LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE A LA TRANSITION LYCEE-UNIVERSITE

Denis GARDES, Marie-Line GARDES, IREM de Dijon, IREM de Lyon

Résumé. Dans cet article, nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde. Nous proposons deux formes de raisonnement par l'absurde que nous illustrons par des exemples. Nous analysons ensuite, d'un point de vue didactique, les définitions et exemples proposés dans des manuels de terminale scientifique. Enfin, nous exposons quelques points de vigilance et quelques pistes pour l'enseignement du raisonnement par l'absurde en classe.

Dans cet article[1], nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde mené par un sous-groupe de la C2i Lycée. Pour certains mathématiciens et philosophes, le raisonnement par l'absurde peut toujours être remplacé par un raisonnement direct (Gardies, 1991; Lombardi, 1997). Cependant, d'autres précisent que ce raisonnement peut raccourcir ou simplifier de manière significative une démonstration ou la rendre plus convaincante (par exemple (Lombard, 1996) ou un petit texte de Bkouche disponible en ligne[2]). Le raisonnement par l'absurde présente alors de multiples intérêts, tant pour son efficacité dans certaines démonstrations que pour son apport dans la compréhension de concepts logiques. Du point de vue didactique, il nous a semblé intéressant de questionner la pertinence ainsi que la place et le rôle du raisonnement par l'absurde, en tant qu'outil de preuve d'une part, et en tant qu'objet d'apprentissage de la logique d'autre part (Bernard, Gardes, Gardes, & Grenier, 2018).

Dans une première partie, nous présentons différentes formes du raisonnement par l'absurde, illustrées par des exemples. Dans une seconde partie, nous analysons, dans des extraits de manuels scolaires, les définitions et les exemples proposés ainsi que leur articulation. Cette analyse s'appuie en partie sur le travail des participants à l'atelier. Enfin, dans une troisième partie, nous donnons quelques points de vigilance pour l'enseignement du raisonnement par l'absurde au lycée. En conclusion, nous proposons quelques pistes, non encore testées dans les classes, qui nous semblent pertinentes pour travailler ce raisonnement en classe.

Le raisonnement par l'absurde : principe et exemples

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation entraîne la vérité d'une proposition que l'on sait fausse. Ce raisonnement repose sur :

- le principe du tiers exclu (une proposition ou sa négation est vraie) ;
- le principe de non-contradiction (la conjonction d'une proposition et de négation est une proposition fausse).

Ainsi, pour démontrer qu'une proposition A est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que sa négation (*non* A) est fausse.

[1] Ce texte s'appuie sur celui de l'article publié par les auteurs dans la revue *Petit x 108* (Bernard et al., 2018).

[2] http://michel.delord.free.fr/rb/rb-absurd.pdf

Nous pouvons distinguer deux cas (Bernard et al., 2018) :

(1) [(*non A*) → *C*] vraie et *C* fausse ou autrement dit [(*non A*) → *C*] et *non C*

(2) [(*non A*) → (*C et* (*non C*)] vraie ou autrement dit [*non A*) → (*C et* (*non C*)].

Nous allons illustrer chacun des deux cas selon que la proposition *A* est élémentaire ou non.

Cas où la proposition est élémentaire

Exemple 1 - cas (1) : 0 n'a pas d'inverse

Démonstration : On suppose que 0 a un inverse dans R. On le note *a*.
Par définition de l'inverse, $0 \times a = 1$.
Or pour tout réel *x*, $0 \times x = 0$. On en déduit que 0 = 1 qui constitue une proposition fausse.
On a bien le schéma (1) avec : *A* est la proposition [0 n'a pas d'inverse dans R] et *C* la proposition [0 = 1].

Exemple 2 - cas (1) : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration : On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. On les note p_1, $p_2,\dots,p_n$ et on considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. Par définition $N \geq 2$, il admet donc un diviseur premier appartenant à l'ensemble $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Soit p_i ce diviseur premier ($1 \leq i \leq n$). Alors, p_i divise *N* et $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, donc la différence de ces deux nombres qui est 1. On en déduit que $p_i = 1$ et que 1 est un nombre premier.
On a bien le schéma (1) avec : *A* est la proposition [l'ensemble des nombres premiers est infini] et *C* la proposition [1 est un nombre premier].

Exemple 3 - cas (2) : $\sqrt{2}$ *est irrationnel*

Démonstration : On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Il existe *p* et *q* deux entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et *p* et *q premiers* entre eux.
Ainsi $p^2 = 2q^2$, p^2 est alors divisible par 2 et par suite *p* est pair.
Il existe un entier *r* tel que $p = 2r$. On en déduit que $q^2 = 2r^2$, ce qui implique que *q* est pair.
Ainsi *p* et *q* ne sont pas premiers entre eux, étant pairs tous les deux.
On a bien le schéma (2) avec : *A* est la proposition [$\sqrt{2}$ est irrationnel] et *C* la proposition [*p* et *q* premiers entre eux].

Cas où la proposition est une implication

On rappelle que l'on veut démonter une proposition de la forme $P \rightarrow Q$. La négation de $P \rightarrow Q$ étant [*P et* (*non Q*)], on obtient les deux cas suivants, cas particuliers de (1) et (2) :
(1bis) [(*P et* (*non Q*)) → *C*] vraie et *C* fausse
(2bis) [(*P et* (*non Q*)) → (*C et non C*)] vraie

Exemple 4 - cas (1bis) : Quels que soient les entiers relatifs a et b, $a+b\sqrt{2} = 0 \rightarrow b = 0$.

Démonstration : On suppose qu'il existe *a* et *b* entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2} = 0$ et $b \neq 0$.
Ainsi $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ et est alors rationnel. Cette proposition est fausse.
On a bien le schéma (1bis) avec : *P* est [il existe *a* et *b* entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2} = 0$] , *Q* la proposition [$b = 0$] et *C* la proposition [$\sqrt{2}$ est rationnel].

Exemple 5 - cas (2bis) : Dans l'ensemble des suites réelles, si $u_0 > 1$ et $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$ alors (u_n) diverge.

Démonstration : On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$ et (u_n) converge (vers une limite notée L).
Comme $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout n, on en déduit $L^2 = L$, *c'est-à-dire* $L = 0$ ou $L = 1$. Ainsi on obtient $L \leq 1$.
D'autre part, la suite (u_n) est minorée par 1 (démonstration par récurrence immédiate) et est alors croissante. Sa limite vérifie $L \geq u_0 > 1$. On aboutit aux deux propositions : [$L \leq 1$] et [L<1].
Donc la suite (u_n) diverge.
On a bien le schéma (2bis) avec : P est [$u_0 > 1$ *et* $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$] et Q la proposition [(u_n) diverge] et C la proposition [L>1].

Notre étude de ces deux formes du raisonnement par l'absurde et des exemples qui les illustrent montre la richesse de ce raisonnement, comme outil de preuve d'une part, et comme objet d'apprentissage de la logique d'autre part. Ainsi, le raisonnement par l'absurde est particulièrement adapté pour démontrer des propositions élémentaires écrites sous forme négative. Par exemple, pour démontrer que zéro n'a pas d'inverse (exemple 1) ou que √2 n'est pas rationnel (exemple 3). Notons que les domaines mathématiques dans lesquels le raisonnement par l'absurde est largement utilisé sont l'arithmétique et la géométrie euclidienne non repérée, mais il est pertinent aussi pour l'étude des fonctions et de l'ensemble des nombres réels, et particulièrement adapté pour les problèmes concernant l'infini. Pour l'apprentissage de la logique et du raisonnement, le raisonnement par l'absurde présente de nombreux points d'intérêt. Premièrement, il mobilise de nombreux concepts de logique : proposition, négation d'une proposition, connecteurs (ET, OU), quantificateurs (quel que soit, il existe), etc. Deuxièmement, il nécessite de travailler sur une hypothèse fausse (la négation de la proposition à démontrer). Troisièmement, il permet d'aborder une proposition sous des points de vue opposés, ce qui élargit l'exploration et donc la connaissance de cette proposition.

Dans le cadre de notre recherche, nous nous sommes intéressés à ce qui peut être proposé aux élèves de lycée concernant le raisonnement par l'absurde. Pour cela, nous avons analysé les programmes et des documents institutionnels en vigueur en 2018, des manuels scolaires et des sujets de bac. Lors de l'atelier proposé à la CORFEM 2019, nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de certains manuels scolaires de lycée.

Analyse de quelques manuels scolaires

Nous proposons d'analyser certains manuels scolaires de Seconde, Première S et Terminale S à propos du raisonnement par l'absurde à partir des quatre critères suivants :

- **Critère 1 - Nature du raisonnement par l'absurde** : Quelle forme de ce raisonnement est donnée dans la définition ? Pour quel type de proposition ?
- **Critère 2 - Vocabulaire** : quel vocabulaire est employé dans sa formulation ou dans sa mise en œuvre ?
- **Critère 3 - Articulation définition/exemple** : Quel lien y-a-t-il entre la définition proposée et les exemples proposés ?
- **Critère 4 - Pertinence des exemples** : les exemples proposés vous semblent-ils pertinents à traiter par un raisonnement par l'absurde ?

Nous avons proposé des extraits des manuels suivants[3] : **Déclic**, Hachette, Terminale S (2012) ; **Indice**, Bordas, Seconde (2017) ; **Odyssée**, Hatier, Seconde (2014) ; **Math'x**, Didier, Seconde (2014) ; **Repères**, Hachette, Première S (2011) ; **Repères**, Hachette, Terminale S (2012).

Nous allons ici résumer les remarques formulées par les collègues qui ont travaillé en groupe de 3 ou 4 personnes sur les extraits d'une seule collection, complétées par nos propres analyses.

A propos du critère 1

Tous les manuels n'explicitent pas qu'un raisonnement par l'absurde sert à prouver qu'une proposition est vraie. On trouve par exemple comme définition :

> Le raisonnement par l'absurde consiste à émettre comme hypothèse le contraire du résultat escompté. (Odyssée Seconde 2014).

De même, ils ne précisent pas tous que lors d'un raisonnement par l'absurde, on suppose *non A* pour prouver *A*. Ainsi le manuel Déclic Terminale S (2012) ne précise pas que la négation de (*p implique q*) est (*p et non q*). Ceci est d'autant plus regrettable que cette négation est vraiment une difficulté pour les élèves et qu'elle est loin d'aller de soi.

Aucun manuel analysé n'explicite la contradiction obtenue en distinguant : soit qu'on aboutit à une proposition que l'on sait par ailleurs fausse, soit qu'on aboutit à une proposition et à sa négation. En témoignent les exemples suivants :

> Au lieu de prouver *p* implique *q*, on peut prouver que la conjonction *p* et *non q* conduit à une contradiction. (Déclic Terminale S, 2012)
> Montrer qu'une proposition P est vraie en raisonnant par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et à montrer qu'avec cette hypothèse, on aboutit à une contradiction. (Indice Seconde, 2017).

Enfin, aucun manuel analysé ne fait la distinction entre proposition élémentaire et proposition implicative. Très souvent, la formulation est très vague, comme « résultat attendu » (Odyssée Seconde, 2014) ou « une affirmation » (Repères Terminale S, 2012). Le manuel Déclic Terminale S (2012) est à ce sujet assez surprenant. Il propose une « définition » du raisonnement par l'absurde pour une proposition implicative et donne juste en-dessous un exemple pour une proposition élémentaire « l'ensemble I des nombres rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément. ». Les auteurs ont voulu transformé cette proposition élémentaire en une proposition implicative du type *P implique Q* avec P la proposition [I est l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 1] et Q la proposition [I n'a pas de plus petit élément]. Le problème de cette transformation est que ce que les auteurs notent comme proposition P n'est pas une proposition. Il s'agit seulement d'une notation, on note I l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à 1 (cf. figure 1).

[3] Cette étude a été réalisée avant les changements de programmes du lycée de 2018. Ces manuels portent tous sur les programmes de 2009.

Par l'absurde
Au lieu de prouver $p \Rightarrow q$, on peut prouver que la conjonction p et non (q) conduit à une contradiction.

EXEMPLE : On veut prouver l'ensemble I des nombres rationnels strictement supérieurs à 1 n' a pas de plus petit élément. On suppose l'existence d'un tel nombre rationnel qu'on nomme a. On construit alors le rationnel $b = \frac{1+a}{2}$. On a bien $b > 1$, donc $b \in I$, mais b est clairement plus petit que a, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « a est le plus petit élément de I ».
La preuve à produire est $I = \{x \in \mathbb{Q} / x > 1\} \Rightarrow I$ *n'a pas de plus petit élément.*
On a montré que $(I = \{x \in \mathbb{Q} / x > 1\})$ *et (I a un plus petit élément)* conduit à une contradiction.

Figure 1 – Extrait du manuel Déclic Terminale S (2012)

Nous pouvons remarquer que cet exemple est un exemple pertinent du cas (2) avec la proposition A qui est [l'ensemble I des nombres rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément] et la proposition C [il existe un nombre $b \geq a$] où a est le plus petit élément de I.

Un autre élément surprenant est la justification donnée par les auteurs du manuel Repères Terminale S (2012) de l'intérêt du raisonnement par l'absurde (cf. figure 2). Il lie cet intérêt au fait qu'il est parfois difficile de mener un raisonnement par disjonction de cas !

Il est parfois difficile de démontrer une affirmation en distinguant tous les cas possibles, et, dans certains cas il peut s'avérer judicieux de démontrer l'absurdité du contraire.
Cette démarche s'appelle le **raisonnement par l'absurde** :
- on suppose le contraire d'une propriété,
- on démontre que tout raisonnement fondé sur cette supposition **aboutit au moins à un cas absurde**,
- on en déduit que la proposition contraire est absurde et donc que la **propriété est vérifiée**.

Figure 2 – Extrait du manuel Repères Terminale S (2012)

A propos du critère 2

Tous les enseignants ont constaté que le vocabulaire employé par les manuels était en général peu rigoureux et que les termes comme proposition et négation étaient rarement d'usage. En effet, au lieu d'utiliser le terme « proposition » qui est au programme, les auteurs des manuels emploient d'autres terminologies comme « affirmation, résultat à démontrer, propriété, résultat attendu, énoncé, etc. ». Le vocabulaire n'est pas toujours stable. Un même manuel (par exemple Indice Seconde, 2017) peut ainsi employer plusieurs termes différents pour désigner une proposition quand il évoque le raisonnement par l'absurde (cf. figure 3).

Logique

Pour prouver qu'un énoncé est faux, on peut supposer qu'il est vrai, puis aboutir à une contradiction. Ce type de raisonnement est appelé **raisonnement par l'absurde.**

Logique

Un **raisonnement par l'absurde** consiste à démontrer une proposition en prouvant que la proposition contraire conduit à une absurdité.

Figure 3 – Extrait du manuel Indice Seconde (2017)

Le problème du vocabulaire est encore plus visible pour évoquer la négation d'une proposition. Le programme (ici pour l'analyse, celui de 2009) demande de savoir « formuler la négation d'une proposition ». Malgré cela, l'expression « contraire », voire « opposé » est employé (cf. par exemple Repères Terminale S, 2012 ou Odyssée Seconde, 2014).n mot, souvent employé sans être vraiment explicité, est absurdité. Qu'est-ce qu'un résultat absurde ? En mathématiques, une proposition est soit vraie, soit fausse. En aucun cas, on la dit absurde. Ceci est vraiment dommageable car cela laisse à penser aux élèves que le raisonnement par l'absurde est un raisonnement absurde, que l'on démontre n'importe quoi avec lui. Pour illustrer ceci, voici la définition d'un manuel (qui se passe de commentaires !) :

> Il peut s'avérer judicieux de démontrer l'absurdité du contraire. (Repères Terminale S, 2012)

A propos du critère 3

Là encore, il est difficile de repérer le lien entre la « définition » du manuel et sa mise en œuvre dans les exercices d'application. Comme la définition est peu claire, il est presque impossible de repérer, dans les exercices, la syntaxe du raisonnement par l'absurde. Un manuel a tenté de le faire (cf. figure 4).

Pour démontrer qu'une propriété (ou un résultat) est vraie on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**.

Étape 1 - On suppose que le résultat que l'on veut démontrer est faux (c'est-à-dire que le contraire est vrai).

Étape 2 - On utilise cette hypothèse : on effectue un raisonnement ou un calcul. On aboutit à **une absurdité**.

Étape 3 - On conclut : La propriété est vraie.

<u>Principe :</u> L'hypothèse faite à l'étape 2 conduit à une absurdité (une contradiction ou une impossibilité) donc cette hypothèse est fausse.

Exemples

Application concrète :

Mon professeur nous a dit qu'il ferait peut-être un contrôle lundi.
Malheureusement j'ai été malade ce jour-là et n'ai pas pu aller en cours.
En revenant mardi mes camarades m'ont dit ne pas avoir eu le contrôle.

Montrer que le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.

Application mathématique :

Montrer que pour tout $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Application concrète	Méthode	Application mathématique
Le professeur a fait son contrôle lundi.	On suppose que la conclusion est fausse.	Il existe un réel $x \neq -5$ tel que $\frac{2x-1}{x+5} = 2$.
Alors mes camarades me diraient l'avoir fait, ce qui est contradictoire.	On obtient une absurdité.	Alors $2x-1 = 2(x+5)$ soit $2x-1 = 2x+10$ d'où $-1 = 10$ ce qui est impossible.
Le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.	On conclut.	Pour tout un réel $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Figure 4 – Extrait du manuel Repères Première S (2011)

Décortiquer la syntaxe du raisonnement par l'absurde est louable mais l'exemple choisi est invraisemblable. Quel élève va comprendre ce raisonnement avec l'exemple concret donné ? De même, l'exemple mathématique n'est pas bien choisi. En effet, on peut raisonner par équivalence : $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2 \Leftrightarrow 2x-1 \neq 2(x+5) \Leftrightarrow -1 \neq 10$.

Nous avons également vu précédemment qu'un manuel (Déclic Terminale S, 2012) donnait la définition du raisonnement par l'absurde pour une proposition implicative et que l'exemple qui suit concerne une proposition élémentaire.

D'autre part, quand un raisonnement par l'absurde est mené dans un exercice, il n'est pas toujours explicité. Prenons le manuel Déclic Terminale S (2012). A la page 270, dans la rubrique « Exercices résolus », le théorème « du toit » est démontré. Dans la démonstration, les auteurs veulent démontrer que le scalaire x est non nul. Ils supposent donc que $x = 0$ et aboutissement à une proposition fausse (« les plans p_1 et p_2 sont parallèles »). A aucun moment, ils n'indiquent qu'ils effectuent un raisonnement par l'absurde.

A propos du critère 4

Pour ce critère, on peut énoncer de nombreuses remarques. Pour un certain nombre d'exemples, un raisonnement par équivalence suffit. Il est difficile de penser que l'on effectue un raisonnement par l'absurde quand on résout une équation qui n'a pas de solution (cf. figure 5).

EXEMPLE

S'il existe un nombre réel x solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ alors $x^2 = -1$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif.
Donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Figure 5 – Extrait du manuel Odyssée Seconde (2014)

Dans le manuel Repères Première S (2011), à la page 164 (cf. figure 6), les auteurs demandent de montrer qu'il n'existe pas de valeur positive de x telle que la moyenne et l'écart-type d'une série statistique dépendant de x soient égales. Cela revient à résoudre une équation (qui a une solution positive malgré ce que dit l'énoncé).

42. Soit x un réel positif. On considère la série statistique :
2 - 6 - 18 - $2x$.

1. Soit $m(x)$ la moyenne de cette série statistique. Exprimer $m(x)$ en fonction de x.
2. Soit $\sigma(x)$ l'écart type de cette série statistique. Exprimer $\sigma(x)$ en fonction de x.
3. Montrer qu'il n'existe pas de valeur positive de x telle que la moyenne et l'écart type de cette série statistique soient égales.

INDICATION
On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

Figure 6 – Extrait du manuel Repères Première S (2011)

Toujours dans le manuel Repères Première S (2011), l'exemple 4 de la rubrique « A vous de jouer », les auteurs posent la question de savoir si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Par équivalence, cela revient à démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ou que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu. Cette dernière proposition est manifestement fausse au vu des informations donnée la figure (cf. figure 7).

3 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on utilisera une démonstration par l'absurde en partant de l'hypothèse : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q ($q \neq 0$) sont premiers entre eux, et on s'aidera du résultat de l'exercice **2**.

4 En utilisant la figure ci-contre, dire si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

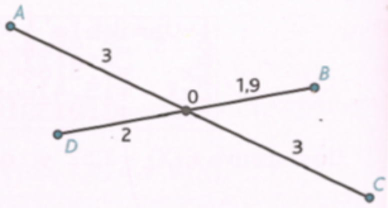


Figure 7 – Extrait du manuel Repères Première S (2011)

D'autre part, les exemples qui peuvent être résolus par contraposition ne nous semblent pas pertinents. Le plus explicite à ce niveau est l'implication : pour tout n entier naturel, n^2 pair implique n pair (cf. figure 8).

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que si n^2 est pair alors n est pair.

Figure 8 – Extrait du manuel Repères Première S (2011)

De même, dans le manuel Indice Seconde (2017), les auteurs veulent montrer que la fonction « carré » n'est pas linéaire. Ils supposent qu'elle est linéaire et ils montrent que (1,2) et (f(1), f(2)) ne sont pas deux suites proportionnelles. Il suffit d'effectuer un raisonnement par contraposition, en effet la contraposée de « f linéaire implique proportionnalité des accroissements » est « non proportionnalité des accroissements implique *f* non linaire » (cf. figure 9).

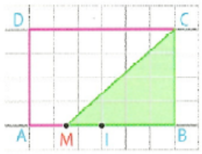
Pour prouver que la fonction carré n'est pas linéaire, on effectue un raisonnement par l'absurde. Soit f la fonction carré ; supposons que f soit linéaire : il existe alors un nombre réel k tel que $f(x) = kx$. Donc $f(1) = k \times 1$ et $f(2) = k \times 2$. Or, on sait que le carré de 1 est égal à 1, c'est-à-dire $f(1) = 1$: k est donc égal à 1 d'où $f(2) = 2$, ce qui est absurde car $f(2) = 4$.

Figure 9 – Extrait du manuel Indice Seconde (2017)

Que dire des exemples cités où le raisonnement par l'absurde est inutile et qu'un raisonnement direct est possible et simple (cf. figure 10).

Identifier la variable et l'ensemble de définition Logique TICE

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 6 et BC = 4 ; I est le milieu de [AB] et M est un point qui décrit le segment [AI] privé de A.



1. Exprimer l'aire du triangle rectangle MBC en fonction de MB.

2. On note x la longueur AM.

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que x ne peut pas être égal à 4.

b. À quel intervalle appartient x ?

3. La fonction f associe au réel x l'aire du triangle MBC. Donner l'expression de $f(x)$ et son ensemble de définition.

Solution commentée

1. L'aire du triangle MBC est égale à $\frac{4 \times \text{MB}}{2} = 2\text{MB}$.

2. a. On raisonne par l'absurde. Si $x = 4$, alors AM = 4.
Puisque I est le milieu de [AB], on a : $\text{AI} = \frac{1}{2}\text{AB} = 3$.
Par conséquent, AM > AI, donc le point M n'appartient pas au segment [AI], ce qui est contradictoire avec la construction de M. Ainsi, x ne peut pas être égal à 4.

Figure 10 – Extrait du manuel Indice Seconde (2017)

Pourquoi vouloir effectuer, dans cet exercice, un raisonnement par l'absurde ? Il suffit de dire que le point M appartient au segment [AI], donc que AM ≤ AI, d'où AM ≤ 3 et ne peut être égal à 4. Il est remarquable que ce raisonnement est effectué à la question suivante !

L'exercice 106 du manuel Repères Première S (2011) est étonnant (cf. figure 11). Vouloir démontrer une double inégalité par l'absurde avec une quantification double serait d'une très grande difficulté. Nier la proposition à démontrer est difficile vue la structure de celle-ci, alors que la démonstration directe par équivalence est simple !

106. Soit a et b deux réels non nuls, tous les deux.

1. Montrer que :

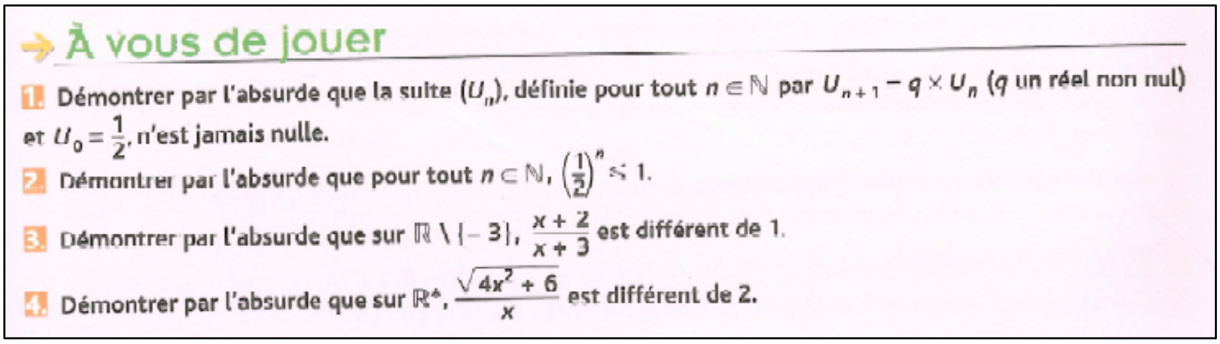
$$-1 \leqslant \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1.$$

MÉTHODE

On pourra raisonner par l'absurde.

Figure 11 – Extrait du manuel Repères Première S (2011)

Enfin, examinons quelques exemples du manuel Repères Terminale S (2012). Aucun des exemples de la rubrique « A vous de jouer » n'est pertinent (cf. figure 12). En effet, pour le premier, il suffit d'appliquer l'équivalence $A \times B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \; ou \; B = 0)$ ou sa forme avec les négations des propositions $A \times B \neq 0 \Leftrightarrow (A \neq 0 \; et \; B \neq 0)$. En effet, on sait que $u_n = q^n u_0$ et q est non nul ainsi que u_0. Inutile donc d'effectuer un raisonnement par l'absurde. Le deuxième exemple est tout aussi mal choisi. Si on effectue un raisonnement par l'absurde, on suppose qu'il existe un indice n_0 tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} > 1$, c'est-à-dire que $2^{n_0} < 1$. Si on affirme qu'il n'existe pas d'indice n_0 non nul vérifiant cette inégalité, alors on peut tout de suite affirmer que pour tout n, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \leq 1$. Pour les deux exemples suivants, il s'agit en fait d'un raisonnement par équivalence, comme dans l'exemple présenté à la figure 4.


À vous de jouer

1. Démontrer par l'absurde que la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1} = q \times U_n$ (q un réel non nul) et $U_0 = \frac{1}{2}$, n'est jamais nulle.
2. Démontrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$.
3. Démontrer par l'absurde que sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\frac{x+2}{x+3}$ est différent de 1.
4. Démontrer par l'absurde que sur $\mathbb{R}^*$, $\frac{\sqrt{4x^2+6}}{x}$ est différent de 2.

Figure 12 – Extrait du manuel Repères Terminale S (2012)

Pour résumer cette analyse des manuels, nous constatons que les définitions proposées du raisonnement par l'absurde sont énoncées pour des propositions « quelconques », sans distinguer le cas d'une proposition élémentaire et d'une proposition composée, en particulier implicative. Comme nous l'avions déjà mis en évidence pour le raisonnement par récurrence (Gardes, Gardes, & Grenier, 2016), le vocabulaire n'est pas toujours utilisé à bon escient (par exemple, *affirmation* à la place de *proposition* ou *contraire* à la place de *négation*) et il est d'une grande diversité (*proposition*, *affirmation*, *énoncé*, *résultat* sont employés comme des synonymes dans certains manuels). Certains termes ne sont jamais expliqués, en particulier *contradiction* et *négation*. De plus, de nombreux implicites ont pu être relevés ; par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation* ; on dit qu'il faut étudier « *P* et *non Q* » sans dire que c'est la négation de « *P* implique *Q* ». Enfin, les définitions données du raisonnement par l'absurde sont rarement opérationnelles, et parfois mal articulées avec l'exemple proposé, c'est-à-dire qu'il est difficile de les appliquer. En ce qui concerne les exemples, nous avons pu mettre en évidence une grande diversité dans leur complexité et leur pertinence. Certains ne semblent pas éclairants sur l'utilité d'un raisonnement par l'absurde et d'autres peu pertinents, notamment lorsqu'un autre type de raisonnement (direct, par contraposition ou par équivalence) permet une démonstration plus accessible. Cette analyse a conduit à une discussion sur des points de vigilance à mettre en évidence pour l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement par l'absurde.

Points de vigilance pour l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement par l'absurde

Voici quelques points de vigilance qui sont ressortis des discussions lors de l'atelier, complétées par les réflexions issues nos travaux (Bernard et al., 2018).

Vigilance sur le vocabulaire utilisé

Il nous semble important d'utiliser le vocabulaire adéquat (i.e. *proposition, négation* et *contradiction*), d'autant plus que ce vocabulaire est au programme (Grenier, 2015). On peut ainsi veiller à : bien préciser qu'une proposition est une phrase mathématique ayant un sens qui est soit juste, soit fausse ; ne pas employer le mot contraire, en mathématiques on parle de négation d'une proposition qui peut être vraie ou fausse, et en aucun cas, elle n'est absurde ; bien expliquer les termes *contradiction* ou *impossibilité* (si l'on souhaite les employer) en précisant que cela signifie qu'on aboutit à une proposition fausse (soit indépendamment de l'énoncé, soit par hypothèses de l'énoncé).

Vigilance sur la définition du raisonnement par l'absurde

Il s'agit de donner une vraie définition du raisonnement par l'absurde. On ne peut pas faire l'économie d'utiliser le vocabulaire de la logique, au risque de donner des définitions qui ne sont pas opératoires et de laisser croire que le raisonnement est *absurde* au lieu d'être *par l'absurde*. Il est indispensable que l'élève puisse décortiquer un raisonnement par l'absurde et vérifier qu'il est bien en présence d'un tel raisonnement. Ainsi, il est impératif d'expliciter d'où vient la contradiction (cf. partie 1).

Vigilance sur les deux formes du raisonnement par l'absurde

Nous avons proposé deux formes de raisonnement par l'absurde selon la nature de la contradiction (cas (1) et cas (2) de la partie 1). Il nous semble important de travailler ces deux formes de raisonnement par l'absurde, *a priori* il n'y a pas une forme plus fréquente que l'autre. Il est également nécessaire de distinguer le raisonnement par l'absurde pour une proposition élémentaire et pour une proposition implicative. En effet, pour la proposition implicative, la négation de la proposition est nettement plus difficile à formuler. De même, la contradiction est moins simple à mettre en évidence.

Vigilance sur la pertinence des exemples proposés

Suite à la définition du raisonnement par l'absurde avec les deux cas vus précédemment, il est important de proposer des exemples de chaque cas en précisant bien les différentes propositions en jeu. Trop souvent, cette précision est absente. Il faut également que les exemples proposés se résolvent à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et que cette démonstration soit la plus simple. Il est important d'être attentif à ne pas proposer des exemples où un raisonnement par contraposition ou par équivalence suffit et éviter de vouloir exhiber des raisonnements par l'absurde dans toutes les situations.

Conclusion : quelques propositions pour l'enseignement

Cette réflexion mathématique, épistémologique et didactique sur le raisonnement par l'absurde nous a conduit à proposer quelques pistes pour l'enseignement de ce raisonnement. A ce stade de nos recherches, elles ne sont que des propositions, n'ayant pas encore été testées en classe.

En premier lieu, nous pensons qu'il est important de préciser quelques pré-requis nécessaires, selon nous, pour aborder le raisonnement par l'absurde.

- Avoir travaillé la notion de *proposition*

Il faut que les élèves aient compris ce qu'est une proposition et que celle-ci n'a que deux valeurs de vérité exclusives, que toute phrase mathématique n'est pas une proposition (par exemple [soit f la fonction définie par …] ou l'exemple proposé par le manuel Déclic Terminale S (2012), cf. figure 1), et qu'une proposition peut être quantifiée (Hérault, Huet, Kel Notter, & Mesnil, 2016).

- Avoir travaillé la *négation d'une proposition* (élémentaire ou composée)

Le travail sur la négation est fondamental (Ben Kilani, 2005; Mesnil, 2014) car la négation d'une proposition intervient nécessairement dans le raisonnement par l'absurde. Il est donc impératif que les élèves sachent nier des propositions élémentaires ou composées (avec les connecteurs ET et OU par exemple).

- Avoir commencé un travail sur l'*implication*

La notion d'implication est centrale dans tout raisonnement mathématique et est complexe (Deloustal-Jorrand, 2004; Durand-Guerrier, 1999). Il faut que les élèves sachent quand une implication est vraie selon la véracité de la prémisse et de la conclusion. D'autre part, ne pas confondre l'implication et les deux formes de raisonnement qui lui sont liés :

Le *modus ponens :* (Si A alors B et A) alors B

Le *modus tollens* : (Si A alors B et *non* B) alors *non* A.

Il est aussi indispensable de travailler l'équivalence entre une implication et sa contraposition et de ne pas confondre avec la réciproque.

- Avoir discuté de différents raisonnements pour *démontrer qu'une proposition est fausse*.

Voici trois raisonnements différents pour démontrer qu'une proposition P est fausse :
Premier cas : on montre que sa négation est vraie i.e. on montre que (*non* P) est vraie.
Second cas : on montre qu'elle implique une proposition que l'on sait par ailleurs fausse i.e. on montre que P implique C et on sait que C est fausse.
Troisième cas : on montre qu'elle implique une proposition et sa négation i.e. on montre que P implique (C et *non* C).

Nous proposons ensuite une définition d'un raisonnement par l'absurde pour les élèves (cf. figure 13) :

> Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation est fausse.
>
> Soit P une proposition. Montrer que P est vraie revient à montrer que (*non* P) est fausse. Pour montrer que (*non* P) est fausse, on peut montrer que :
>
> (non P) implique C et C est une proposition fausse
>
> OU
>
> (non P) implique (C et non C) où C est une proposition

Figure 13 – Proposition d'une définition de « raisonnement par l'absurde »

On peut aussi écrire les propositions faites au début de l'article et en distinguant selon le niveau de classe proposition élémentaire ou proposition implicative. Cette définition pourra être accompagnée des exemples 1 à 5 décrits plus haut, exemples que nous considérons comme pertinents pour illustrer et comprendre les différents cas du raisonnement par l'absurde. Le lecteur intéressé trouvera dans Bernard et al. (2018) d'autres exemples qui nous semblent intéressants pour travailler le raisonnement par l'absurde dans les classes.

Pour terminer, rappelons que le raisonnement par l'absurde est complexe, d'un point de vue mathématique et épistémologique…et donc son enseignement aussi ! Il faut donc être vigilant pour construire son apprentissage en classe, avec les élèves. Précisons également que le raisonnement par l'absurde est une très bonne occasion de travailler de nombreuses notions de logique des programmes, en particulier les notions de proposition, négation d'une proposition, implication, contraposée, etc.

Notre recherche sur le raisonnement par l'absurde est toujours en cours et nous nous intéressons actuellement aux connaissances - disponibles et mobilisables - des élèves de terminale S et des étudiants de classes préparatoires aux grandes études (CPGE) sur ce raisonnement. Rendez-vous à la prochaine CORFEM !

Bibliographie

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Université Claude Bernard Lyon 1.

Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2018). Le raisonnement par l'absurde. Une étude didactique pour le lycée. *Petit X*, *108*, 5–40.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Université Joseph Fourier Grenoble.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X*, *50*, 57–79.

Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2016). Etat des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit X*, *100*, 67–98.

Gardies, J. L. (1991). *Le raisonnement par l'absurde*. Paris: PUF.

Grenier, D. (2015). De la nécessité de définir les notions de logique au lycée. *Repères IREM*, *100*, 65–83.

Hérault, F., Huet, C., Kel Notter, G., & Mesnil, Z. (2016). A propos de la quantification : quelques activités de logique dans nos classes. *Petit X*, *100*, 35–65.

Lombard, P. (1996). A propos du raisonnement par l'absurde. *Bulletin APMEP*, *405*, 445–455.

Lombardi, H. (1997). Le raisonnement par l'absurde. *Repères IREM*, *29*, 27–42.

Mesnil, Z. (2014). Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation. *XXIe Colloque de La CORFEM*. Grenoble, France.