système déductif, incorporer des connaissances nouvelles, utiliser des connaissances anciennes
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances

Consignes des groupes d'atelier

Les participants à l'atelier sont répartis en groupes sur les thèmes suivants détaillés en annexes :
A : démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle au collège dans un livre ;
B : démonstration dans le programme de cycle 4 ;
C : démonstration au CAPLP ;
D : démonstration dans le programme de première, spécialité mathématiques ;
E : démonstration au CAPES ;
F : démonstration au Jeu de Go.

La consigne indiquée aux participants est la suivante :

> Chaque groupe doit proposer un texte de démonstration en repérant ses fonctions, scénariser dans l'enseignement ou la formation la production de ce texte de

démonstration, préparer un compte rendu de sa réflexion (5 min, affichage par vidéo-projecteur bienvenu).

Résultats

Les différents groupes n'ont pas produit de textes de démonstration, de scénarisation de la production de ces textes et d'analyse des fonctions. Ils se sont contenté d'explorer les documents proposés en échangeant à partir de ces documents. Il semble que l'atelier était trop ambitieux compte tenu du temps imparti. Pour un prochain atelier il faudrait peut-être découper la consigne en sous-tâche et prévoir un moment collectif après chaque sous-tâche. Peut-être également il faudrait que chaque groupe traite le même thème, même si l'hétérogénéité des participants rend difficile le choix d'un thème commun. On pourra approfondir la réflexion avec (Cabassut 2011, 2018).

Références bibliographiques

L'abréviation « MEN » désigne « Ministère de l'Education Nationale »

Cabassut, R. (2007). Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. *Séminaire national de didactique des mathématiques.* 23-24 mars 2007. Paris. France.

Cabassut R. & al. (2011) Conceptions of proof – in research and in teaching. Proof and Proving in Mathematics . G. Hanna and M. de Villiers (eds.). New ICMI Study Series 15. Springer.

Cabassut R. (2018) L'enseignement de la démonstration en géométrie en Allemagne. In Dorier J.-L., Gueudet G., Peltier M.-P., Robert A., Roditi F. (dir.) Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage. Paris : Belin.

MEN (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin officiel spécial n° 11* du 26 novembre 2015.

MEN (2016). Compétences travaillées en mathématiques. Raisonner. Téléchargé le 12/03/19 à http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

MEN (2018a). CAPES Externe de Mathématiques : rapport de jury. Ministère de l'Education Nationale. Téléchargé le 12/03/19 à : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/externe/34/0/rj-2018-capes-externe-mathematiques_1009340.pdf

MEN (2018b). CAPLP Externe de Mathématiques et Sciences : rapport de jury. Ministère de l'Education Nationale. http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/3e_concours/70/0/rj-2018-troisieme_concours-maths-physique-chimie_1000700.pdf

MEN (2019). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale. Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019.

Polya, G. (1957). *How To Solve It.* Princeton University Press, 1957 http://www.im.ufrj.br/~monica/funcoes/Polya.pdf

Annexes

A : démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle au collège dans des livres

Consigne : 1) Indiquer les types de raisonnements attendues

2) Préciser si la validation attendue constitue une démonstration mathématiques.

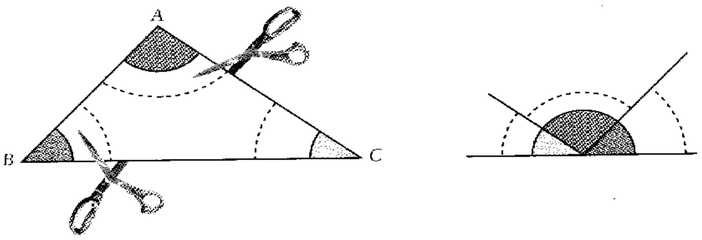
3) Précisez les fonctions de ces validations.

1) Proposez une validation attendue d'après l'énoncé ci-dessous extrait du manuel collection « Nouveau Transmath », 1997.

① En découpant

a. Trace sur papier blanc un triangle ABC comme celui dessiné ci-dessous.

b. Découpe chacun de ses angles, puis « regroupe »-les comme l'indique le dessin ci-dessous.



c. Quelle semble être la valeur de la somme des angles du triangle ?

② En mesurant avec ton rapporteur

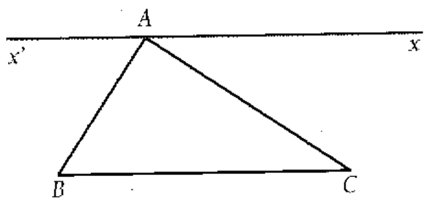
a. Trace trois triangles.

b. Mesure les angles de chacun de ces triangles à l'aide d'un rapporteur, puis calcule la somme des angles de chaque triangle.

c. Quelle semble être la valeur de cette somme ?

③ Une démonstration à présent

La droite $(x'x)$ est parallèle à la droite (BC) et passe par A.



a. Compare les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAx'}$, puis $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAx}$.

b. Explique alors pourquoi la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180°.

④ Applications

a. Quelle est la mesure de chaque angle d'un triangle équilatéral ?

b. ABC est un triangle rectangle en A.

Explique pourquoi les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.

2) Proposez une validation attendue d'après l'énoncé ci-dessous extrait du manuel Sesamath 2016 cycle 4. Comparez là à la précédente.

24 Angles et triangle

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis un triangle ABC et la parallèle (EF) à la droite (BC) passant par A.

b. Affiche les mesures des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABC}$.

c. Déplace les points A, E et F pour que $\widehat{EAB} = \widehat{ABC}$. Que constates-tu ?

d. Montre que $\widehat{FAC} = \widehat{ACB}$.

e. Quelle propriété connue sur les triangles peux-tu alors démontrer ?

B : démonstration de cycle 4, extrait de (MEN 2016)

Consigne : préciser quelle démonstration est attendue et quelles fonctions remplit cette démonstration.

Multiples et diviseurs

Exemple de problème

La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84). Peut-on affirmer que, si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Commentaire

Infirmation par production d'un contre-exemple.

Proportionnalité

Exemple de problème

On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %. Comment varie son aire ?

Commentaire

L'élève peut raisonner de manière inductive en fixant des valeurs numériques pour la longueur et la largeur et faire varier ces valeurs

Raisonnement déductif par application d'un pourcentage.

Nombres décimaux

Exemple de problème

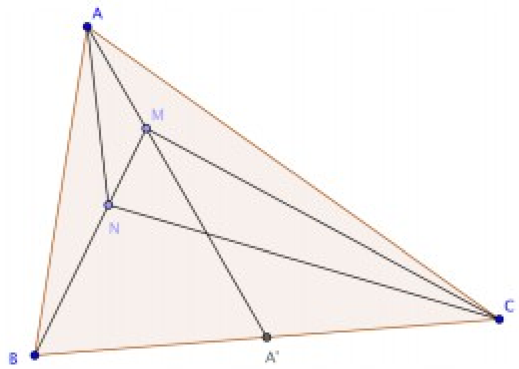
Existe-t-il un nombre décimal dont le carré est égal à 2 ?

Commentaire

Une démarche inductive basée sur des essais (à la main puis à la calculatrice) permet d'émettre la conjecture qu'il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 2. Cette conjecture est ensuite démontrée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et disjonction de cas.
On montre d'abord qu'il n'existe aucun nombre entier dont le carré est égal à 2.
Puis, en distinguant les différentes valeurs qu'aurait sa dernière décimale, on montre qu'il n'existe aucun nombre décimal non entier dont le carré est égal à 2.

Exemple de problème

Où positionner le point M à l'intérieur du triangle ABC pour que les triangles AMB et AMC aient la même aire ?



Commentaire

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer une condition suffisante : l'appartenance de M à la médiane [AA'].

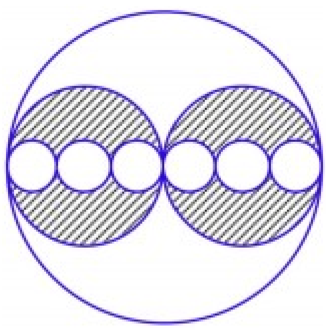
Démonstration par les aires (lemme du chevron).

Démonstration de la condition nécessaire par un raisonnement par l'absurde : on suppose que N n'appartient pas à la médiane [AA'] (en étant par exemple à l'intérieur du triangle ABA'), on note M le point d'intersection de (BN) et (AA') et on compare les aires des triangles ANB, AMB, AMC, ANC.

Fractions, aire du disque

Exemple de problème

A quelle fraction du grand disque correspondent les six petits disques ? A quelle fraction du grand disque correspond la surface hachurée ?



Vitesse

Exemple de problème

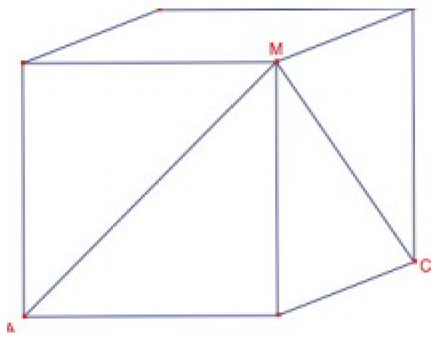
Un funiculaire monte du pied d'une colline à son sommet à la vitesse moyenne de 14 km/h.

Le conducteur peut-il régler la vitesse lors de la descente pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours soit de 28 km/h ?

Géométrie dans l'espace

Exemple de problème

Sur un cube, on a tracé deux diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



Commentaire

Identification d'une figure plane à l'intérieur d'une configuration de l'espace.

Géométrie, Équations

Exemple de problème

Deux tours, hautes de 30 et 40 mètres sont distantes l'une de l'autre de 50 mètres. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse en ligne droite avant de se rejoindre au sol. En quel point se rejoignent-ils ?

Commentaire

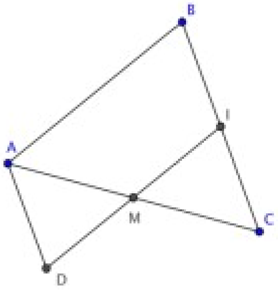
Modélisation de la situation.

Raisonnement déductif à travers l'utilisation du théorème de Pythagore.

Géométrie plane

Exemple de problème

A, B, C sont trois points non alignés, I est le milieu de [BC] et D est le point tel que ABID est un parallélogramme. Pourquoi le milieu M de [ID] est-il également le milieu de [AC] ?



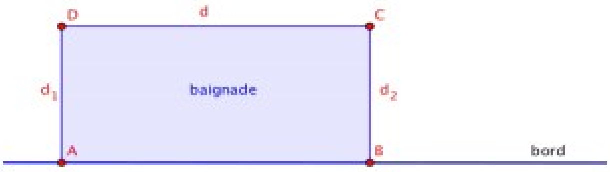
Commentaire

Raisonnement déductif utilisant des propriétés du parallélogramme.

Approche de la notion de fonction

Exemple de problème

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de long pour délimiter une zone de baignade surveillée rectangulaire. Où doit-il placer les bouées A et B pour que l'aire de la zone de baignade soit maximale ?



Commentaire

Utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice pour une approche numérique.

Modélisation algébrique.

Calcul littéral

Exemple de problème

Peut-on écrire 2016 comme somme de quatre entiers consécutifs ? Et 2018 ? Et ton année de naissance ?

C : démonstration au CAPLP , extrait de (MEN 2018 b)

Consigne : Dans la liste des démonstrations proposées à l'oral du concours de CAPLP, choissez-en une, et précisez comment vous procèderiez pour la démonstration choisie, et quelles fonctions vous assigneriez à cette démonstration.

ANNEXE 1 : thèmes mathématiques abordés dans les sujets de la session 2018 et liste de démonstrations réalisées par les candidats

Thèmes mathématiques	**Démonstrations**
Indicateurs de tendance centrale et de dispersion pour une série statistique à une variable	Calcul de la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes Soit une série statistique prenant N valeurs x_i, la moyenne de cette série est la valeur de a qui minimise $\sum_{i=1}^{N} \frac{(a-x_i)^2}{N}$
Ajustements affines pour une série statistique à deux variables	Si $y_i = ax_i + b$ alors $\mathrm{Var}(Y) = a^2.\mathrm{Var}(x)$ Le point moyen d'un nuage de points appartient à la droite d'ajustement déterminée par la méthode des moindres carrés.
Fluctuation d'une fréquence relative à un caractère, selon des échantillons de taille fixée	Si la variable aléatoire X_n suit la loi $B(n, p)$, alors pour tout $\alpha \in]0\,,1[$ on a $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$$ où I_n désigne l'intervalle $$[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$$ où u_α désigne le nombre réel tel que $$P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$$ avec Z qui suit la loi normale $N(0; 1)$ (On admet le théorème de Moivre Laplace.) L'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient l'intervalle $$[p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$$

D : démonstration dans le programme de première, spécialité mathématiques, extrait de (MEN 2019)

Choisissez une démonstration, produisez le texte attendu de la part d'un élève et précisez les fonctions de cette démonstration.

Auriez-vous des démonstrations à proposer en probabilité auxquelles vous appliqueriez le même questionnement?

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + \cdots + n$.
- Calcul de $1 + q + \cdots + q^n$.

- Résolution de l'équation du second degré.

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.

- Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

- Calcul de $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$.

- Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (démonstration avec le produit scalaire).
- Transformations de $MA^2 + MB^2$ et de $MA^2 + MB^2 + MC^2$.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

E : démonstration au CAPES ; extrait de (MEN 2018 a)
CONSIGNE :
Analysez les productions de ces élèves.
Constituent-elles des démonstrations ?
Quelle serait une démonstration attendue ? Quelles seraient ses fonctions ?

L'exercice

Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous. Les hommes ont payé 19 sous chacun, les femmes 13. Combien y avait-il d'hommes et de femmes ?

Extrait des *Éléments d'algèbre* d'Euler.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

Élève 1

Soit x *le nombre d'hommes et* y *le nombre de femmes, on aura l'équation* $19x + 13y = 1000$.

Cela donne $y = \frac{1000 - 19x}{13} = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}$.

Par conséquent $12 - 6x$ *est divisible par 13, donc* $2 - x$ *l'est.*
D'où $x = 2$ *car* $2 - x$ *est un entier naturel donc positif et par conséquent* $y = 74$.
Il y avait donc 2 hommes et 74 femmes, j'ai vérifié, ça marche.

Élève 2

J'ai écrit l'algorithme ci-dessous et je l'ai testé :

```
pour x allant de 1 à 52 faire
    pour y allant de 1 à 52 faire
        si 19 * x + 13 * y = 1000 alors
            Afficher (x, y)
        fin
    fin
fin
```

J'obtiens comme affichage : (28,36) et (41,17).
J'ai vérifié ces résultats et c'est bon mais je ne pense pas que ce soit une démonstration.

L'exercice

Une espèce protégée d'oiseaux niche sur une île. On a constaté que sa population diminue de 10 % chaque année. Une association tente de limiter cette diminution en introduisant sur l'île 100 oiseaux chaque année. En 2018, on recense 1 600 oiseaux.
À ce rythme, la population passera-t-elle sous la barre des 1 100 oiseaux? Sous celle des 1 000 oiseaux? Justifier.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

	A	B	C	…	S	T	…	FV	FW
1	*Année 2018 + n*	*2018*	*2019*	…	*2035*	*2036*	…	*2194*	*2195*
2	*n*	*0*	*1*	…	*17*	*18*	…	*176*	*177*
3	*oiseaux*	*1600*	*1540*	…	*1100,06309*	*1090,05678*	…	*1000,00001*	*1000*
4	*oiseaux-1000*	*600*	*540*	…	*100,06309*	*90,05678*	…	*0,00001*	*0*

J'ai utilisé un tableur. Je constate que la population d'oiseaux passera en-dessous de la barre des 1100 oiseaux en 2036 et qu'elle atteindra les 1000 oiseaux en 2195 et se stabilisera. Je pense donc qu'elle ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux. Je peux donc retrancher 1000 dans la ligne 4 *et j'obtiens une suite géométrique de raison* $0,9$. *Comme elle tend vers 0, cela prouve ma conjecture.*

Élève 2

J'ai programmé un algorithme sur ma calculatrice.
En donnant à la variable S la valeur 1100, j'obtiens 18; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux en 2036.
En donnant à la variable S la valeur 1000, j'obtiens 199; j'en déduis que la population passera sous la barre des 1000 oiseaux en 2217.

Élève 3

J'ai utilisé la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{10}{100}u_n + 100$.

Le tableau de valeurs de ma calculatrice me permet d'affirmer que la population passera sous la barre des 1100 oiseaux, par exemple en 2037, mais ne passera pas sous la barre des 1000 oiseaux.

L’exercice

Imaginons qu’une calculatrice comporte une nouvelle touche, nommée ❀, qui double le nombre saisi puis retranche 1. J’entre un nombre x et j’appuie n fois sur cette touche ❀.

1. En fonction de x et n, conjecturer l’expression obtenue après avoir appuyé n fois sur la touche ❀.
2. Démontrer votre conjecture.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

1. *Je trouve* $2x-1$ *après avoir appuyé 1 fois sur* ❀, $4x-1$ *après avoir appuyé 2 fois sur* ❀, $8x-1$ *après avoir appuyé 3 fois sur* ❀.
   Je conjecture qu’après avoir appuyé n fois sur la touche ❀ *on obtient* $2^n x-1$.
2. *Pour* $n=1$ *on a* $2^n x-1=2x-1$, *et si on part de* $2^n x-1$ *alors en appuyant encore une fois sur la touche* ❀ *on obtient* $2\times 2^n x-1$ *donc* $2^{n+1}x-1$. *Ce qui permet d’établir la conjecture.*

Élève 2

1. *Je note* r_n *le résultat obtenu après avoir appuyé n fois sur la touche* ❀.
   Je pars de $r_1=x$, *donc après avoir appuyé 1 fois sur* ❀ *j’obtiens* $r_2=2x-1$.
   Puis $r_3=2r_2-1$ *donc* $r_3=2^2x-2-1$.
   Puis $r_4=2r_3-1$ *donc* $r_4=2^3x-2^2-2-1$.
   On peut conjecturer que : $r_n=2^{n-1}x-2^{n-2}-2^{n-3}-\ldots-2-1$.
2. *Je vais démontrer par récurrence la conjecture ci-dessus.*
   Pour $n=2$ *la formule conjecturée donne :* $r_2=2x-1$ *donc la propriété est vraie au rang 2.*
   Supposons la vraie pour tout entier n fixé, on a alors $r_{n+1}=2r_n-1$
   donc $r_{n+1}=2(2^{n-1}x-2^{n-2}-2^{n-3}-\ldots-2-1)-1$ *donc* $r_{n+1}=2^n x-2^{n-1}-2^{n-2}-\ldots-2-1$.
   Donc la propriété est héréditaire.
   Le principe de récurrence permet alors de dire que la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

F : Jeu de Go et raisonnement

Noir peut-il capturer Blanc ? En combien de coups minima?

Quelles démonstrations attendues et avec quelle rédaction ?

Quelles fonctions de ces démonstrations ?