Actes du 4e colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA-4)

Université Mohammed 6 Polytechnique
Du 20 au 24 mai 2024

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

Du 20 au 24 mai 2024

Actes édités par :

Hassane Squalli, Université de Sherbrooke (Canada / Maroc)

Adolphe Adihou, Université de Sherbrooke (Canada / Bénin)

Avec l'appui des membres du comité scientifique

TABLE DES MATIÈRES

COMITÉ SCIENTIFIQUE

COMITÉ LOCAL D'ORGANISATION

Abderrahmane Benherbal, Président, Université Mohammed VI Polytechnique.
Said ABOUHANIFA, CRMEF Casablanca-Settat.
Imane AMLY, Institut des sciences de l'éducation, Université Mohammed VI Polytechnique.
Kaltouma BENLYAZID, École Américaine de Ben guérir
Mohammed BENSITEL, Green Tech Institute, Université Mohammed VI Polytechnique
Mouna BERQUEDICH, Green Tech Institute, Université Mohammed VI Polytechnique
Bouchra RIDA, Service social OCP, Ben guérir,
Younes CHHITI, Green Tech Institute, Université Mohammed VI Polytechnique
Adil CHRAIBI, Institut de Promotion Socio-Éducative (IPSE)
Mohamed EL IBAOUI, Inspecteur de Mathématique, Ministère de l'éducation nationale
Nabil ELKEMMAL, Institut de Promotion Socio-Éducative
Fatima Ezzahra FOUAD, Institute of Science, Technology, and Innovation, Université Mohammed 6 Polytechnique
Nadine HOUNSELL, Student Organizations, Leadership and Engagement, Université Mohammed 6 Polytechnique
Yahya ICHKADI, Student Organizations, Leadership and Engagement, Université Mohammed 6 Polytechnique
Aamena LADHANI, École Américaine de Ben guérir
Khadija LALAM, Green Tech Institute, Université Mohammed VI Polytechnique 6P
Youssef LEMKHARBACH, Green Tech Institute, Université Mohammed VI Polytechnique 6P
Soukaina LMAHANI, École des Sciences de l'Agriculture, Fertilisants et Environnement ESAFE et Agro Biosciences AgBS, Université Mohammed VI Polytechnique 6P P
Loubna MEKOUAR, School of Computer Science, Université Mohammed VI Polytechnique 6P
Mourad MOUMNI, Centre de compétences industrielles OCP
Mustapha OURAHAY, École Normale Supérieure-Université Cadi Ayyad

Le 4e colloque de ADiMA

Université Mohammed 6 Polytechnique, Ben Guérir, Maroc
Du 20 au 24 mai 2024

Présentation du thème du colloque
L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM :
Défis et opportunités

INTRODUCTION

Les systèmes éducatifs en Afrique sont confrontés à plusieurs défis, notamment la prise en compte de la production accélérée de connaissances scientifiques, l'évolution rapide de la technologie et son impact sur le marché du travail. En tant que domaine scientifique de recherche et de développement sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ainsi qu'un domaine de formation des enseignant, la didactique des mathématiques est appelée à contribuer à relever ces défis. Dans cette perspective, nul ne peut nier l'importance d'une éducation de qualité des STIM[1] (Science, Technologie, Ingénierie et Mathématiques). Elle est primordiale pour évoluer dans la société et garantir ainsi le développement social, économique et culturel, notamment en Afrique.

Dans leur dernier rapport de recherche, Parkin et Crawford (2019) ont analysé plus de 30 rapports sur l'enseignement des STIM publiés depuis 2007. Plusieurs de ces rapports montrent que :

- les compétences en STIM sont liées à une meilleure employabilité, à des salaires plus élevés et à une meilleure qualité de vie;
- les femmes sont souvent sous-représentées dans les domaines des STIM;
- les approches pédagogiques actives pour enseigner les STIM, qui impliquent les étudiants dans leur apprentissage, sont plus efficaces que les approches passives;
- Les technologies numériques telles que les logiciels de simulation, les laboratoires virtuels et les jeux éducatifs peuvent améliorer l'apprentissage et l'engagement des étudiants, mais leur efficacité dépend de la façon dont elles sont intégrées dans l'enseignement;
- La formation, initiale ou continue, des enseignants est un élément clé de l'éducation aux STIM.

Trois conclusions principales ressortent de ces multiples rapports, à savoir la nécessité :

- d'augmenter la quantité et la qualité des diplômés dans les domaines des STIM;

[1] En anglais, cet acronyme s'écrit STEM, le E référant aux ingénieurs (engineers).

- d’élargir les connaissances dans les domaines des STIM afin de mieux préparer les citoyens à répondre aux demandes qui leur sont imposées au sein de sociétés où les technologies et le numérique sont de plus en plus présents;
- de recentrer les systèmes éducatifs sur le développement de la pensée critique et de l’aptitude à résoudre les problèmes, ainsi que d’autres compétences connexes, plutôt que sur la reproduction d’ensembles de connaissances au sein des membres de la société.

La proximité des mathématiques avec les sciences et la technologie incite plusieurs institutions à les apparier dans des programmes. Les STIM peuvent être entendues comme une approche d'enseignement et d'apprentissage interdisciplinaire (Savard et al. 2022, Sanders, 2009). Par conséquent, l’enseignement de chacune des disciplines devrait idéalement impliquer une ou plusieurs autres disciplines STIM, pas nécessairement toutes à la fois. Cette approche est généralement mise en place afin :

1) d’approfondir la compréhension des élèves et donner du sens aux concepts de chaque discipline en s'appuyant sur les connaissances préalables des élèves ;
2) d’élargir la compréhension des élèves par la mobilisation des concepts dans des contextes variés et socialement pertinents ;
3) de rendre les contenus disciplinaires accessibles et intrigants (Wang et al., 2011) (trad. libre de Hasanah (2020, p. 3))

La littérature scientifique contient plusieurs visions sur la signification de l’enseignement STIM (Breiner et al., 2012; Ritz & Fan, 2015). En fait, ces interprétations multiples impliquent un large éventail de modèles d’intégration disciplinaire, allant de l’enseignement d’une des disciplines STIM, à la considérer comme une discipline à part entière (Martín-Páez et al., 2019). En ce sens, bien que Gresnigt et ses collaborateurs (2014) ont indiqué qu’il y avait très peu de rapports de recherche et d’enquêtes sur les fondements théoriques des programmes intégrés, l’intégration disciplinaire et la nature de l’approche STIM commencent à attirer de plus en plus d’attention au sein de la communauté scientifique.

L’éducation aux STIM offre ainsi des opportunités, mais soulève plusieurs défis, tout particulièrement à la recherche en didactique des mathématiques et à la formation des enseignants de mathématiques à tous les ordres d’enseignement. Comment l’enseignement des mathématiques pourrait contribuer au développement des compétences en STIM? À son tour, comment le contexte des STIM pourrait favoriser la formation mathématique aux différents ordres d’enseignement ?

À travers des conférences, des tables rondes, des groupes thématiques de travail, des ateliers et des activités spéciales, ce colloque vise à permettre aux personnes participantes de discuter de leurs recherches, de leurs expériences et leurs points de vue sur différents enjeux de la recherche en didactique des mathématiques, de l’enseignement des mathématiques et de la formation à l’enseignement des mathématiques aux différents ordres. Une attention particulière sera portée à l'éducation aux STIM.

RÉFÉRENCES

Breiner, J. M., Harkness, S. S., Johnson, C. C., & Koehler, C. M. (2012). What is STEM? A discussion about conceptions of STEM in education and partnerships. *School Science and Mathematics*, *112*(1), 3-11.

Gresnigt, R., Taconis, R., van Keulen, H., Gravemeijer, K., & Baartman, L. (2014). Promoting science and technology in primary education: a review of integrated curricula. *Studies in Science Education*, *50*(1), 47-84.

HAN, S., YALVAC, B., CAPRARO, M. M., & CAPRARO, R. M. (2015). In-service teachers' implementation and understanding of STEM project based learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(1), 63-76.

HASANAH, U. (2020). Key definitions of STEM education: Literature review. *Interdisciplinary Journal of Environmental and Science Education*, *16*(3), e2217.

MARTÍN-PÁEZ, T., AGUILERA, D., PERALES-PALACIOS, F. J., & VÍLCHEZ-GONZÁLEZ, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, *103*(4), 799-822.

PARKIN, A. ET CRAWFORD, M. (2019). Plein feu sur l'apprentissage des sciences : l'évolution de l'enseignement des STIM. Parlons Sciences : AMGEN Canada

RITZ, J. M., & FAN, S.-C. (2015). STEM and technology education: International state-of-the-art. *International Journal of Technology and Design Education*, *25*(4), 429-451.

SANDERS, M. (2009) STEM, STEM education, STEMmania. The Technology Teacher, 68(4). 20-26

SAVARD, A., CAVALCANTE, A., & CAPRIOARA, D. (2022). L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires du Québec: L'alignement entre les enseignants, les.

SIREGAR, N. C., ROSLI, R., MAAT, S. M., & CAPRARO, M. (2020). The Effect of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Program on Students' Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1).

THOMAS, J. W. (2000). *A review of research on project-based learning*. (Vol. Autodesk Foundation). San Rafael: California.

GROUPES DE TRAVAIL

Six groupes de travail sont proposés, portant sur de thématiques variées de recherche en didactique des mathématiques couvrant une large part de la recherche actuelle en didactique des mathématiques, notamment en Afrique. La thématique du colloque est couverte particulièrement par le groupe de travail 3. Les recherches présentées dans tous les groupes de travail peuvent, à l'exception du GT6, peuvent concerner les ordres scolaire, préscolaire, primaire, secondaire et post-secondaire. Le GT6 porte spécifiquement sur l'enseignement des mathématiques au postsecondaire.

GT1 : Pratiques enseignantes et dispositifs de formation initiale et continue des enseignants

Ce groupe de travail porte sur les travaux de recherche et de développement portant sur la formation initiale ou continue des enseignants, l'analyse de dispositifs de formation et les recherches sur les pratiques enseignantes.

GT2 : Les différentes formes de la pensée mathématique

Ce groupe de travail discute des travaux de recherche théoriques ou empiriques portant sur une des formes de la pensée mathématique ou leur articulation (pensée algébrique, pensée arithmétique, pensée géométrique, pensée probabiliste, pensée fonctionnelle, pensée algorithmique, etc.)

GT3 : Enseignement des mathématiques à l'ère du numérique et dans le contexte des STIM

Ce groupe de travail s'intéresse à la discussion de travaux de recherche théoriques ou empiriques et de développement portant sur l'intégration de ressources numériques en enseignement des mathématiques, la connexion des mathématiques avec les sciences ou l'ingénierie, les approches interdisciplinaires entre mathématiques, sciences et/ou ingénierie, la modélisation mathématique en science et/ou technologies et/ou ingénierie.

GT4 : Enseignement des mathématiques dans des contextes spécifiques

Ce groupe de travail traite des questions en lien avec l'enseignement-apprentissage des mathématiques ou la formation des enseignants, auprès d'élèves à besoins particuliers (difficultés/troubles d'apprentissage, douance, élèves dont la langue première est différente de la langue d'enseignement …) ou dans la formation est réalisée dans des lieux particuliers (classe pluriethnique, milieu défavorisé, …)

GT5 : Intégration des dimensions historique et culturelle des mathématiques dans leur enseignement

Ce groupe de travail discute les travaux de recherche théoriques ou empiriques portant sur l'intégration de l'histoire des mathématiques ou de pratiques mathématiques culturelles dans l'enseignement des mathématiques.

GT6 : Enseignement des mathématiques au postsecondaire

Ce groupe de travail discute les travaux de recherche théoriques ou empiriques portant sur une problématique liée à l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques au niveau postsecondaire ainsi que la problématique de la transition secondaire postsecondaire.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

L'enseignement des mathématiques à l'heure des STIM[2]

Michèle Artigue
Université Paris Cité, France

Résumé – L'enseignement des mathématiques fait face aujourd'hui à de nombreux défis. L'un de ceux-ci et non le moindre est celui des rapports qu'il doit nouer ou renforcer avec celui des autres disciplines scientifiques si l'on veut qu'il puisse répondre aux attentes sociétales et ne pas se couper de l'évolution des sciences mathématiques elles-mêmes. En ce 21e siècle, les évolutions curriculaires tendent de plus en plus à concevoir la formation mathématique comme composante d'une formation scientifique plus large, celle aux STIM (Sciences, Technologie, Ingénierie et Mathématiques). La réflexion, la recherche, les projets éducatifs concernant l'enseignement et l'apprentissage des STIM se sont multipliés, amenant à s'interroger sur ce qu'une approche en termes de STIM implique comme évolution dans l'enseignement des mathématiques, les difficultés, mais aussi les bénéfices qui peuvent en résulter. Dans ce texte, issu de la conférence faite au colloque ADiMA 4, je souhaite contribuer à la réflexion sur ces questions, à la fois d'un point de vue épistémologique et didactique. Pour cela, je m'appuierai notamment sur les activités d'enseignement, de formation, de recherche et de dissémination auxquelles j'ai participé dans ce domaine à partir des années 70, à l'IREM de Paris et à l'université Paris 7, ainsi que dans plusieurs projets européens à partir de 2010, avec des problématiques qui se sont progressivement élargies.

INTRODUCTION

Comme le précisait bien le texte de présentation du colloque ADiMA 4, les systèmes éducatifs sont aujourd'hui confrontés à de nombreux défis. Ces défis concernent notamment l'enseignement des mathématiques et la didactique des mathématiques, comme champ de recherche et de développement, comme domaine de la formation des enseignants, doit aider à les relever. L'un de ces défis et non le moindre est celui des rapports que l'enseignement des mathématiques doit nouer ou renforcer avec celui des autres disciplines scientifiques, si l'on veut qu'il puisse répondre aux attentes sociétales et ne pas se couper de l'évolution des sciences mathématiques elles-mêmes (Goos et al., 2023 ; Maass et al., 2019). En ce 21e siècle, les évolutions curriculaires tendent de plus en plus à concevoir la formation mathématique comme composante d'une formation scientifique plus large, une formation aux STIM (ou aux STEM en anglais) (Shimizu &

[2] Artigue, M. (2025). L'enseignement des mathématiques à l'heure des STIM. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – Conférence, pp. 10-32.

Vithal, 2023). La réflexion, la recherche, les projets éducatifs concernant l'enseignement et l'apprentissage des STIM se sont multipliés, amenant à s'interroger sur ce qu'une approche en termes de STIM implique comme évolution dans l'enseignement des mathématiques, les difficultés, mais aussi les bénéfices qui peuvent en résulter.

Dans ce texte, issu de la conférence faite au colloque ADiMA 4, je souhaite contribuer à la réflexion sur ces questions, à la fois d'un point de vue épistémologique et didactique. Pour cela, je développerai un regard réflexif sur diverses activités d'enseignement, de formation, de recherche et de dissémination auxquelles j'ai participé dans ce domaine, des années 70 jusqu'à aujourd'hui, en France et dans le contexte européen. Ce sont des contextes très différents des contextes africains, j'en suis parfaitement consciente, mais j'espère que, malgré ces limitations, la réflexion développée pourra être utile à la communauté que rassemble l'association ADiMA.

Dans une première partie, je rappellerai quelques éléments de contexte puis je structurerai la réflexion autour de trois dimensions qu'il me semble nécessaire de croiser pour une telle réflexion : celles de l'interdisciplinarité, de la modélisation mathématique et des démarches d'investigation, des dimensions qui se sont croisées effectivement dans ma propre expérience.

QUELQUES ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

L'acronyme STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), initialement SMET, est apparu aux USA dans les années 90, à l'initiative de la National Science Foundation (NRC, 1996), face au besoin identifié de renforcer les compétences scientifiques des jeunes et des adultes pour maintenir la compétitivité économique du pays, dans un contexte de manque d'attractivité des filières scientifiques. Cette mise en avant des STEM s'accompagnait de la volonté de dépasser le cloisonnement existant dans l'enseignement entre ces différentes disciplines et d'un questionnement des formes d'enseignement jugées trop transmissives et procédurales, des facteurs qui étaient perçus comme contribuant à la faible efficacité et attractivité de ces enseignements.

Même si l'acronyme a émergé aux USA, les difficultés constatées n'étaient pas propres à ce pays et le mouvement en faveur des STEM s'est progressivement internationalisé. Par exemple, en Europe, le rapport piloté par Michel Rocard pour la Commission européenne en 2007 (Rocard et al., 2007), intitulé *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*, relève clairement de ce mouvement, même si l'acronyme STEM n'y est pas utilisé. Après une introduction où il est notamment précisé que par sciences il faut entendre dans le rapport les sciences physiques, les sciences de la vie, la science et les technologies informatiques et les mathématiques, le rapport propose une analyse du contexte. Cette analyse est structurée autour de trois observations dont les intitulés sont reproduits ci-après (Figure 1). On y retrouve bien les arguments économiques et pédagogico-didactiques mentionnés précédemment.

Observation 1 : Une grande menace pour l'avenir de l'Europe : l'enseignement des sciences est loin d'attirer les foules et, dans de nombreux pays, la tendance semble empirer.

Observation 2 : Un consensus général sur l'importance cruciale de l'enseignement des sciences.

Observation 3 : Cette situation trouve ses origines, entre autres raisons, dans la façon dont la science est enseignée.

Observation 4 : De nombreuses initiatives en cours en Europe contribuent activement au renouveau de l'enseignement des sciences. Néanmoins, elles sont souvent mises en œuvre à petite échelle et ne tirent pas le meilleur parti possible des mesures européennes en faveur de l'intégration et de la dissémination.

Figure 1 - Intitulé des observations du rapport (Rocard et al., 2007)

Quatre conclusions sont tirées de cette analyse. Les titres des sections correspondantes sont reproduits ci-après (Figure 2).

Conclusion 1 : Le passage de méthodes essentiellement déductives à des méthodes basées sur l'investigation est le meilleur moyen d'accroître l'intérêt pour les sciences.

Conclusion 2 : La nouvelle pédagogie scolaire de l'enseignement des sciences, basée sur l'IBSE fournit des occasions accrues de collaboration entre divers acteurs, et ce, tant dans des contextes formels qu'informels.

Conclusion 3 : Les professeurs sont les acteurs essentiels du renouveau de l'enseignement des sciences. Parmi différentes méthodes possibles, le fait d'appartenir à un réseau leur permet d'améliorer la qualité de leur enseignement et accroît leur motivation.

Conclusion 4 : En Europe, ces éléments fondamentaux de renouveau des pratiques en matière d'enseignement des sciences sont promus par deux initiatives innovantes, *Pollen* et *Sinus-Transfer*, qui se sont révélées capables d'accroître l'intérêt et les résultats des enfants dans le domaine scientifique. Avec quelques adaptations, ces initiatives pourraient être mises en œuvre de façon efficace à une échelle qui permettrait l'impact souhaité.

Figure 2 - Intitulés des conclusions du rapport (Rocard et al., 2007)

Le rapport se termine par six recommandations cohérentes avec ce qui précède et mentionnant aussi la nécessité d'accroître la participation des filles. Ce rapport a été suivi d'un financement très substantiel pour soutenir de tels projets et permettre le passage à l'échelle. J'y reviendrai dans la section 5. L'accent est ainsi mis sur une pédagogie basée sur les démarches d'investigation, mais, s'il est indiqué que ces pratiques fournissent des occasions accrues de collaboration entre divers acteurs, le rapport ne va pas jusqu'à préconiser une intégration des enseignements des différentes disciplines scientifiques. Les deux projets cités *Pollen* et *Sinus-Transfer* concernent d'ailleurs le premier les sciences de la nature et de la vie, le second les mathématiques.

Il s'agissait là du contexte initial. On observe aujourd'hui en Europe comme au niveau international une évolution sensible, même si les arguments économiques initiaux demeurent. Cette évolution résulte de divers facteurs. J'en pointerai ici essentiellement deux. Le premier est la rapidité de l'évolution technologique et l'emprise croissante des technologies numériques (algorithmes, big data, réseaux sociaux, et aujourd'hui la montée en puissance de l'intelligence artificielle) sur le développement scientifique et le fonctionnement de nos sociétés, ainsi que sur le marché du travail. Le second est l'accumulation de défis globaux auxquels nos sociétés doivent faire face : climat, biodiversité, insécurité énergétique, alimentaire, sanitaire, gestion de l'eau, des déchets, etc., et les multiples crises qui en résultent. Nous savons tous à quel point la pandémie de Covid 19 a affecté nos vies, nos économies et nos systèmes éducatifs, comment aussi elle a montré l'importance d'une solide formation mathématique pour comprendre les processus de dissémination de la pandémie et l'effet de la vaccination, le potentiel et les limites des modélisations mathématiques utilisées, et contrer les discours complotistes véhiculés par les réseaux sociaux (Chan, Sabena et Wagner, 2021 ; Engelbrecht, Borba et Kaiser, 2023). Il en résulte de nouvelles demandes faites à l'éducation, et notamment à l'éducation scientifique. Elle doit former à une citoyenneté critique et engagée, contribuer aux objectifs de développement durable, aider à lutter contre les inégalités et les discriminations, etc.

Cette évolution est bien visible si l'on examine l'évolution du discours sur les compétences. Par exemple, l'article introductif du numéro spécial de *ZDM* cité plus haut reliant cette thématique des compétences et l'enseignement et l'apprentissage des STIM souligne qu'il existe plusieurs formulations des compétences pour le 21e siècle et en cite quelques-unes, par exemple celle-ci émanant du Assessment and Teaching of twenty-first century skills project (ATC21S 2009) basée sur quatre catégories ((Maass et al., 2019, p. 873) :

1. Ways of thinking : creativity, critical thinking, problem-solving, decision-making and learning.
2. Ways of working: communication and collaboration.
3. Tools for working: information and communications technology (ICT) and information literacy.
4. Skills for living in the world: citizenship, life and career and personal and social responsibility.

De fait, toutes ces formulations mettent l'accent sur ce que l'on dénomme souvent les 4C : *creativity*, *critical thinking*, *communication*, *collaboration*, ainsi que sur des compétences de citoyenneté, le sens des responsabilités sociales. Elles mettent aussi souvent l'accent sur la capacité à travailler sur des problèmes complexes, souvent mal définis, et qui nécessitent la collaboration d'expertises diverses. Elles invitent ainsi à un enseignement des STIM qui arrive à dépasser les cloisonnements curriculaires.

Parmi les disciplines STIM, les mathématiques occupent cependant une place singulière. C'est une discipline enseignée à tous les élèves dès le début de la scolarité et une discipline qui a un poids scolaire important. C'est une discipline qui est tout particulièrement associée au développement d'une pensée rationnelle, du raisonnement et de la rigueur, ceci étant souvent vu comme une des principales raisons de son enseignement à tous les élèves (Kahane, 2001). C'est une discipline reconnue comme fondamentale pour le développement scientifique et technologique. Mais il faut reconnaître que son enseignement reste encore peu connecté à celui des autres disciplines scientifiques, à l'exception peut-être de l'informatique grâce au pont entre les deux que constitue l'algorithmique. Il est aussi souvent peu connecté à la vie extra-scolaire des élèves et aux questions de société, malgré les évolutions curriculaires récentes (Shimizu & Vithal, 2023). Enfin, c'est une discipline absente ou réduite trop souvent à un statut d'outil et de discipline de service dans les essais d'intégration des STIM, ce qui rend difficile d'apprécier la contribution possible de ces enseignements à son apprentissage (English, 2016 ; Goos et al., 2023).

Au vu de ce qui précède, il semble nécessaire, pour réfléchir aux rapports entre mathématiques et STIM dans l'enseignement, de croiser plusieurs perspectives. Dans ce texte, comme dans la conférence ADiMA, je croiserai trois perspectives : l'interdisciplinarité, la modélisation mathématique et les démarches d'investigation. Et c'est à la lumière de ces trois perspectives qui marquent la progression de ma propre histoire que j'essaierai de partager mon expérience et ma réflexion sur les rapports entre mathématiques et STIM dans l'enseignement.

INTERDISCIPLINARITÉ

J'ai fait en effet tôt dans ma carrière l'expérience de l'interdisciplinarité en participant aux activités de l'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Paris où divers groupes pluridisciplinaires existaient dès les années 70 : groupes maths-français, maths-biologie, maths-physique, maths-technologie. Et c'est à l'occasion d'une réflexion sur l'usage des représentations graphiques en mathématiques et en physique que j'ai commencé à collaborer avec deux didacticiennes de la physique de mon université, Laurence Viennot et Edith Saltiel. Ce n'est pas sur cette première expérience d'interdisciplinarité que je souhaite réfléchir dans ce texte, mais sur celle plus conséquente qui a démarré en 1979 avec la création d'une section expérimentale Math-Physique de première année de DEUG[3] à l'université Paris 7. Elle était portée par André Revuz, directeur de l'IREM de Paris et professeur à l'UFR (Unité de formation et de recherche) de mathématiques et Jean Matricon, professeur à l'UFR de physique. Y collaboraient des enseignants-chercheurs de l'UFR de mathématiques déjà engagés dans les activités de l'IREM, et des enseignants-chercheurs de l'UFR de physique, dont Laurence et Edith, les seules didacticiennes à l'époque de cette UFR.

L'ambition était de briser le cloisonnement existant dans l'enseignement entre mathématiques et physique, tout en renouvelant nos pratiques : motiver l'enseignement des notions mathématiques par des problèmes riches chargés de sens pour les étudiants, développer en physique chez les étudiants le sens des phénomènes de la matière, de leur modélisation, de leur classification suivant des types connus. Pour briser le cloisonnement, un dispositif particulièrement innovant avait été mis en place. Nous avions identifié en début d'année un certain nombre de sujets d'intérêt commun (notions vectorielles, référentiels, cinématique, différentielles, champ potentiel-gradient, équations différentielles, etc.) et décidé, pour assurer la coordination, d'organiser sur ces sujets des amphis communs, co-assurés par un enseignant de mathématiques et de physique. Nous avions une réunion hebdomadaire au cours de laquelle, notamment, le binôme en charge

[3] Le DEUG, Diplôme d'études universitaires générales, correspondait à l'époque aux deux premières années d'université.

du prochain amphi prévu proposait un scénario détaillé qui était discuté et généralement amendé. Toute l'équipe enseignante assistait ensuite à l'amphi. Treize amphis communs ont été ainsi réalisés la première année. Nous organisions aussi régulièrement des tests maths-physique que nous corrigions ensemble. Les étudiants réalisaient, par ailleurs, un projet en physique et ils avaient des séances de travaux pratiques sur ordinateur régulières en mathématiques.

Dès la première année, les résultats ont été au rendez-vous, grâce à un engagement très fort de l'équipe enseignante : harmonisation des progressions, travail sur les notations, mise en relation des concepts. Dans le rapport écrit à l'issue de la première année (Artigue, 1981), j'ai retrouvé par exemple (pp. 51-61) les notes de préparation de l'amphi commun que j'avais géré avec Laurence Viennot pour l'introduction des équations différentielles, et pour lequel la coordination avait été très efficace. Un point de blocage était cependant apparu, sur la notion de différentielle. Malgré quatre réunions, la mathématicienne et le physicien en charge n'étaient pas parvenus à se mettre d'accord, et ce d'autant plus qu'ils représentaient chacun les pôles extrêmes des représentations disciplinaires sur ce thème. Le décalage entre les points de vue : forme différentielle pour la mathématicienne, élément très petit, voire infinitésimal, pour le physicien, était trop grand, comme expliqué dans (Artigue, 1981, pp. 69-83). Face à ce problème, un travail de recherche didactique s'imposait, d'autant plus que les questionnaires et entretiens de fin d'année avec les étudiants tendaient à montrer que, confrontés à ces dissensions, le plus simple et efficace leur semblait de ne pas chercher à comprendre et de fonctionner, dans chaque discipline, en décodant les règles du contrat didactique. Ce fut le point de départ d'une recherche didactique qui s'est étendue sur plusieurs années et a été soutenue par le groupement de recherche didactique créé à l'époque au CNRS (Centre national de la recherche scientifique). Grâce à ce GDR, la recherche a pu aussi bénéficier de la collaboration avec des didacticiens et didacticiennes de Grenoble qui travaillaient sur l'intégrale de Riemann dans la section expérimentale de DEUG créée par Marc Legrand.

La recherche s'est ainsi développée dans plusieurs directions (Alibert et al., 1988, 1989 ; Artigue et al., 1990) :

• la construction d'une référence mathématique sur les procédures différentielles et intégrales adaptée à un enseignement de DEUG ;

• l'étude des conceptions des étudiants ;

• une enquête historique pour mieux comprendre les dissensions math-physique, leur émergence, leur évolution ;

• l'étude des programmes et manuels dans les deux disciplines et les pratiques existantes pour comprendre les transpositions didactiques à l'œuvre dans les deux disciplines.

Nous avons aussi élaboré des outils et des ressources didactiques pour aider à dépasser ces dissensions, notamment des questionnaires de travail sur les différentielles et des ateliers math-physique de mise en équation de problèmes (Alibert et al., 1989 ; Artigue et al., 1989). Nous ne parlions pas de modélisation à l'époque, même si avec le recul il s'agissait clairement d'ateliers de modélisation que, d'ailleurs, nous avons au début assuré en commun pour bien harmoniser les discours.

Cette expérience d'interdisciplinarité fut positive et enrichissante, même si elle ne fut en rien miraculeuse comme le montre l'analyse critique présentée dans (Artigue, 1981). La section expérimentale fonctionna plusieurs années et, dès la seconde année, des améliorations furent apportées. Bien sûr, elle ne demandait plus le même engagement de la part des enseignants qui avaient appris à se connaître. Au bout de cinq ans, elle fut étendue en deuxième année, mais elle ne survécut pas longtemps à la nécessité de trouver des enseignants-chercheurs volontaires pour assurer la relève.

Il ne s'agissait pas d'un enseignement intégré des sciences physiques et des mathématiques. C'était une coordination construite sur des bases empiriques avec peu d'outils théoriques, mais cependant déjà relativement efficace. Elle m'a personnellement appris beaucoup et j'ai bien compris l'intérêt d'un regard extérieur pour questionner sa propre discipline et son enseignement, les implicites et les naturalisations associées. Tout ceci se passait, il y a presque un demi-siècle, mais la coordination des enseignements de mathématiques et de physique dans l'enseignement secondaire comme dans l'enseignement supérieur est encore aujourd'hui loin d'être satisfaisante, et fait toujours l'objet de projets innovants et de recherches. En témoignent par exemple, toujours dans le contexte des IREM, les travaux de la commission inter-IREM Physique-Chimie[4] récemment créée qui a organisé, en juin 2024, son premier colloque intitulé « L'interdisciplinarité en question : mythe ou réalité ». J'y reviendrai notamment dans la section 5.

MODÉLISATION ET INTERDISCIPLINARITÉ

Sautant deux décennies, j'en viens au début des années 2000, pour aborder la seconde dimension, celle de la modélisation, en m'appuyant sur une seconde expérience particulièrement enrichissante. Le contexte en est différent : les technologiques numériques sont alors devenues omniprésentes et imprègnent les pratiques scientifiques et sociales. La dimension expérimentale des mathématiques est devenue bien plus visible comme en témoigne la création d'une revue spécialisée *Experimental Mathematics*[5]. C'est aussi le début des évaluations PISA de l'OCDE avec l'accent qui y est mis sur la capacité des élèves à utiliser les mathématiques apprises à l'école dans la vie quotidienne. C'est la montée en puissance de l'approche par compétences avec les évolutions curriculaires qui en résultent. L'attention croissante portée à la modélisation mathématique et non plus seulement aux applications des mathématiques dans l'enseignement se situe au carrefour de ces influences. Comme le souligne l'étude ICMI 14 consacrée à ces questions (Blum et al., 2007), il s'agit d'un renversement épistémologico-didactique. La question n'est plus : « A quoi peuvent servir ces mathématiques déjà enseignées ? », mais « Quelles mathématiques peuvent m'aider à résoudre ce problème ?». Le groupe international ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications)[6]

---

[4] https://www.univ-irem.fr/l-interdisciplinarite-en-question-mythe-ou-realite-372

[5] https://www.tandfonline.com/journals/uexm20

[6] https://www.ictma.net/

organise bien depuis les années 80 des colloques réguliers, mais il s'agit encore une communauté relativement réduite et, en tout cas, les didacticiens français n'y contribuent pas.

Le fait que la modélisation soit un concept essentiel à tout travail interdisciplinaire va s'imposer à moi dans ce contexte, avec la réforme du lycée général de 2000. En effet, les groupes d'experts de mathématiques, de sciences physiques et chimiques (SPC) et de sciences de la vie de la terre (SVT) en charge de la rédaction de ces programmes ont travaillé ensemble pour mieux les coordonner et ceci s'est traduit par une nouvelle introduction de la fonction exponentielle en classe de terminale mettant en avant sa capacité à modéliser des phénomènes d'évolution, par exemple celui de la désintégration radioactive au programme de physique, qui fonde des techniques de datation, par exemple au carbone 14, utilisées en SVT. La fonction exponentielle, qui était traditionnellement introduite comme fonction inverse de la fonction logarithme, l'est alors comme solution de l'équation différentielle $y'=y$. De plus, dans ces nouveaux programmes, la modélisation est apparue explicitement comme une compétence à développer, notamment à travers des projets pluridisciplinaires, les TPE (Travaux personnels encadrés), co-encadrés par des enseignants de deux disciplines différentes au moins. Ils ont été introduits en classe de première (grade 11), avec un horaire conséquent de deux heures par semaine sur un semestre.

Il s'agit alors d'un dispositif très innovant et la nécessité s'impose d'accompagner les enseignants, notamment ceux de mathématiques. Le réseau des IREM s'implique et à l'IREM de Paris dont je viens de prendre la direction, nous créons un groupe pluridisciplinaire TPE (maths-SPC-SVT) auquel collaborent aussi deux animatrices du groupe M :ATH (Mathématiques : Approche par les textes historiques) qui apporteront au groupe leur expertise spécifique en histoire des mathématiques. Le groupe organise un suivi systématique des TPE organisés dans les lycées où enseignent ses animateurs et animatrices. Ce suivi montre rapidement que, à l'inverse des enseignants de SPC et SVT, les enseignants de mathématiques ont du mal à trouver une place satisfaisante dans ce dispositif où ce sont en principe les élèves qui doivent, en petits groupes, construire leur problématique en la reliant à l'un des très larges thèmes du cadrage national fourni. Sur la base de ce suivi et du travail interdisciplinaire mené par le groupe pour explorer les potentialités offertes par les thèmes du cadrage national, nous proposerons, à partir de l'année suivante, une formation continue de cinq jours pour les enseignants des trois académies de la région Ile-de-France (Artigue et Buhler, 2002). Réduite à trois jours, elle deviendra ensuite une formation à la modélisation et à l'interdisciplinarité. Parallèlement, avec François Sauvageot, un mathématicien de l'UFR qui est alors responsable de la préparation au CAPES de mathématiques, le principal concours de recrutement des enseignants de mathématiques du secondaire, nous proposons de mettre en place un enseignement de modélisation dans le master professionnel didactique de formation de formateurs récemment créé à l'université, car il nous semble impératif de former aussi les formateurs d'enseignants. C'est sur cette formation de formateurs que je vais me centrer.

Notre point de départ fut que le travail didactique et la formation dans ce domaine devaient pouvoir s'appuyer sur un champ d'expérience, une pratique effective. Or les pratiques scolaires usuelles ne fournissaient pas, à l'époque, une base appropriée. L'enquête que nous avons faite auprès de la vingtaine d'enseignants inscrits à cet enseignement de modélisation, la première année, a montré par exemple que presque aucun d'eux n'avait d'expérience ni en modélisation, ni en projets interdisciplinaires. L'enseignement du master s'est alors donné pour objectifs :

- de créer cette expérience généralement manquante ;
- de faire rencontrer collectivement les questions fondamentales posées par la modélisation et de penser et travailler leur transposition possible dans l'enseignement et la formation ;
- et également de permettre aux participants de se familiariser ou re-familiariser avec certains outils mathématiques élémentaires de la modélisation, déterministe ou aléatoire, en distinguant les situations qui permettent un travail analytique de celles où l'on ne pourra accéder à des résultats que via la simulation informatique.

L'enseignement semestriel de trois heures hebdomadaires a été de fait structuré en trois phases. La première phase, de trois ou quatre séances, consistait en une introduction épistémologique aux questions de modélisation, notamment à travers l'étude de quelques exemples historiques (modélisations du système solaire, travaux de Daniel Bernoulli sur l'inoculation de la variole au 18e siècle qui font de ce savant un pionnier de la modélisation en médecine, notamment). Cette phase a aussi inclus, à partir de la seconde année, la présentation par l'un de ses auteurs d'un mémoire réalisé une des années précédentes, ceci étant facilité par le fait que dès cette seconde année, des enseignants ayant obtenu leur master ont rejoint le groupe IREM. La seconde phase, la plus importante, consistait en la définition et réalisation d'un projet en petit groupe. Une séance était consacrée à la discussion de thèmes de projets possibles et à la constitution des groupes. Nous faisions des propositions, mais beaucoup de thèmes émergeaient des enseignants eux-mêmes. Ensuite, la réalisation des projets faisait l'objet d'un accompagnement personnalisé avec, à mi-parcours, une séance de présentation et discussion collective de l'état d'avancement des projets. Enfin, à la fin du semestre, la troisième phase de deux à trois séances était consacrée à la présentation et discussion collective des réalisations des groupes, la réflexion sur leur exploitation possible dans l'enseignement et sur les leçons à tirer des réalisations effectuées. On y effectuait aussi un bilan plus global de la formation.

Dans leurs projets, les enseignants avaient la possibilité de prolonger des travaux menés une année précédente. Ils recevaient, en fait, en début de formation, un CDRom contenant les mémoires des années précédentes et, par ailleurs, les mémoires les plus aboutis étaient mis en ligne sur le site du groupe Modélisation de l'IREM, après relecture et révision éventuelle. Le public était essentiellement constitué d'enseignants de mathématiques, mais l'encadrement était lui pluridisciplinaire, et le didacticien des SVT, Guy Rumelhard qui avait longtemps travaillé à l'INRP (Institut National de la Recherche Pédagogique) a joué un rôle déterminant.

Comme je l'ai dit, il nous a semblé que, vu la faiblesse du rapport à la modélisation des participants, une réflexion épistémologique s'imposait. Nous avons privilégié deux sources dont la lecture nous semblait très accessible : l'excellent ouvrage de Giorgio Israel (1996) : *La Mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*, et celui de Nicolas Bouleau (1999) : *Philosophies des mathématiques et de la modélisation : du chercheur à l'ingénieur*, qui apportaient sur la modélisation des perspectives cohérentes et complémentaires. Aujourd'hui, nous pourrions ajouter bien d'autres sources. Par exemple, dans un article co-écrit avec Katia Maass et plusieurs autres auteurs (Maass et al, 2022), nous mentionnons les travaux de Sophie Roux (2011) qui distingue trois formes de mathématisation : la quantification, la modélisation, la formalisation, tandis qu'Israel, quant à lui, caractérise la modélisation mathématique parmi d'autres formes de modélisation par sa localité, son désengagement ontologique et son opérationnalité. Ces sources ont aidé à nourrir la réflexion épistémologique sur quelques points essentiels : les diverses fonctionnalités de la modélisation (description, explication, prédiction, aide à la décision…), la spécificité des rapports à la modélisation suivant les domaines scientifiques concernés, la pluralité des modèles que l'on peut associer en général à un même fragment de réalité et la complémentarité/concurrence entre ces modèles, l'importance de la critique des modèles et la diversité des façons d'y répondre (raffinement /rejet), les questions d'échelle et de changements d'échelle dans la modélisation, et enfin les rapports entre modélisations déterministes et probabilistes, entre calcul et simulation.

Sur le plan didactique, nous nous sommes appuyés sur la vision cyclique du processus de modélisation, par exemple telle qu'elle apparaît dans l'article de Blum et Leiss (2007) très souvent cité, qui met en évidence l'importance du travail qui se situe en amont de la production d'un modèle mathématique. C'est aussi ce qu'a bien montré aussi Sonia Yvain dans sa thèse (Yvain-Prébiski, 2018) en s'appuyant sur la distinction entre mathématisation horizontale et verticale, fondamentale dans la théorie RME (Realistic mathematics education). Mais il nous a aussi paru important de souligner, en établissant une connexion avec la réflexion épistémologique, que cette représentation cyclique est une simplification à visée didactique et analytique. On perçoit bien, quand on analyse des processus réels de modélisation, qu'ils ne sont pas aussi réguliers et que les interactions entre les systèmes en jeu sont bien plus dialectiques. Néanmoins, cette vision simplifiée a été utile, sans doute aussi du fait de sa simplicité.

J'avais depuis longtemps collaboré avec des physiciens. A ce moment de ma vie professionnelle, j'ai découvert la collaboration avec des spécialistes de SVT, un monde très différent, avec des conséquences évidentes en termes de modélisation et d'interdisciplinarité. C'est sur ce point que je souhaite insister. Les mathématiques ne sont pas constitutives des concepts de SVT, contrairement à ce qui se passe en physique, et les rapports aux mathématiques en sont de ce fait profondément différents. Ceci impacte bien sûr le rapport des enseignants de SVT aux mathématiques, en particulier aux symbolismes et formalisations mathématiques. La collaboration exige la prudence à ce niveau. Il en résulte aussi que les formes de modélisation en SVT sont souvent non-mathématiques. Guy Rumelhard faisait par exemple souvent référence à l'importance en biologie de l'analogie clef-serrure et à son potentiel de modélisation. Il n'en demeure pas moins que la biologie aussi se mathématise de plus en plus, avec parfois des formes originales par rapport à celles rencontrées en physique, par exemple dans la modélisation des formes, mais aussi dans des représentations de l'ADN comme celle proposées par la CGR (Chaos game representation) (voir par exemple (Löchel et Heider, 2021), qui a été le thème d'un projet. Il y a aussi le fait que, dans les sciences de la vie, le constat de l'écart avec un modèle est souvent tout aussi intéressant que l'adéquation à ce modèle. Les exceptions au modèle de Hardy-Weinberg qui ont été explorés dans plusieurs projets en sont une bonne illustration. Enfin, une caractéristique essentielle de la modélisation dans les sciences du vivant est la variabilité du vivant, donc le rôle crucial des modèles probabilistes, avec la résistance à vaincre vis à vis de ces modélisations, d'une part parce que les enseignants manquent souvent de culture probabiliste, d'autre part parce que ces modèles peuvent concerner des êtres humains, avec les obstacles qui en découlent.

Dans le master, l'étude des travaux de Daniel Bernouilli sur la variole et des réactions qu'ils avaient suscitées à l'académie des sciences était un temps privilégié pour aborder ces questions, en les reliant à la position de Claude Bernard opposé à l'usage des statistiques en médecine, et aux résistances toujours vives de certains à la vaccination. A l'époque de cet enseignement, la vaccination contre le virus H1N1 a été notamment un sujet de débat, mais nous ne pouvions pas relier les travaux de Bernoulli à la pandémie de COVID19 comme l'a fait ultérieurement par exemple Katalin Gostonyi (2021).

Je crois pouvoir dire que, progressivement, dans le master nous avons réussi à vaincre ces obstacles et faire vivre des interactions riches et motivantes entre mathématiques et sciences de la vie avec des outils mathématiques assez élémentaires, en particulier grâce aux technologiques disponibles, comme nous l'avons montré dans (Artigue et al., 2009). La diversité des thèmes des mémoires ayant impliqué les SVT qui y sont listés en témoigne, modélisation de formes, propagation de maladies contagieuses, dynamique et traitement de tumeurs cancéreuses, analyse de séquences ADN dont la fonction n'est pas connue et CGR citée plus haut, dynamique de pools de gènes, etc. Par exemple, plusieurs mémoires successifs ont concerné la dynamique de pools de gènes dans une population avec d'abord une modélisation aléatoire, l'urne des gamètes, pour mettre en évidence un phénomène intéressant de stabilité intergénérationnelle (Loi de Hardy-Weinberg) et faire expliciter les hypothèses sous-jacentes : taille de la population, absence de mutation, de migration, de sélection et de croisements entre générations. Ensuite, d'autres mémoires se sont intéressés aux exceptions à ce modèle, lorsque certaines hypothèses ne sont pas vérifiées, et aux rectifications de modèles nécessaires, par exemple en étudiant, par simulation, la dérive génétique dans le cas de petites populations (modèle de Wright), le cas d'une maladie génétique récessive (la mucoviscidose) et d'une maladie spécifique locale (l'ataxie spastique au Québec). Les enseignants ont aussi montré la possibilité de réaliser des transpositions didactiques de leurs travaux au niveau lycée, et même collège, en exploitant des modélisations probabilistes simples et des outils technologiques, notamment le tableur.

Finalement, j'ai retenu de toutes ces expériences mettant en jeu de l'interdisciplinarité, l'importance d'une réflexion épistémologique approfondie sur la modélisation, allant au-delà des schématisations usuelles, pour nourrir le travail didactique. J'ai retenu aussi la nécessité, pour rendre le travail interdisciplinaire possible et productif, de prêter attention à l'épistémologie spécifique des différentes disciplines, de prendre en compte leur rapport différent aux mathématiques, de clarifier les sens respectifs que nous donnons aux mots clefs de l'activité scientifique (problème, expérimentation, hypothèse, preuve, modèle…), et de mener une recherche systématique des points de contacts possibles entre les différentes disciplines, en les reliant aux progressions curriculaires (Artigue, 2012). Répondre à ces nécessités ne va pas de soi. Une formation et un développement professionnel approprié des enseignants et de leurs formateurs sont une condition clef, mais ce que j'ai découvert, la richesse insuffisamment exploitée des interactions possibles entre mathématiques et autres disciplines scientifiques, m'a convaincue que l'effort mérite l'investissement.

DÉMARCHES D'INVESTIGATION ET STIM

J'en viens maintenant à la troisième dimension annoncée, celle des interactions entre démarches d'investigation et STIM. C'est à travers ma participation à plusieurs projets européens, à partir de 2010, que cette dimension est pour moi entrée véritablement en scène, devenant à son tour un objet d'étude. J'ai mentionné dans la première partie le rapport Rocard et son influence en Europe. Effectivement, ce rapport a permis le financement substantiel de projets, dans le cadre d'abord du Framework Program 7 Science in Society. J'ai eu la chance d'être invitée à participer, à titre d'expert scientifique, à deux de ces projets de 2010 à 2013, les projets *Fibonacci* et *Primas*, et donc de pouvoir observer les choix qui y étaient faits et leurs raisons, les conceptualisations développées, les réalisations effectives, et de pouvoir les comparer.

En accord avec les termes de l'appel d'offre européen, les deux projets partageaient une même ambition de dissémination à grande échelle des démarches d'investigation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences (en anglais IBL pour Inquiry based learning, IBE pour Inquiry based education, IBME et IBSE pour les déclinaisons spécifiques anx mathématiques et aux sciences), à travers la création de dispositifs spécifiques. Dans Fibonacci, il s'agissait de jumeler des centres de référence présentant déjà une certaine expertise dans des pays partenaires du projet et des institutions souhaitant développer leur expertise dans le domaine et devenir à leur tour des centres de référence. Dans Primas, il s'agissait plus classiquement de former des multiplicateurs tout en soutenant la dissémination par la création de *National consultancy panels* associant différents acteurs éducatifs. Les deux projets impliquaient tous deux un nombre important de partenaires (14 partenaires dans Primas, 25 dans Fibonacci) et de pays (12 dans Primas, 21 dans Fibonacci). Ils partageaient aussi la volonté de s'adresser à tous les acteurs, au-delà même des institutions scolaires et universitaires. Par exemple, dans Fibonacci, il était prévu d'organiser des actions avec des musées scientifiques ou d'autres structures de popularisation et diffusion des mathématiques et des sciences. Il y avait le souci de concilier la prise en compte des spécificités contextuelles des différents partenaires avec une vision partagée de l'éducation scientifique. L'accent était mis à la fois sur la formation des enseignants, la construction de réseaux et de communautés d'enseignants, et sur la production, le test, la mutualisation et l'adaptation de ressources pour soutenir la formation et l'évolution des pratiques.

Il ne fait pas de doute que ces deux projets ont produit des résultats substantiels. Par exemple, plus de 62 centres ont été créés à travers les trois phases du projet Fibonacci, et le projet Primas a permis le développement et l'expérimentation dans différents contextes de très nombreuses ressources pour un enseignement des mathématiques et des sciences basé sur les démarches d'investigation et pour la formation des enseignants, qui ont ensuite été réutilisées dans des projets ultérieurs. Mais, il me semble aussi important de souligner que de nombreuses questions restaient largement ouvertes lorsque ces projets ont débuté, notamment des questions sur la nature même de l'IBL et de l'IBE, les rapports entre IBME et IBSE, sur les preuves acquises de l'efficacité de l'IBL et IBE, sur les stratégies efficaces de formation des enseignants à l'IBE, ainsi que sur le contrôle possible de la dissémination et l'évaluation de ses effets sur les enseignants et sur leurs élèves.

Ce sont des questions sur lesquelles les acteurs des deux projets ont essayé d'avancer, en s'appuyant sur la littérature existante, en agissant et en réfléchissant collectivement sur leur action, et en collectant de nombreuses données pour nourrir cette réflexion. Je voudrais ici me centrer sur la première question mentionnée, fondamentale d'un point de vue épistémologique. Le rapport Rocard qui avait motivé l'appel d'offre du FP7 parlait de démarche d'investigation en sciences et de résolution de problèmes en mathématiques et une première question s'est rapidement posée dès la formalisation des deux projets : fallait-il ou non garder cette distinction? Dans les deux projets, la réponse a été négative, mais cela ne résolvait pas pour autant la question des rapports entre démarche d'investigation en mathématiques et en sciences. Dans Primas comme dans Fibonacci, la construction d'une vision commune entre les partenaires a pris plus d'une année. Les réponses apportées ont d'ailleurs été différentes dans les deux cas.

Dans Primas, la conceptualisation a été unitaire, comme le montre la figure 3, et les différences d'épistémologie entre les disciplines ont été gommées.

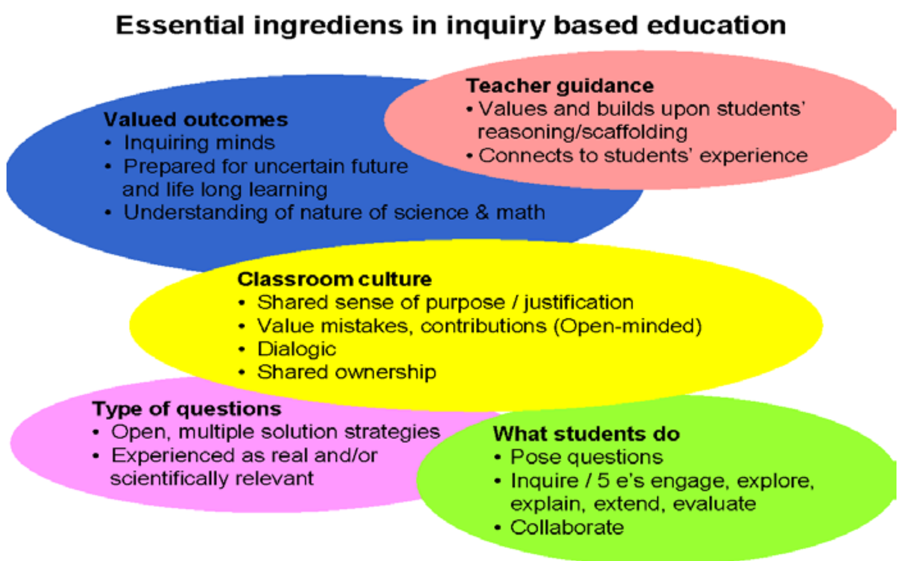


Figure 3 – Conceptualisation de l'IBE dans le projet Primas (Artigue et Blomøj, 2013,p.)

Je me souviens d'avoir particulièrement insisté pour que la pertinence scientifique des questions soit un des critères sans parvenir à l'imposer car pour mes collègues cela semblait écarter beaucoup de problématiques de vie quotidienne souvent utilisées pour promouvoir les démarches d'investigation.

Dans Fibonacci, c'est surtout le conseil scientifique dont je faisais partie qui a été en charge de cette réflexion, et les spécialistes de sciences ont proposé la conceptualisation suivante, en mettant l'accent sur la non-linéarité du processus et l'importance que le travail d'investigation soit mis au service du développement des concepts scientifiques, ce qui est porté dans le schéma par le mouvement vers des « bigger ideas » (Figure 4).

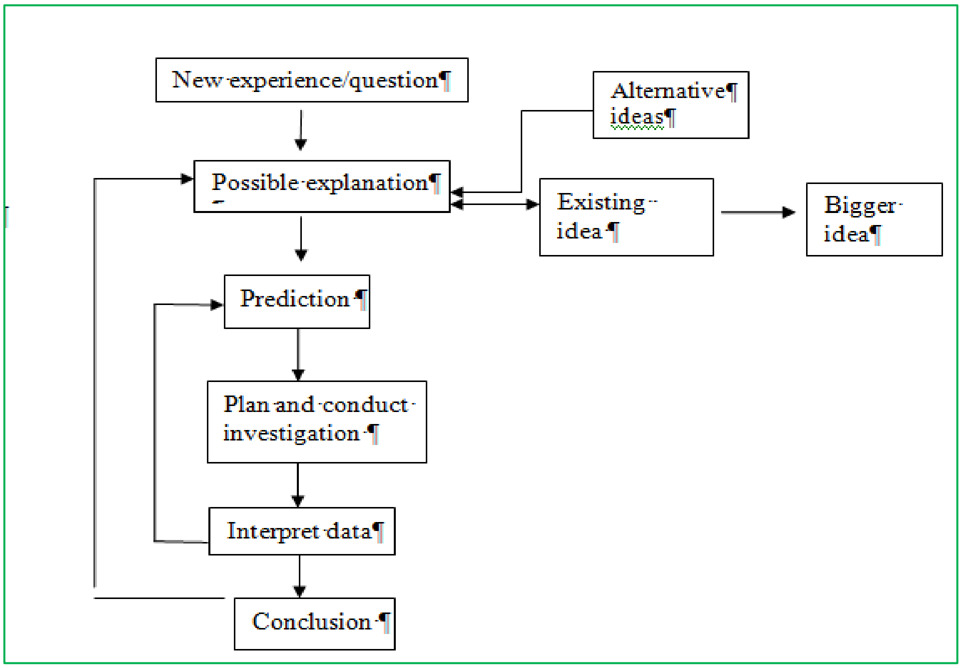


Figure 4 – La conceptualisation de l'IBL en sciences dans le projet Fibonacci (Harlen, 2012, p. 5).

En mathématiques, il nous a semblé impossible d'adopter ce schéma tel que. Tout en reconnaissant l'existence de nombreuses similarités avec l'IBSE, au niveau des processus et des valeurs, dans la vision de l'IBME qui dépassait la seule résolution de problèmes que nous voulions développer, il nous semblait important de souligner certaines différences (Artigue et Baptist, 2012). Celles-ci portaient notamment sur les sources possibles de questions, à la fois externes et internes en mathématiques ; les formes diverses que prend l'expérimentation en mathématiques et la diversité de ses fonctions ; le caractère fortement connecté et cumulatif de la discipline et enfin les formes de validation, en distinguant validité interne aux mathématiques et validité externe prenant en compte le contexte extra-mathématique et sa rationalité propre, lorsque les questions auxquelles on veut répondre ne sont pas internes aux mathématiques, ce qui nous ramène à la modélisation. Dans le Fibonacci booklet dédié à la démarche d'investigation en mathématiques, co-écrit avec Peter Baptist de l'université de Bayreuth qui avait été responsable des projets *Sinus* et Sinus-Transfer mentionnés dans le rapport Rocard, et était co-responsable avec Pierre Lena de Fibonacci, (Artigue et Baptist, 2012), nous avons illustré ces caractéristiques par différents exemples.

Le constat de ces choix différents de conceptualisation entre les deux projets, du long travail qu'avaient nécessité l'élaboration d'un consensus et des vives discussions que cela avait généré, m'ont conduite avec mon collègue danois Morten Blomøj participant au projet Primas à développer un travail de recherche spécifique sur la conceptualisation de l'IBME, dans le cadre de la préparation d'un numéro spécial de ZDM (Maaβ et al., 2013). Dans l'article qui en a résulté (Artigue et Blomøj, 2013), souvent cité depuis, nous nous sommes interrogés sur les fondements didactiques de l'IBME, partant de l'hypothèse que si cet acronyme, apparu dans le contexte de l'enseignement des sciences aux USA dans les années 90 avait migré assez récemment vers les mathématiques, ce n'était pas pour autant qu'il fallait en conclure que le terrain était vierge en mathématiques. En effet, dans ce que la recherche en didactique des mathématiques a développé depuis les années 70, on trouve des parentés certaines avec l'IBSE.

Dans l'article, nous revenons aux sources des démarches d'investigation, bien sûr aux travaux du philosophe pragmatiste et éducateur John Dewey aux USA aux débuts du 20e siècle (Dewey, 1916, 1938). Nous soulignons la progression des idées malgré les controverses, jusqu'à la légitimation via la publication des National Science Education Standards (National Research Council, 1996) qui ont promu l'IBSE aux Etats-Unis. Nous étudions ensuite les résonances avec des théories et approches bien établies en éducation mathématique. Nous considérons les six suivantes, représentées dans le projet Primas. Il s'agit à la fois de théories qui constituent, depuis son émergence, des piliers de ce champ de recherche comme l'approche anglo-saxone du *problem solving,* la TSD (Théorie des situations didactiques) et RME (Realistic mathématics education), et de théorisations plus récentes comme les approches dialogiques et critiques, mais aussi la TAD (théorie anthropologique du didactique) et bien sûr les approches en termes de modélisation. Nous montrons l'existence dans toutes ces théorisations de valeurs partagées en accord avec les valeurs de l'IBE, mais nous montrons aussi qu'elles se distinguent par des hiérarchies de sensibilités différentes par rapport aux dix dimensions suivantes :

- l'authenticité des questions en termes de connexion avec la vie des élèves et la relation avec des questions et activités extra-scolaires ;
- la pertinence épistémologique des questions d'un point de vue mathématique et la prise en compte du caractère cumulatif des mathématiques ;
- la connexion avec la progression curriculaire ;
- la nature extra-mathématique des questions et la dimension de modélisation du processus d'investigation ;
- la dimension expérimentale des mathématiques et son support technologique ;
- le développement de compétences de résolution de problèmes et d'inquiry *habits of mind*;
- l'autonomie et la responsabilité donnée aux élèves dans le processus d'investigation ;
- le rôle de guidage de l'enseignant et les interactions dialogiques entre enseignant et élèves ;
- la dimension collaborative du processus d'investigation ;
- la dimension critique et démocratique de l'IBME.

Il en résulte que, dans des projets européens comme les projets Primas et Fibonacci, qui mobilisent des acteurs de différents contextes et cultures, des chercheurs ayant des références théoriques et expériences différentes, un kaleidoscope de perspectives coexistent sous la bannière de l'IBME malgré l'existence de consensus sur des descriptions globales de l'IBME. D'où l'importance d'identifier ces caractéristiques pour mieux faire dialoguer les approches et profiter au mieux de leurs potentialités respectives (Artigue et al., 2020). Et, effectivement, la distance est grande entre une situation comme la situation du puzzle, emblématique de la TDS (Brousseau et Brousseau, 1987), et la situation d'infection par la salmonelle portée par une approche dialogique et critique (Alrø and Skovsmose (2002), deux situations qui ont été proposées respectivement par les partenaires suisses et danois comme ressources pour la classe dans le projet Primas.

Pour revenir plus globalement à ces deux premiers projets et à leurs résultats, on ne peut nier leur réussite quantitative indéniable, confirmée par l'évaluation externe de ces projets, ni le fait que, même s'il ne s'agissait pas de projets de recherche *stricto sensu*, ils ont permis de développer un ensemble d'études intéressantes qui ont contribué à mieux cerner le contexte propre à chaque pays et les conditions et contraintes associées, leur influence sur les formes que pouvaient y prendre l'IBSE et l'IBME, la formation et l'accompagnement des enseignants. Ils ont permis aussi la production ou l'adaptation d'un grand nombre de ressources pour l'enseignement et la formation des enseignants, largement accessibles en ligne sur les sites internationaux et nationaux associés aux projets, et de modèles pour la formation des enseignants, ainsi que la construction de réseaux et de communautés permettant une avancée vers des pratiques plus collectives de travail pour les enseignants. Enfin, ils ont suscité le développement de nombreuses actions associant des acteurs extérieurs à l'école et la réflexion sur ces actions. Le numéro spécial de *ZDM* (Maaβ et al., 2013) déjà cité et le site https://primas-project.eu/about/ en témoignent pour le projet Primas, tout comme l'ouvrage (Harlen et Lena, 2014) et les nombreuses ressources accessibles sur le site de la fondation *La main à la pâte*, co-organisatrice du projet Fibonacci.

Il faut néanmoins reconnaître que le contrôle est resté limité sur ce qui avait été réellement mis en place sous couvert d'IBME et d'IBSE dans les classes et en formation et que ces deux projets ont fait émerger d'importants besoins de recherche qu'ils n'ont pas pu prendre réellement en charge. Ils ont mis en évidence par exemple l'obstacle constitué par les modes d'évaluation usuels des apprentissages dans les pays concernés, un obstacle encore accru par la montée en puissance des évaluations standardisées. Il faut aussi reconnaître que, si un ensemble de ressources intéressantes a été développé à la fois en mathématiques et en sciences, la connexion entre mathématiques et sciences est restée limitée à ce niveau. De fait, ces deux projets ont confirmé que les pratiques d'IBME et d'IBSE visées se situaient à une grande distance des pratiques d'enseignement usuelles dans tous les pays concernés et que l'évolution ne pouvait être qu'un long processus qui devait être soigneusement guidé et accompagné dans la durée par des formations de durée substantielle. Ils ont montré le rôle décisif joué dans les positives évolutions constatées par les activités de mentorat et par l'organisation de réseaux d'enseignants et formateurs, ainsi que l'importance d'obtenir des soutiens au-delà des seules communautés scolaires pour permettre des changements durables.

Ce n'était que le début. Depuis, les projets se sont multipliés et j'ai participé toujours comme experte scientifique à quatre d'entre eux, dont trois à l'initiative de la Faculté d'éducation de l'Université de Freiburg en Allemagne, pilotés comme le projet Primas par Katjia Maass. J'y ai retrouvé certains partenaires de Primas, qui se sont retrouvés aussi dans l'ICSE (International Center for STEM Education) créé dans cette même université (https://icse.eu) et à l'origine des conférences régulières *Educating the Educators*. Comme l'indique le site, ICSE "focuses on practice-related research and its transfer into practice. ICSE sustainably links stakeholders from research, practice, policy and industry, nationally as well as internationally through the ICSE consortium".

Les deux premiers projets ont été les projets Mascil (2013-2016) et Assist-Me (2013-2016). Le premier avait pour objectif de connecter l'IBE avec le monde du travail (WoW-World of Work dans le projet) pour faire face notamment à trois problèmes : le fait que, même lorsqu'ils ont de l'intérêt pour les sciences, les élèves ne s'orientent pas nécessairement vers les carrières scientifiques, et que les enquêtes montrent qu'ils connaissent mal la diversité des carrières scientifiques possibles ; l'invisibilité des mathématiques dans nos sociétés malgré leur omni-présence ; le fait enfin que les évaluations internationales montrent que les élèves européens ont des performances insuffisantes en sciences, en particulier ceux vivant dans des milieux socio-défavorisés. Mascil (Mathematics ans science for life, 2013-2016) a regroupé 13 partenaires européens pour développer des ressources pour les classes et le développement professionnel des enseignants permettant un enseignement plus connecté avec le monde du travail, et pour experimenter ces ressources en les adaptant au contexte et à la langue de chaque partenaire. La conception de l'IBE est directement inspirée de celle de Primas et le modèle de développement professionnel des enseignants s'inscrit lui aussi dans la continuité des recherches menées dans Primas. Il est basé sur les principes suivants (Maaβ & Engeln, 2019, p. 970) qui seront aussi repris dans les projets ultérieurs :

- take teachers' needs into account (Guskey 2000);
- combine seminar phases with learning-on-the-job at school (Lipowsky and Rezjak 2012);
- be long term (Tirosh and Graeber 2003);
- stimulate cooperation between teachers (Barzel and Selter 2015);
- be relevant to teaching practices (Barzel and Selter 2015); and
- foster teachers' reflection on their beliefs about mathematics teaching (cf. Tirosh and Graeber 2003; Barzel and Selter 2015).

L'article étudie aussi l'effet de ces formations sur les enseignants et leurs pratiques, mais comme le soulignent les auteurs eux-mêmes, les données utilisées dans l'étude sont recueillies via des questionnaires et sont donc uniquement de type déclaratif, et il n'y a pas de suivi à moyen terme.

Le projet Assist-Me[7], porté par l'Université de Copenhague, lui, s'est focalisé sur un obstacle majeur identifié dans les premiers projets et déjà mentionné, celui de l'évaluation et j'y ai retrouvé certains acteurs du projet Fibonacci. Il s'agissait cette fois d'un projet de recherche. Le travail mené a permis d'avancer sur ces questions d'évaluation, en

[7] https://www.ind.ku.dk/english/projects/assist-me/

développant et étudiant plusieurs modèles d'évaluation formative adaptés à des pratiques d'IBE et en s'attaquant aussi aux nécessaires adaptations de l'évaluation sommative.

Les deux derniers projets que je vais brièvement mentionner ont été portés par l'ICSE. Le premier était un projet Erasmus+ et le second un projet mené dans le cadre du programme européen Horizon 2020. Ils illustrent bien l'évolution des perspectives. Par exemple dans MaSDIV[8] (Supporting mathematics and science teachers in addressing diversity and promoting fundamental values – 2017-2020), qui a concerné six pays, l'accent a été mis d'une part sur l'inclusion de tous les élèves dans les pratiques d'IBE quel que soit leur niveau scolaire et aussi leurs contextes et cultures, d'autre part sur une IBE portée par des questions socio-scientifiques (SSI). L'accent a été également mis sur le fait qu'il ne s'agit plus seulement d'apprendre des STEM mais d'aussi d'apprendre à propos des STEM, de ne pas négliger que la science a des dimensions sociales, culturelles et éthiques, ce qui a été trop souvent négligé dans l'éducation et ne peut plus l'être. Je me souviens de longues discussions menées lors des réunions du projet pour savoir comment prendre en compte la diversité culturelle des élèves dans les questionnements et documents élaborés comme support pour le développement professionnel des enseignants, à un moment où les pays partenaires, notamment l'Allemagne, faisaient face à un nombre croissant d'élèves migrants. Également, pour favoriser l'implémentation, en prenant en compte les résultats des projets précédents, dans chaque pays, le consortium a associé le ministère de l'éducation.

Dans le projet MOST[9] (Meaningful Open Schooling Connects Schools to Communities – 2020-2023) qui a suivi, la dimension SSI a été encore plus centrale. En effet, comme le précise le site du projet :

The Horizon 2020 project MOST intends to open up school education by initiating school-community projects (SCPs) across Europe. Within a school-community-project, schools and community members (families, science education providers, citizens, businesses etc.) work together to find regionally implementable and scientific approaches to sustainable issues. The focus is on waste management (2021) and energy saving (2022).

To implement this project, our dedicated consortium of 23 educational and environmental expert teams from 10 European countries have come together, including higher education institutions, schools, ministries, municipalities, enterprises, non-formal education providers.

All participants and supporters of the MOST project form the European Open Schooling Network (EOSnet), which will be enlarged step-by-step all over Europe into a vibrant Open Schooling community network.

Dans ce projet qui a mobilisé 23 équipes d'experts éducatifs et environnementaux de 10 pays européens, l'objet central a donc été le concept de School-Community Project où des partenaires scolaires et extra-scolaires (communautés) travaillent ensemble pour développer des approches scientifiques et implémentables à des questions de durabilité

---

[8] https://icse.eu/international-projects/masdiv/

[9] https://icse.eu/international-projects/most/

(sustainability) portant sur deux thématiques privilégiées, la gestion des déchets et les économies d'énergie. MOST a conduit à une diversité d'actions d'ampleur diverse, de quelques séances à plusieurs mois suivant les contextes, avec des interactions disciplinaires réelles, même si les mathématiques y ont gardé, trop souvent encore, un rôle de discipline de service. De fait, malgré les conditions particulièrement difficiles dues au contexte pandémique, plus de 200 SCP ont été réalisés dans le cadre de MOST. Chaque équipe a organisé également des MOST Fairs (foires MOST) où les SCP et leurs résultats étaient plus largement diffusés. Et le projet Européen a créé des guides et ressources pour aider à mener de tels projets et les évaluer. Par ailleurs, un réseau Européen, le European Open Schooling Network (EOSnet)[10] a été créé pour partager de telles initiatives.

Je m'arrêterai là, mais il est clair que, au fil de ces projets, on observe une continuité évidente de travaux combinant développement et recherche, et une capitalisation progressive des acquis. Mais on note aussi un élargissement progressif des problématiques prenant en compte les demandes actuelles faites à l'enseignement globalement et à celui des STIM plus particulièrement, en termes d'éducation à une citoyenneté active et responsable, soucieuse de la préservation de l'environnement et de la biodiversité, et en termes d'inclusion et de respect des différences culturelles et autres.

CONCLUSION

Je souhaitais dans ce texte, comme dans la conférence dont il est issu contribuer à la réflexion au centre du colloque ADIMA 4 sur les défis et opportunités que porte un enseignement des mathématiques inscrit dans une éducation aux STIM, en partageant des éléments de mon expérience d'interdisciplinarité, de modélisation et de projets européens visant à soutenir en mathématiques et en sciences des modes d'enseignement et d'apprentissage basés sur les démarches d'investigation. J'espère avoir montré qu'il existe un grand nombre d'expériences de connexions réussies entre mathématiques et d'autres disciplines scientifiques à tous les niveaux d'enseignement et dans la formation des enseignants. Avoir montré aussi qu'il existe aujourd'hui une diversité de ressources, tant théoriques et conceptuelles que pratiques, pour penser l'enseignement des mathématiques, la formation des enseignants et des formateurs à l'heure des STIM, pour prendre en compte l'évolution scientifique, technologique et celle des demandes sociétales.

Cependant, on ne peut nier que perdure une difficulté à mettre en place des formes d'intégration de l'enseignement des mathématiques dans le complexe des enseignements STIM qui préservent leur intégrité et ne les réduisent pas à un rôle d'outil. C'est ce que confirme le numéro spécial de la revue *ZDM* de décembre 2023 consacré justement aux recherches récentes sur les mathématiques dans l'enseignement interdisciplinaire des STEM. Le résumé de l'introductif de ce numéro spécial (Goos, Carreira et Namukasa, 2023) précise :

This special issue introduces recent research on mathematics in interdisciplinary STEM education. STEM education is widely promoted by governments around the world as a way of boosting students' interest and achievement in science, technology, engineering, and mathematics and preparing STEM-qualified workers for twenty-first century careers.

---

[10] https://icse.eu/eosnet/

However, the role of mathematics in STEM education often appears to be marginal, and we do not understand well enough how mathematics contributes to STEM-based problem-solving or how STEM education experiences enhance students' learning of mathematics.

Et, après avoir présenté une revue narrative de 53 articles de recherche publiés dans ce domaine entre 2017 et 2022, l'article s'achève en soulignant la nécessité de développer les recherches, notamment sur les cinq thématiques suivantes :

- étudier les méthodes et les raisons permettant de relier les disciplines constitutives des STIM de manière à préserver l'intégrité disciplinaire des mathématiques ;
- clarifier ce que l'on entend par "réussite" des étudiants dans les programmes, projets et autres approches éducatives interdisciplinaires en matière de STIM ;
- étudier comment on peut aider les enseignants à modifier leur vision du rôle possible des mathématiques dans un enseignement interdisciplinaire des STIM, et aller au-delà des pratiques actuelles qui positionnent les mathématiques comme un outil pour résoudre des problèmes d'autres disciplines ;
- comprendre ce qui rend une tâche STIM mathématiquement riche ;
- et se demander aussi comment la recherche sur l'enseignement des STIM peut façonner de manière productive la politique d'enseignement des STIM.

Tout ceci montre bien qu'en dépit des recherches et réalisations existantes, il reste effectivement beaucoup à faire.

REFERENCES

ALIBERT, D., ARTIGUE, M., COURDILLE, J.M., GRENIER, D., HALLEZ, M., LEGRAND, MENIGAUX, J., RICHARD, F., & VIENNOT, L. (1988). Le thème "différentielles" - un exemple de coopération maths-physique dans la recherche. In G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin (Eds.), *Didactique des acquisitions des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 7-45). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

ALIBERT, D., ARTIGUE, M., COURDILLE, J.M., GRENIER, D., HALLEZ, M., LEGRAND, MENIGAUX, J., RICHARD, F. et VIENNOT, L. (1989). Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire. Brochure n°74. IREM Paris 7. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97040.pdf

ALRØ, H. et SKOVSMOSE, O. (2002). Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer.

ARTIGUE, M. (1981). DEUG SSM première année section E. Un an de fonctionnement. Brochure n°50. IREM de Paris.

ARTIGUE M. (2012). Reflections around interdisciplinary issues in mathematics education. In, W. Blum, R. Booromeo Ferri, C. Katja Maass (Eds.) *Mathematik unterricht* *im Kontext von realität, Kultur und Lehrerprofessionalität (*pp. 24-33). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2389-2_3

ARTIGUE, M. et BAPTIST, P. (2012). *Inquiry inmathematics education*. https://fondation-lamap.org/sites/default/files/pdf_res_int/inquiry_in_mathematics_education_web.pdf

ARTIGUE, M., & BLOMHØJ, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 797- 810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

ARTIGUE, M., BOSCH, M., DOORMAN, M., JUHÁSZ, P., KVASZ, L. et MAASS, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *18*/3, 63-89. https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0505

ARTIGUE, M. et BÜHLER, M. (2003). Quelle place pour les mathématiques dans les TPE. In M. Bridenne et Y. Matheron (Eds.), *Actes du colloque inter-IREM Didactique de Dijon*, *24-25 Mai 2002* (pp. 123-140). IREM de Dijon

ARTIGUE M., DARTOIS Y., POUYANNE N. et RUMELHARD G. (2009). Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie : l'expérience du Master professionnel « Didactique » à l'université Paris-Diderot –Paris 7. In Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (Eds.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques (*pp. 277-293). Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/G_modelisation.pdf

ARTIGUE M ., MENIGAUX J. et VIENNOT L. (1989). *Questionnaires de travail sur les différentielles*. Brochure n°76. IREM Paris 7. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97042.pdf

ARTIGUE M., MENIGAUX J. et VIENNOT L. (1990). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. European Journal of Physics, vol 11, 262-267.

BLUM, W. et LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling. Education, engineering and economics — ICTMA 12* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221.

BLUM, W., GALBRAITH, P.L., HENN, H.-W. et NISS, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

BOULEAU, N. (1999). Philosophie des mathématiques et de la modélisation. Paris : L'Harmattan.

BROUSSEAU, G. et BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

CHAN, M.C.E., SABENA, C. et WAGNER, D. (Eds.) (2021). Mathematics education in a time of crisis—a viral pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 108*(1-2).

DEWEY, J. (1916). *Democracy and education*. New York : Macmillan.

DEWEY, J. (1938*). Logic: The theory of inquiry*. New York : Holt.

ENGELBRECHT, J., BORBA, M. et KAISER, G. (Eds.) (2023). COVID 19 pandemic – its mathematical background and its social and educational consequences. *ZDM, 55*(1).

ENGLISH, L. (2016). Stem education in K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education.*

GOOS, M., CARREIRA, S. & NAMUKASA, I.K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM Mathematics Education* 55, 1199–1217. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z

GOSTONYI, K. (2021). How history of mathematics can help to face a crisis situation: The case of the polemic between Bernoulli and d'Alembert about the smallpox epidemic. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(1-2), 105-122. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10077-6

HARLEN, W. (2012). *Inquiry in science education*. https://fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_science_education.pdf

HARLEN, W. et LENA, P. (Eds.) (2014). *The legacy of the Fibonacci project to science and mathematics education.* https://fondation-lamap.org/sites/default/files/pdf_res_int/fibonacci_book.pdf

ISRAEL, G. (1996). La Mathématisation du réel : Essai sur la modélisation mathématique. Paris : Editions du Seuil.

KAHANE, J.-P. (2001). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

LÖCHEL, H.F. et HEIDER, D. (2021). Chaos game representation and its applications in bioinformatics. *Computational and Structural Biotechnology Journal*, 19, 6263-6271, https://doi.org/10.1016/j.csbj.2021.11.008.

MAASS, K., ARTIGUE, M., DOORMAN, M., KRAINER, K., & RUTHVEN, K. (Eds.) (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6).

MAASS, K., DOORMAN, M., GEIGER, V. et GOOS, M. (Eds.) (2019). 21st century skills and STEM teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 51.*

MAASS, K., ENGELN, K. (2019). Professional development on connections to the world of work in mathematics and science education. *ZDM Mathematics Education 51*, 967–978 https://doi.org/10.1007/s11858-019-01047-7

MAASS, K. et al. (2022). Mathematical modelling – a key to citizenship education. In Buchholtz, N., Schwarz, B., Vorhölter, K., (Eds.) *Initiationen mathematikdidaktischer Forschung*. Springer Spektrum, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36766-4_2

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1996). *National science education standards*. Washington, DC: National Academy Press.

ROCARD, M., CSERMELY, P., JORDE, D., LENZEN, D., WALBERG-HENRIKSSON, H. et HEMMO V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une* *pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Commission Européenne, Direction générale de la recherche, Science, économie et société.

ROUX, S. (2011). Pour une étude des formes de la mathématisation. In H. Chabot et S. Roux (Eds.), *La mathématisation comme problème* (pp.3-38). Paris: Éditions des Archives Contemporaines. halshs-00813050/document.

SHIMIZU, Y., & VITHAL, R. (Eds.). (2023). Mathematics Curriculum Reforms Around the World. The 24th ICMI Study. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4

YVAIN-PREBISKI, S. (2018). Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves. Thèse de doctorat. Université de Montpellier. HAL Id: tel-01956661

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Des cercles venus d'ailleurs !

Maha Abboud [11] et Assia Nechache
CY Cergy Paris Université, France

Résumé – Dans cet article, nous nous posons la question d'améliorer la compréhension de concepts mathématiques via une approche interdisciplinaire d'enseignement et d'apprentissage dans le contexte de l'astronomie. Les concepts mobilisés sont ceux du mouvement des planètes du système solaire, en physique, et des formes des orbites en mathématiques. Nous présentons d'abord une situation adoptant une telle approche et analysons sa mise en place dans deux niveaux scolaires différents. Nous discutons ensuite de l'intérêt de cette approche pour l'acquisition et la mobilisation des connaissances mathématiques en jeu.

Le déclin constaté ces dernières années de l'intérêt pour les connaissances scientifiques provient généralement de l'idée erronée selon laquelle les mathématiques et les sciences n'impliquent que des concepts abstraits très complexes et éloignés de la cognition quotidienne et de l'expérience du monde ordinaire (Scientix[12], 2018). Les travaux que nous avons entrepris depuis plusieurs années[13] visent à promouvoir un environnement multimodal pour les apprentissages des mathématiques et des sciences dans le contexte de l'astronomie du système solaire. En effet, plusieurs recherche atteste que l'astronomie fournit un contexte motivant pour les jeunes apprenants en reliant le concret et l'abstrait, le mystérieux et le familier (e.g. Nilsen et Angell, 2014 ; Rollinde, 2021). Notre démarche est par ailleurs cohérente avec les programmes en vigueur dans le système éducatif français qui plébiscitent le recours à l'interdisciplinarité en incitant à un travail sur les acquisitions de connaissances communes à plusieurs enseignements et la mise en lien des différents domaines du socle commun (Nechache et Rollinde, in press).

Dans cet article, nous nous posons la question de l'approche à adopter pour améliorer l'apprentissage de concepts mathématiques et physiques dans un contexte à la fois stimulant et permettant de donner du sens à ces concepts, souvent considérés par les élèves comme trop abstraits. Nous présentons et analysons une mise en place d'une situation adoptant une approche d'enseignement interdisciplinaire des mathématiques et de la physique. Il s'agit d'une démarche qui se veut transversale, dépassant le strict cadre d'une seule de ces deux disciplines, s'apparentant

---

[11] Abboud, M. et Nechache, A. (2024). Des cercles venus d'ailleurs ! In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 33-44.

[12] http://www.eun.org/resources/detail?publicationID=1501

[13] https://www.ldar.website/esmea

par-là aux STIM. De plus, nous avons souhaité mettre les élèves dans une situation problème où ils auront besoin de rendre opérationnelle leur compréhension de ces concepts afin de résoudre le problème qui leur est posé. Le contexte choisi est donc celui de l'astronomie ; les concepts mobilisés sont ceux du mouvement des planètes du système solaire, en physique, et du cercle et ellipse en mathématiques.

I. CONTEXTE ET CONNAISSANCES EN JEU

Dans le cadre des journées astronomie organisées par le bureau de l'astronomie pour l'éducation de CY Cergy Paris Université[14]. Des classes d'établissements secondaires sont accueilles par des enseignants spécialistes qui leur proposent des ateliers variés autour de savoirs scientifiques dans le contexte de l'astronomie. Un de ces ateliers a pour objectif de faire réfléchir les élèves aux mouvements des planètes autour du soleil à travers l'utilisation du planétaire humain. C'est l'analyse de cet atelier qui fait objet de cet article.

Le planétaire humain est une représentation d'une partie du système solaire à une échelle réduite. C'est un outil pédagogique qui offre la possibilité de vivre avec son corps le mouvement des planètes ainsi que certaines comètes autour du Soleil. Il permet de contextualiser, via l'astronomie et une approche incarnée, des notions relevant des mathématiques et de la physique ou encore de « faire des mathématiques en plein air en marchant dans le Système solaire » (Abboud & Rollinde, 2021, p.37).

Le planétaire humain : description et potentiel

Pour la conception du planétaire humain[15] (PH), des choix de représentation des objets et des échelles de temps et de distance ont été nécessaires. Différentes positions des quatre planètes du système solaire les plus proches du Soleil (Mercure, Venus, Terre, Mars) sont représentées dans un référentiel héliocentrique. Ces positions sont représentées par des médaillons (petits disques) de couleur spécifique pour chacune des planètes (cf. figure 1).

[14] https://oaenf.cyu.fr/

[15] http://planetaire.over-blog.com/2017/09/le-blog-des-planetaires-humains-eu-hou.html.html

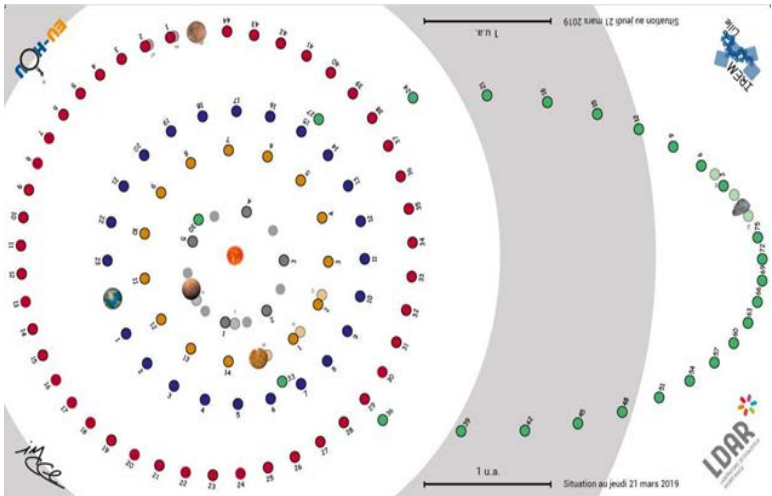


Figure 1 – Le planétaire humain (format 3m-6m)

Ces médaillons permettent de suivre la trajectoire d'une planète lorsque celle-ci tourne autour du Soleil, formant ainsi son orbite discontinue. Entre deux positions successives sur une orbite, l'intervalle de temps est égal à 15 ou 16 jours terrestres (une année terrestre étant divisée en 24 intervalles). Le soleil est placé dans l'un des foyers des ellipses que forment les orbites de tous les objets du système solaire. En plus des planètes, une comète (Encke) est aussi représentée sur le PH. Les échelles de distance entre les différents objets sont bien respectées. Concernant l'unité de longueur, le choix le plus courant est de représenter la distance Terre-Soleil (définition d'une unité astronomique) par un mètre, ce qui facilite les conversions d'échelle par la suite. En revanche, la taille des planètes (et la comète) ainsi que celle du Soleil n'est pas respectée ; ils sont tous représentés à la même taille. Le PH existe en différents formats. Le modèle que l'on qualifiera de classique consiste en une bâche de 3m par 6m logeant assez aisément dans une salle de classe standard. Un format plus important (12m par 12m) permet de faire également figurer l'orbite de Jupiter ainsi qu'une comète supplémentaire (Churyumov-Gerasimenko), mais demande plus d'espace et est bien moins facilement transportable. Des modèles réduits au format A3 permettent également des réinvestissements en salle de classe. Les élèves se déplacent sur le PH en respectant certaines règles : (1) le sens de déplacement est celui du sens de révolution des planètes sur leur orbite qui est indiqué par la numérotation des différentes positions ; (2) le rythme de déplacement est donné par une source extérieure (métronome ou clap régulier dans les mains). L'objectif est d'amener les élèves à réaliser un mouvement continu au cours duquel ils feront un pas entre deux claps et poseront un pied sur un médaillon à chaque « clap ».

Le PH possède donc un potentiel en termes de mobilisation de connaissances mathématiques de l'enseignement secondaire que ce soit pour l'étude de figures géométriques (orbites des planètes), de la mesure de grandeurs, des nombres et des relations (relation de Kepler, mesures de la vitesse, etc.) ou encore du repérage dans le plan (rétrogradation de Mars). Abboud et Rollinde (2021) décrivent en détail les choix de conception du PH et récapitulent les différents lieux où il peut être utilisé dans l'enseignement des mathématiques au regard des programmes de l'enseignement secondaire en France. Rollinde et al. (2020) démontrent le lien naturel qui s'établit avec l'enseignement de la cinématique dans les programmes en physique (mouvements et interaction).

I- LA CONCEPTION DE LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

La situation d'apprentissage autour du PH avait pour objectif de faire réfléchir, sur une durée de 30 min, les élèves sur les orbites des planètes en établissant un lien entre les mouvements (en physique) et les figures géométriques (en mathématiques). Elle est mise en œuvre par une enseignante de mathématique pour des élèves de l'enseignement secondaire (âgés entre 14 et 18 ans) dans une salle de classe dans laquelle la bâche (6m sur 4 m) est étendue au sol.

La situation est conçue en quatre étapes. Dans la première, les élèves sont interrogés sur la manière d'identifier le mouvement d'un objet du système solaire. Il s'agit donc de rappeler que le mouvement d'un objet est repéré de par sa trajectoire et sa vitesse (connaissances travaillées dès l'entrée en secondaire (11ans)). Dans la deuxième étape, les élèves sont assis autour du PH, il leur est demandé d'identifier, d'abord, la forme géométrique de l'orbite des planètes (Mars, Terre, Vénus, Mercure), puis celle de la comète. En observant uniquement le planétaire, il est attendu que les élèves affirment que l'orbite de chacune des planètes, « ressemble » à un cercle dont le centre est le Soleil (plus précisément le centre du médaillon qui représente le soleil). Pour la comète Encke, en fonction des niveaux de classes, la réponse est qu'elle ressemble à un ovale ou une ellipse. Après un rappel de la définition d'un cercle et d'une ellipse, il est alors demandé aux élèves de vérifier leurs hypothèses. Des artefacts matériels sont mis à leur disposition (ficelle, règle du maître, décamètre, etc.). Dans la troisième étape, il est demandé d'indiquer la position des foyers de l'ellipse décrivant l'orbite de la comète Encke. Pour cela, une visualisation de la construction d'une ellipse à l'aide du logiciel GeoGebra est proposée par l'enseignante. Dans la dernière étape, est énoncée/rappelé la première loi de Kepler portant sur le mouvement des planètes et de comètes : « *les orbites des corps du Système solaire sont des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers* ».

Pour accompagner le travail mathématique des élèves, les interventions prévues de la part de l'enseignante sont globalement de trois types : poser une question en termes de connaissances mathématiques et de conjectures (sur la forme géométrique) ; demander les caractéristiques d'une figure géométrique (cercle et l'ellipse) pour amener l'élève à mobiliser ses connaissances antérieures ; renvoyer l'élève sur le PH pour identifier ces caractéristiques dans une dialectique entre ce que je vois/vis de ces formes géométriques et ce que j'en sais[16] (Colmez et Parzysz, 1993).

II. LA MISE EN ŒUVRE : AVEC DES ÉLÈVES DE CLASSES DE 3E ET DE TERMINALE

En raison du nombre restreint de pages, nous avons choisi de relater le déroulement de deux ateliers, l'un avec 15 élèves de classe de 3[e] (14-15 ans) et l'autre avec 15 élèves de classe de terminale scientifique (17-18 ans). Précisons que dans le curriculum français : tous les élèves connaissent le cercle et ses propriétés depuis l'âge de 9 ans, les élèves de terminale ont déjà rencontré l'ellipse et étudier les lois de Kepler, ce qui n'est pas le cas pour les élèves de troisième. Dans ce qui suit, nous présentons pour chaque niveau de classe le déroulement général en mettant le focus sur certains moments particuliers. Nous revenons ensuite sur ces déroulements en essayant

[16] Dans leurs travaux, Colmez et Parzyzs montrent la participation de la dialectique entre ce que le sujet voit de l'objet mathématique et ce qu'il sait de ses propriétés qui participe aux apprentissages géométriques et à leur évolution en fonction de l'âge, des connaissances acquises, de la nature de la tâche et de l'objectif visé.

de mettre en avant l'intérêt de mobiliser et retravailler des connaissances mathématiques dans ce type de contexte interdisciplinaire.

1. En classe de Terminale

A leur arrivée en salle, les élèves sont invités à s'asseoir autour du planétaire. Il leur est demandé de rappeler la manière d'identifier (en physique) le mouvement d'un objet. Les élèves affirment que c'est à travers la vitesse et la trajectoire d'un objet que l'on repère son mouvement. L'enseignante précise que l'objectif de l'atelier est d'étudier la trajectoire des planètes et comètes représentées sur le PH. Elle pose la question : « En regardant le planétaire, je vous invite à me dire, quelle est la forme géométrique des trajectoires des planètes Mars, Terre, Vénus et Mercure ? ». Rapidement, l'ensemble des élèves affirment que ce sont des cercles. L'enseignante leur demande de justifier leur affirmation, mais face à leur silence, elle les questionne sur la définition mathématique d'un cercle, et obtient comme réponse : « Ensemble de points à la même distance d'un point appelé le centre » (réponse d'un élève). L'enseignante demande alors de préciser la position du centre pour les orbites des planètes, les l'ensemble des élèves annoncent que c'est le Soleil. Elle les invite alors à vérifier sur le PH que les orbites des planètes sont bien des cercles de centre le Soleil, en utilisant, s'ils le souhaitent, le matériel mis à leur disposition. Après un travail en petits groupes où les élèves choisissent la ficelle comme instrument de vérification, deux méthodes de vérification émergent.

<u>Méthode 1</u>. Un premier groupe procède de la manière suivante : une élève maintient une des extrémités de la ficelle (notée S) au centre du Soleil (centre du médaillon représentant le soleil). La deuxième élève tend la ficelle jusqu'au centre de la Terre (centre du médaillon la représentant) (noté T) et fait déplacer la ficelle sur l'ensemble des médaillons appartenant à l'orbite de la Terre. Les trois autres élèves du groupe observent les déplacements de la ficelle. Ce groupe concluent alors que la longueur ST est « toujours la même ». L'enseignante les questionne sur la signification du morceau de ficelle utilisée et le fait de le tourner de cette façon. Les élèves répondent que le morceau (ST) représente le rayon. Les deux autres groupes ont procédé par comparaison de 4 ou 5 distances entre le point S et 4 ou 5 points appartenant à l'orbite de la Terre.

Suite à des questions de l'enseignante, adressées à l'ensemble des élèves, sur la précision de la détermination des centres S et T, les élèves du groupe 1 répondent qu'elles ont procédé « à l'œil » et affirment que l'orbite de la Terre (comme celle de Mars) est bien un cercle de centre le centre du Soleil (S). Or les élèves du groupe 3, remettent en question la conclusion de leurs camarades en avançant que « le Soleil n'est pas le centre » (sous-entendu des deux orbites) et argumentent leur propos en exposant leur méthode (la méthode 2 ci-dessous).

<u>Méthode 2</u>. Les élèves du groupe 3, formulent l'hypothèse suivante : « si le Soleil était le centre des orbites de la planète Terre et celle de Mars, alors l'écart entre ces deux cercles devrait être le même ». En observant l'écart entre deux paires de deux points appartenant aux deux orbites (cf. figure 2), ils concluent que puisque l'écart n'est pas le même, le Soleil n'est pas le centre de ces deux orbites. L'enseignante valide et reformule cette conclusion.

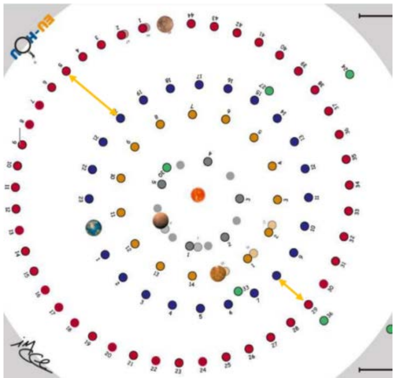


Figure 2 – Mesurage de l'écart entre deux paires de points de deux cercles distincts

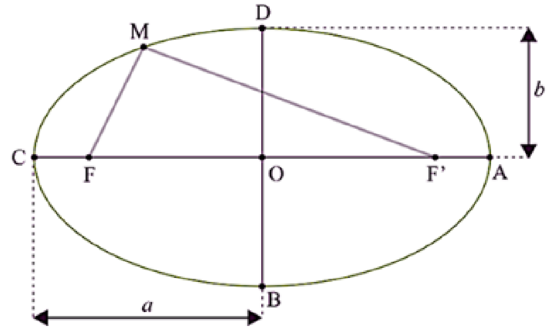


Figure 3–Ellipse représentée par l'enseignant au tableau

L'enseignante poursuit en demandant à l'ensemble des élèves la forme géométrique de l'orbite de la comète Encke. L'ensemble des élèves affirme que « ce n'est pas un cercle » et précise que c'est une ellipse. Elle présente alors quelques caractéristiques mathématiques de l'ellipse[17] (en projetant la figure 3).

Les élèves sont invités à donner la position des deux foyers de l'orbite de la comète Encke sur le PH. Rapidement, le Soleil est proposé comme l'un des foyers de l'orbite de la comète. Pour le second foyer, l'enseignante propose d'en donner une position approximative en observant le PH. Face au silence des élèves, elle donne une autre caractéristique de l'ellipse à savoir : « les distances CF et AF' sont égales » (cf. figure 3). Une élève propose alors de tracer la droite passant par A, matérialisé sur le PH par un point de l'orbite de la comète (cf. figure 4) et le Soleil (foyer F), celle-ci coupe l'orbite en un point (ici C) et de reporter la distance CF à partir du point A. Les autres élèves soulignent à juste titre que « ce n'est pas facile » de matérialiser le point C sur la bâche car « il n'y a pas de point (médaillon) sur l'orbite à cet endroit ». L'enseignante déclare que c'est une méthode pertinente et « mathématiquement viable », mais qu'elle est empirique. En guise de validation, elle renvoie les élèves aux lois de Kepler qui permettent de décrire le mouvement des planètes autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique.

Les élèves sont invités ensuite à expliquer pourquoi sur le PH les orbites des planètes sont circulaires. Ces derniers expliquent « qu'à vue d'œil ce sont des cercles, mais peut être que dans la réalité ce n'est pas vrai ». L'enseignante insiste alors sur le fait que les orbites des planètes du système solaire sont des ellipses et que le Soleil n'est pas le centre, mais l'un des foyers (première loi de Kepler).

---

[17] Les foyers (F et F'), la relation métrique entre les points appartenant à l'ellipse (M) et ses foyers (ensemble de points M tel que la distance MF+MF' est constante), son centre (O), la distance OF et OF' sont égales

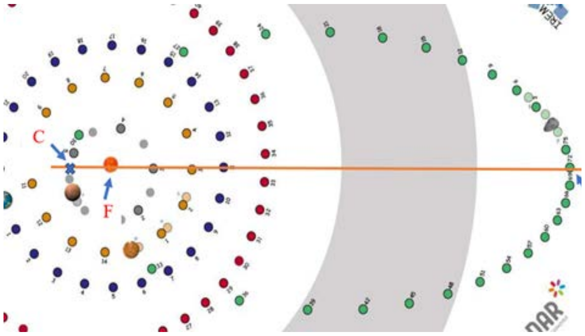


Figure 4– Identification du second foyer de l’orbite d’Encke

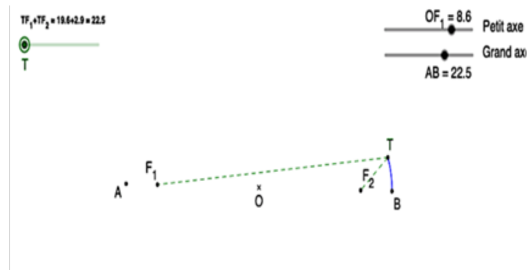


Figure 5–Construction d’une ellipse sur le logiciel GeoGebra

L’enseignante propose alors de visualiser, à l’aide de GeoGebra, la construction d’une ellipse dont on connait la position des foyers (figure 5). Elle commence par présenter le cas de l’orbite de la comète Encke, en soulignant que le second foyer n'existe pas « dans la réalité » et qu’il est déterminé d’un point de vue mathématique « pour pouvoir tracer l'ellipse ». Elle déplace ensuite les points représentant les foyers en les rapprochant du centre et met en évidence que lorsque les deux foyers sont confondus avec le centre de l'ellipse, alors l’ellipse devient un cercle (cf. figure 6). Les élèves sont *stupéfaits.*

L'enseignante conclut alors en disant que les orbites des planètes Vénus, Mercure, Terre et Mars, sont quasi circulaires car leurs foyers sont très proches du centre de leur orbite. C’est pourquoi, on a l’impression de voir des orbites circulaires.

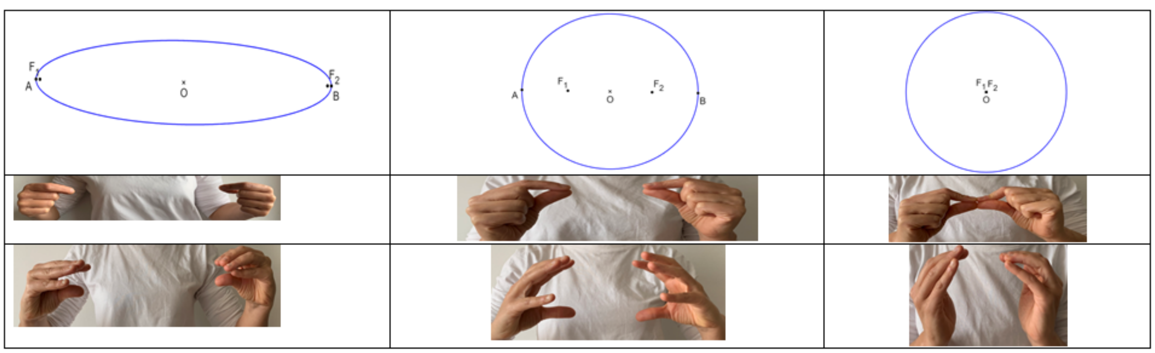


Figure 6*– L’enseignante montrant et mimant le changement de la forme de l’ellipse (ligne 3) au fur et à mesure qu’on rapproche les foyers (ligne 2)*

2. En classe de Troisième

Cette séance s’est déroulée de la même manière que la précédente. L’enseignante interroge les élèves au sujet de la forme des orbites des planètes, à l'unanimité, ils déclarent que ce sont des cercles dont le centre est le Soleil. Elle leur demande d’expliquer pourquoi ce sont des cercles, ce qui lui permet par la suite de rappeler une des propriétés du cercle :

Enseignante : Comment vous savez que c’est un cercle ?

Élève 1 : Ben, c’est la forme.

Élève 2 : C’est parce que le Soleil est au centre.

Enseignante : Donc si on dit que c’est un cercle, on dit que le Soleil c’est le centre. On est d’accord. Ok, le cercle on le connait uniquement avec son centre ?

Elève 3 : Un diamètre.

Enseignante : Un diamètre.

Elève 4 : Un rayon.

Enseignante : Très bien [...]. Un cercle est un ensemble de points qui ont exactement la même caractéristique métrique, c'est-à-dire qu’ils sont tous à égale distance du centre [elle dessine en même temps au tableau un cercle avec son centre et un rayon].

L’enseignante demande aux élèves de vérifier, à l’aide du matériel mis à leur disposition, que l’orbite de la planète Mars ainsi que celle de la Terre sont bien des cercles de centre le Soleil. Pour la planète Terre, une des méthodes utilisées pour répondre au problème est celle de vérifier, avec le décamètre que la distance entre le Soleil et plusieurs points sur l’orbite de la Terre est toujours la même. Des problèmes d’incertitude sur les mesures, n’ont pas permis aux élèves de conclure sur la forme de l’orbite de la Terre. La ficelle est alors utilisée pour reporter la longueur entre le Soleil et deux autres points de l’orbite de la Terre, de constater que les deux longueurs ne sont pas identiques et d’en déduire que l’orbite de la Terre n’est pas un cercle (idem pour la planète Mars).

Toutefois, cette dernière conclusion est remise en question par un élève qui dit : « cela peut être un cercle, mais le Soleil n’est pas forcément le centre » et poursuit : « c’est pas *des cercles parfaits*, euh.., *c’est presque un cercle* ». Certains élèves réfutent alors le fait que les deux orbites ne soient pas des cercles, mais tout en indiquant qu’elles sont « tout de même presque des cercles ». L’enseignante explique alors que dans la réalité, les orbites ne sont pas des cercles bien qu’ils ressemblent à des cercles. A ceci, elle précise que le Soleil est le centre du système solaire, mais il n'est pas le centre des orbites des planètes, soulignant ici la polysémie du mot « centre ».

Lorsqu’il est demandé aux élèves d’observer l’orbite de la comète Encke et de se prononcer sur sa forme géométrique, ils proposent la forme ovale. L’enseignante précise qu’en mathématique, cette forme est appelée une ellipse. En comparant l’ellipse à un cercle, elle présente (de la même manière qu’avec les élèves de terminale) les caractéristiques mathématiques d’une ellipse. Les élèves sont invités à indiquer sur le PH la position des deux foyers de l’orbite de la comète. A l’opposé des élèves de terminale, ces élèves ne connaissent pas les lois de Kepler, donc la position d’ un des foyers sur le Soleil n’est pas connue. De plus, le fait que les élèves soient assis sur le PH (la bâche) les empêchent de prendre du recul afin d'avoir une vue d’ensemble de l’orbite de la comète Encke et ainsi d’estimer la position des foyers. C’est pourquoi l’enseignante leur distribue un PH en format A3 (PH-A3) afin d’identifier la position des foyers. En faisant des allers retours entre le PH-bâche et le PH-A3, une élève fait alors le constat que l’un des foyers « est sur le Soleil ». L’enseignante valide la réponse et profite de cette réponse pour présenter la première loi de Kepler. En utilisant GeoGebra, elle montre une construction d’une ellipse (cf. figure 5) en soulignant que « c’est par exemple l’orbite d’Encke ». Elle fait varier la position des deux foyers, de telle sorte à les rapprocher du centre de l’ellipse, et demande aux élèves de prédire ce qui va se produire. Certains supposent que cela « devrait être un cercle ». Ce qui est par la suite validé (expérimentalement) avec le logiciel GeoGebra. L’enseignante précise que lorsque les foyers se rapprochent de plus en plus du centre de l’ellipse, alors celle-ci devient un cercle (cf. figure 6)., et à l’inverse, lorsque les foyers s'éloignent du centre de l’ellipse alors celle-ci devient « très allongée ». La clôture de la séance est la même que précédemment.

3. Analyses et conceptualisation du cercle et de l’ellipse

Commençons d’abord par rappeler que dans l’enseignement des mathématiques en France, le cercle est présenté en général de manière statique, d’abord comme une figure géométrique caractérisée par son centre et son rayon (et diamètre) et ensuite comme un lieu géométrique de points à égal distance d’un point donné. Rares sont les situations d’apprentissage qui permettent aux élèves de percevoir le cercle sous son aspect dynamique : la trajectoire d’un point en mouvement respectant certaines propriétés géométriques. L’ellipse quant à elle, est plutôt rencontrée en cours de physique (avec les lois de Kepler). Celle-ci est alors perçue sous son aspect dynamique, celui de la trajectoire d’une planète gravitant autour du Soleil.

Le travail développé ici avec le PH permet de construire le lien entre les deux aspects statistique et dynamique de ces objets géométriques. De plus, le fait de vivre avec son corps le mouvement des planètes (sur le PH-bâche) et observer les différents points des orbites représentées permettent une expérience sensorielle qui viendra participer à cette nouvelle conceptualisation du cercle et de l’ellipse. La médiation de l’enseignant est également essentielle ici car elle permet de faire expliciter (avec le langage) les observations et de mobiliser des connaissances déjà là pour vérifier ces observations. Même si cette conceptualisation n’est pas entièrement achevée à la fin de la séance, loin de là, elle est cependant entamée et disponible pour des expériences similaires ultérieures. Comme le souligne Radford (2013) ce processus est complexe et est soutenu par ce que les élèves perçoivent lors de l’interaction avec des artefacts (ici le PH) à travers les gestes et le langage et son rôle dans la construction des concepts mathématiques.

Revenons ici sur quelques éléments saillants des déroulements. Les élèves répondent à la première question, la forme des orbites de la Terre et de Mars, en percevant la forme circulaire et en reconnaissant un cercle. Pour vérifier ces premières perceptions, à la demande de l’enseignante, ils se servent de leurs connaissances sur le centre et le rayon en faisant des mesurages. Très vite ils se rendent compte que cela ne leur permet pas de conclure sur un rayon constant avec le soleil comme centre. Mais, en utilisant une ficelle de longueur fixe (maintenue tendue par deux élèves) avec un point fixe sur le Soleil et l’autre point se déplaçant le long de l’orbite, les élèves remettent en cause l’hypothèse d’une orbite centrée sur le Soleil. C’est cet aspect dynamique du cercle lors d’un mouvement continu autour du soleil qui permet de réfuter l’hypothèse que le centre du cercle « orbite » est soleil.

L’autre hypothèse : l’orbite est un cercle, reste cependant valide pour les élèves. Le conflit entre ce qu’ils voient/perçoivent sur le PH (un cercle) et ce qu’ils savent des propriétés du cercle (un centre et un rayon constant) les amènent à déclarer que ce sont bien des cercles, mais « ce ne sont pas des cercles parfaits ». Ce type de réponse ne serait pas envisageable dans une classe de mathématique, mais l’expérience vécue dans un contexte expérimental et interdisciplinaire permet une telle affirmation pour régler le conflit. C’est sur cette négociation entre *ce que je vois* et *ce que je sais* et la réponse inhabituelle que j’apporte qui permet à l’enseignant de construire le reste de son cours et d’amener/rappeler des connaissances en astronomie qui oriente la réflexion vers la forme elliptique.

A la deuxième question, la forme de l’orbite d’Encke, les élèves reconnaissent une forme « ovale » ou une « ellipse » sans pour autant connaitre ses propriétés mathématiques. C’est l'enseignante qui apporte ses connaissances en se servant de GeoGebra, d'abord en projetant une figure préconstruite (cf. figure 3) et ensuite en animant une figure (cf. figure 5) pour montrer l'ellipse en train de se construire. Pour les élèves de terminale, qui avaient déjà vu les ellipses, au moment de l'apprentissage des lois de Kepler, l'enseignante établit ici le lien entre des connaissances mathématiques et des connaissances physiques. Son jeu de question-réponse les amène à « voir » sur la bâche la position du second foyer puis de trouver une méthode expérimentale pour la déterminer (cf. figure 4).

Pour les deux classes, le fait que le cercle s'obtient par la superposition des deux foyers de l'ellipse fut une découverte inattendue. De plus l'animation que l'enseignante a fait devant eux et à l'aide de GeoGebra (cf. figure 6) leur a permis de mieux comprendre pourquoi ils perçoivent les orbites des planètes comme des cercles, même s'ils savent d'après les lois de Kepler que ce sont des ellipses.

III. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

La situation d'apprentissage présentée dans cet article permet d'appréhender des notions mathématiques d'une façon peu habituelle, exercée dans le contexte de l'astronomie avec l'usage du planétaire humain. Cette approche interdisciplinaire de l'apprentissage des mathématiques semble plaire aux élèves et les motiver pour s'engager dans un échange avec l'enseignant mettant en avant leurs connaissances des notions mathématiques et physiques. Les résultats des analyses amènent quelques constats sur les avantages de cette approche et interrogent les limites de sa mise en place.

D'abord, l'observation du planétaire favorise, naturellement, une vision du dessus avec le Soleil au centre des orbites. C'est pourquoi, les élèves proposent rapidement la figure du cercle comme modèle des orbites planétaires. De plus, cette observation fait naitre des procédures qui sont rarement utilisées dans l'enseignement français des mathématiques. En effet, en prenant appui sur la propriété des cercles concentriques (cf. méthode 2 ci-haut) les élèves remettent en question le fait que le Soleil soit le centre de ces orbites. Ceci rend l'activité plus riche du point de vue des mathématiques. Enfin, les orbites proposées sur le planétaire ont des excentricités plus ou moins importantes (réelles ou non), donnant lieu à l'étude de cas contraire (plus ou moins proche d'un cercle). Selon Rollinde et Maisch (2023), cette variété de situations est un élément indispensable à l'évolution des conceptions des élèves.

Toutefois, une amélioration de la situation peut être faite pour faciliter l'appréhension de l'espace planétaire-bâche non seulement sur certaines de ses régions, mais aussi dans sa globalité. Cela suppose de réfléchir – et ceci en fonction des questions posées – au placement de cet espace (à l'intérieur / à l'extérieur d'une salle de classe), mais également au positionnement des élèves dans cet espace (assis/debout).

Ensuite, l'étude des trajectoires – des planètes et comète – en lien avec la première loi de Kepler, offre l'opportunité aux élèves d'exercer un regard critique entre « ce que je vois », « ce que je fais » et « ce que je sais ». Cette étude est également soutenue par le logiciel GeoGebra. C'est effectivement, par la modification de façon dynamique des positions des points d'une figure (ici les foyers d'une ellipse) que les élèves accèdent à une explication rationnelle (mise en lien avec les propriétés) de ce qu'ils ont perçu sur le planétaire.

Enfin, l'étude présentée ici, permet d'une part, de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser le contexte de l'astronomie dans une démarche interdisciplinaire pour aborder les notions mathématiques en dehors de la seule classe de mathématiques. D'autre part, elle permet de souligner l'intérêt d'utiliser le planétaire combiné avec le logiciel GeoGebra, et ceci avec la médiation de l'enseignant, pour amener les élèves à une meilleure compréhension et conceptualisation des objets mathématiques en jeu.

Nous terminons en soulignant que les avantages à tirer d'une telle démarche ne sont possibles qu'à travers une formation adéquate des enseignants à cette démarche. En effet, dans le cas présenté ici, c'est la seconde autrice de l'article, très familière avec cette démarche, qui avait le rôle de l'enseignant. Or, outre les difficultés logistiques à gérer pour l'utilisation du PH en classe, ce type de situation d'enseignement nécessite une bonne connaissance des liens entre les différents concepts mathématiques et physique, mis en jeu, et des interventions pertinentes de l'enseignant pour laisser les élèves résoudre par eux même le problème. Dans les pratiques ordinaires d'un professeur de mathématiques, ce type de gestion de l'environnement de travail et des médiations avec les élèves est inhabituel. Quelles sont les caractéristiques de la pratique enseignante dans un tel contexte et qu'est-ce qui les détermine ? Quels sont les gestes professionnels de l'enseignant qui permettraient un réel engagement de l'élève dans la démarche ? Quels sont les points critiques dans le scénario d'enseignement et aussi quels en sont les points de vigilances ? Nous nous attelons à répondre à ces questions et d'autres encore dans nos travaux en cours sur les pratiques et la formation des enseignants (Abboud, Nechache et Rollinde, 2022 ; Rollinde, Nechache et Abboud, 2023).

REFERENCES

ABBOUD, M. et ROLLINDE, E. (2021). Les mathématiques du Système solaire en plein air. Le planétaire humain au collège. *Repère Irem, 124,* 37-62.

ABBOUD, M., NECHACHE, A. et ROLLINDE, E. (2022). Former les enseignants du primaire à une démarche interdisciplinaire mathématiques-sciences dans le contexte de l'astronomie. *In* M. Abboud et C. de Hosson (Eds.), *Rendez-vous en didactique : recherches, dialogues et plus si affinités* (pp.205-211). IREM de Paris - Université Paris Cité. ISBN : 978-2-86612-403-8.

COLMEZ, F. et PARZYSZ, B. (1993). Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2$^{\text{nde}}$. *In* Bessto A ; Verillon P. & Balacheff N., *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (p. 35-55). Grenoble : La Pensée Sauvage.

NECHACHE, A. et ROLLINDE, E. (in press). Développer la pratique de la polyvalence chez les professeurs des écoles débutants en France. *Recherche & Formation*.

ROLLINDE, E. et MAISCH, C. (2023). Les orbites planétaires sont-elles circulaires. *Grand N, 111*, 5-39

ROLLINDE, E., NECHACHE et A. et ABBOUD, M. (2023). Etude du travail géométrique autour des ellipses avec le planétaire humain. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 309-319). IREM de Strasbourg.

ROLLINDE, E. (Eds) (2021). L'Astronomie pour l'éducation dans l'espace francophone. Editions Le Manuscrit.

ROLLINDE, E., COUANON, L. et BALLENGHIEN, S. (2020). Incarner la notion de vitesse en classe de 6e. *Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 114* (1023), 411-434.

NILSEN, T et ANGELL, C. (2014). The importance of discourse and attitude in learning astronomy. A mixed methods approach to illuminate the results of the TIMSS 2011 survey. *Nordic Studies in Science Education, 10(1*), 16-31.

RADFORD, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of research in mathematics education, 2(1),* 7-44.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Analyse des connaissances d'enseignants de mathématiques du collège autour de la résolution de problèmes de comparaison chez les élèves

Said Abouhanifa[18]

CREMF- CS, Settat, Maroc

Sonia Ben Nejma

Université de Carthage, Tunisie

Sègbégnon Eugène OKÉ

Université d'Abomey-Calavi, Bénin

Résumé – Cette étude vise à documenter les connaissances des enseignants du collège autour de la résolution des problèmes de comparaison dans trois (3) pays : Bénin, Maroc et Tunisie. L'analyse des mises en situation proposées aux enseignants du collège se base sur le modèle des connaissances de Shulman (1987) développé par Ball et son équipe (2008) et sur le modèle épistémologique de références développé par Squalli et al. (2020). Les résultats obtenus à l'issue d'une enquête par questionnaire auprès d'enseignants témoignent qu'ils sont peu sensibles à la structure épistémologique de ces problèmes, à l'analyticité des raisonnements et au rôle des représentations sémiotiques dans le développement de la pensée algébrique. Cette recherche lève un coin de voile sur les pratiques enseignantes en algèbre élémentaire (Ben Nejma, 2010, 2012, Coulange et al 2012, Ben Nejma et al 2022) du point de vue des connaissances dont ils disposent et la nécessité d'une formation initiale et continue dans ce domaine.

Mots-clefs : Connaissances pour l'enseignement, pensée algébrique, raisonnement algébrique, analycité, problèmes de comparaison, représentation sémiotique.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Cette recherche s'inscrit dans le cadre du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD) autour de la thématique : « Accompagner le développement du cycle fondamental : l'enjeu de la transition école / collège ». (Appel à projet d'avril 2019). Elle est réalisée entre des équipes

---

[18] Abouhanifa, S., Ben Nejma, S. et Oké, S.-E. (2024). Analyse des connaissances d'enseignants de mathématiques du collège autour de la résolution de problemes de comparaison chez les élèves. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 45-57.

du Canada, du Maroc, du Bénin et de la Tunisie et s'inscrit dans le cadre du projet international : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » (Najar et al, 2021). Cette étude s'intéresse à la transition primaire-collège dans les trois pays, Bénin-Maroc-Tunisie du point de vue de l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement, la dialectique arithmétique / algèbre à la transition primaire (6ème) / collège (7ème). Il s'agit d'étudier la manière dont les trois pays concernés préparent les élèves à l'algèbre avant l'avènement du symbolisme algébrique conventionnel selon trois axes : le premier concerne l'étude du savoir à enseigner (Ben Nejma et al, 2022, Abouhanifa et al, 2023, Khalloufi, Ben Nejma et al 2023, Oké et al, 2023), le second vise à documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de 6ème et 7ème année de scolarité dans la résolution des problèmes de comparaison et de généralisation et le troisième explore les connaissances des enseignants autour de la modélisation de ces types de problèmes. Dans cette contribution, nous nous limitons au troisième axe pour examiner les prédispositions des enseignants du collège des trois pays à partir d'une analyse de leurs pratiques déclarées dans le cadre de la résolution des problèmes de comparaison et le rôle qu'ils semblent accorder aux différentes composantes du développement de la pensée algébrique (PA), structure épistémologique des problèmes, analyticité et représentations sémiotiques.

Dans les contextes institutionnels concernés par cette recherche, l'algèbre occupe une place importante dans les mathématiques du secondaire. Elle constitue en quelque sorte un levier pour l'accès à des études post-secondaires dans plusieurs disciplines. Cependant, l'algèbre enseignée est réputée être, depuis longtemps, un sujet scolaire aride et difficile à apprendre. Des élèves éprouvent, souvent, des difficultés d'apprentissage en rapport avec la résolution de problèmes (Rosnick et Clément, 1980 ; Wagner, Rachlin et Jensen, 1984 ; Booth, 1984).

Nous soulignons que, dans ces trois pays, les formations initiales et continues des enseignants ne s'inscrivent pas dans la perspective du développement de la pensée algébrique, tel que suggéré par le mouvement Early algebra. Les programmes officiels relatifs à ces 3 pays tendent à considérer l'algèbre plus comme une arithmétique généralisée. Son introduction reste fondée sur l'extension des systèmes de nombres et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines (Squalli, 2003). Malgré l'importance accordée à la modélisation des problèmes, une grande part de responsabilité est laissée aux enseignants dans l'apprêtage didactique du savoir à enseigner, notamment autour de la mise en équations (Ben Nejma, 2009, 2012, 2018).

Dans la première partie, nous exposons notre cadre théorique puis nous reformulons notre problématique dans ce cadre via des questions de recherche orientant notre expérimentation. Nous présentons, ensuite, notre méthodologie et les principaux résultats issus de ces analyses avant de conclure.

II. CADRE THÉORIQUE

Dans notre recherche, nous nous intéressons aux rapports établis par l'enseignant entre le savoir mathématique à enseigner et le savoir enseigné compte tenu des prescriptions curriculaires. Ainsi, le rôle de l'enseignant est central dans le processus de transposition didactique interne : c'est à lui que revient la charge d'« apprêter » le savoir à enseigner en savoir enseigné. Nous empruntons le terme « d'apprêt didactique » à Chevallard (1991) et nous recourons à l'expression « apprêtage » (Ben Nejma, 2021) pour caractériser l'action de l'enseignant qui « apprête » ce savoir et « apprêt » comme résultat de cette action. Celui-ci est analysé du point de vue des connaissances des enseignants, leurs choix et leurs conceptions autour du développement de la pensée algébrique dans le cadre de la modélisation de problèmes de comparaison. Ces problèmes de « partage inéquitable » renvoient à la comparaison d'au moins deux données connues ou inconnues. Selon Marchand et Bednarz (1999) le nombre de grandeurs ou d'inconnues en jeu (deux, trois ou plus), la nature des relations (additives et/ou multiplicatives) et l'enchaînement des relations (source, composition, puits) dans les problèmes sont des éléments à considérer pour déterminer la complexité des problèmes impliquant des comparaisons. Bednarz et Janvier (1996) distinguent les problèmes connectés et les problèmes déconnectés. Dans les problèmes connectés, « une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue » (p. 279). Pour les problèmes déconnectés, « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème » (p. 279). Les problèmes déconnectés favoriseraient l'entrée dans la pensée algébrique et constituent une niche favorable au développement d'un raisonnement analytique dans plusieurs contextes (Koedinger et Nathan, 2004, Ben Nejma, 2009, Abouhanifa, 2021, Squalli et al., 2015). La résolution des problèmes de comparaison repose sur la considération de deux dimensions, la dimension cognitive qui renvoie au degré d'analycité du raisonnement mis en avant par Radford (2002, 2014) et la dimension sémiotique du travail algébrique en termes de registres (Duval,1995).

Ainsi nous explorons les connaissances des enseignants à ce sujet en prenant appui sur les travaux de Shulman (1987) dont le modèle précise que l'efficacité d'un tel enseignement repose sur sept connaissances de base : (i) la connaissance du contenu, (ii) les connaissances pédagogiques générales, (iii) la connaissance du curriculum, (iv) « Pedagogical Content Knowledge, PCK », (v) la connaissance des apprenants et de leurs caractéristiques, (vi) la connaissance des contextes éducatifs et (vii) la connaissance des fins, des buts et des valeurs de l'éducation et de leurs motifs philosophiques et historiques. Loewenberg Ball, Thames et Phelps (2008) indiquent qu'un enseignant doit, notamment, avoir des connaissances mathématiques et des compétences sur l'enseignement des mathématiques, et qu'il doit anticiper sur la pensée des élèves et leurs erreurs et prédire leurs centres d'intérêt. Ce modèle théorique nous a permis de caractériser les connaissances dont les enseignants ont particulièrement besoin (Even, 1990 cité par Kieran, 2007 ; Nathan et Koedinger, 2000). Etant donné l'ampleur de ce champ d'investigation, nous avons choisi de retreindre cette étude à deux types de connaissance du modèle cité, la connaissance du contenu et des élèves « knowledge of content and students », ici, les connaissances requises pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques en général et de l'algèbre élémentaire en particulier. Celles-ci sont déterminées à partir de questions qui visent à faire distinguer par les enseignants les démarches correctes de celles erronées. Le second type est relatif au contenu et à l'enseignement « knowledge of content and teaching » et renvoie aux choix des activités dans leurs pratiques d'enseignement.

III. REFORMULATION DE LA PROBLÉMATIQUE ET DES QUESTIONS DE RECHERCHE

Dans ce cadre, notre problématique pourrait s'énoncer de la manière suivante : De quelles connaissances du contenu, des élèves et de l'enseignement les enseignants du collège disposent-ils autour des composantes du développement de la PA, dans le cadre de la résolution des problèmes de comparaison ? Ces problèmes étant classiques et fréquents dans les curricula des trois pays (Ben Nejma et al 2022). Cependant, plusieurs recherches entamées dans ces pays ont permis de mettre en avant des pratiques détournées chez les enseignants qui non seulement se centrent sur la dimension objet de l'algèbre (Douady 1986) au détriment de la dimension outil, mais également une centration sur le symbolisme algébrique au détriment de la signification des représentations et de la nature du raisonnement. D'où l'importance, pour nous, d'étudier ces pratiques à partir du modèle des connaissances et celui du cadre épistémologique de référence de la PA. Les questions de recherche ayant guidé notre problématique sont les suivantes : Dans quelle mesure les enseignants de mathématique du collège sont-ils sensibles à la structure épistémologique des problèmes favorisant l'entrée dans l'algèbre ? Dans quelle mesure sont-ils sensibles à la variété des démarches mises en œuvre par les élèves pour résoudre des problèmes de comparaison ? Dans quelle mesure sont-ils prédisposés à identifier des éléments d'analyticité dans les raisonnements mobilisés ? quelle importance accordent-ils au rôle des représentations sémiotiques dans la manifestation des raisonnements déployés dans la résolution des situations posées ?

IV. MÉTHODOLOGIE

En vue d'apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche, notre méthodologie se base sur l'exploration des deux types de connaissances précités à partir d'un questionnaire qui met les enseignants en situation d'analyse à la fois des problèmes proposés, mais également des démarches suggérées émanant d'élèves. L'analyse des réponses prend en compte les trois composantes du développement de la pensée algébrique retenues dans notre étude : la structure épistémologique des problèmes de comparaison, l'analyticité du raisonnement et les représentations sémiotiques en jeu dans les techniques de résolution mobilisées ou attendues. Ces situations présentent des problèmes de comparaison (connectés et déconnectés) ainsi que des démarches qui sont souvent mises en œuvre par des élèves du collège lors de la résolution de ce type de problèmes. L'analyse des réponses est ensuite confrontée à l'analyse a priori du questionnaire. Celle-ci est présentée sous forme d'un protocole d'analyse permettant aux chercheurs impliqués dans ce projet de recherche d'explorer les types de connaissances en jeu en fonction des composantes de la PA. Les enseignants sont amenés implicitement à analyser les problèmes proposés pour pouvoir évaluer les stratégies mises à l'étude. Ce questionnaire a été soumis à 53 enseignants de mathématiques du Maroc, 56 enseignants de Tunisie et 71 enseignants du Bénin. Plus précisément, nous recherchons dans les réponses des enseignants la mobilisation en acte des connaissances suivantes :

1. Un problème déconnecté est plus complexe qu'un problème connecté car le premier est plus difficile à résoudre arithmétiquement.
2. La nature du raisonnement produit par un élève lors de la résolution d'un problème déconnecté réside dans son caractère analytique.
3. Le caractère analytique du raisonnement ne dépend pas du registre de représentation et un registre non algébrique n'est pas nécessairement un indice de la non-analyticité du raisonnement.

V. PRINCIPAUX RÉSULTATS

1. Pour les enseignants du collège au Maroc

En ce qui concerne la connaissance qui stipule qu'un problème déconnecté est plus complexe qu'un problème connecté, car il est plus difficile à le résoudre arithmétiquement, on constate que seul un quart des enseignants pense que le problème déconnecté résiste mieux à une démarche arithmétique de résolution et est donc plus difficile à résoudre qu'un problème connecté. Mais seulement 35 % d'entre eux ont donné des justifications plus ou moins pertinentes de leurs choix. Aucune des justifications des enseignants n'a évoqué la structure du problème 2 et ces caractéristiques de manière explicite, mais dans cinq réponses (soit environ 5 % des enseignants interrogés), nous avons relevé une distinction dans la démarche de résolution ainsi que dans les argumentations. Ce qui nous pousse à penser que les enseignants en question font bien la différence à travers les caractéristiques de chaque type de problème (entre un problème connecté et un problème déconnecté). Cependant, il parait qu'ils croient que seule une démarche algébrique pure (à travers les équations algébriques) peut résoudre ce type de problème. On peut dire que malgré que la trace de la solution d'un élève ne comporte qu'une opération, les enseignants lui ont attribué une grande importance dans l'évaluation, mais inférieur à celle du raisonnement algébrique. Comme ces enseignants semblent donner une importance au raisonnement derrière le calcul, non seulement la justesse du résultat, on peut penser que ces enseignants pénalisent le fait que le raisonnement ne soit pas explicite, mais redonnaient quand même la pertinence de la solution.

Concernant l'analyse des connaissances des enseignants sur la nature du raisonnement d'un élève, produit pour la résolution d'un problème déconnecté réside dans son caractère analytique, les résultats ressortis de cette analyse montrent que les notes attribuées par les enseignants ne sont pas basées sur le critère de l'analycité, mais sur plusieurs autres critères qui ne sont pas unifiés entre les enseignants du collège, la lecture des justifications des enseignants enquêtés montrent que les critères mis en jeu sont comme suit : « *justesse* », « *résultat du calcul* », « *coût de la méthode* », « *fondement logique* », « *intelligibilité de la démarche* », etc…, ce qui indique et justifie que les réponses des enseignants du collège sont divergentes. La tendance des réponses des enseignants est en grande partie en accord avec le classement des élèves selon le critère de l'analycité, vue que la majorité des réponses ont attribué la première place au type de raisonnement en termes de parts qui est un raisonnement analytique avec inconnue intermédiaire, les deux places intermédiaires sont accordées au raisonnement analytique avec inconnue et équation muettes (analytique optimale) et au raisonnement à tendance analytique. Ils ont accordé en dernière place, le raisonnement essai-erreur (raisonnement : arithmétique, non analytique). Ces enseignants critiquent la méthode essai erreur. L'efficacité de cette méthode dépend de la compétence du sujet ainsi que de la nature du nombre solution. Les enseignants qui sont sensibles à la puissance du raisonnement analytique, seront aussi sensibles à la non-efficacité du raisonnement essai-erreur. Cela montre que ces enseignants accordent beaucoup plus d'importance à la justification du calcul (raisonnement) qu'au résultat.

Relativement à la troisième connaissance des enseignants, les réponses témoignent que le caractère analytique du raisonnement (son analyticité) semble indépendant du registre de représentation mobilisé. Les résultats de l'analyse montrent qu'une majorité de réponses, les enseignants attribuent la première place au raisonnement à tendance analytique et la place intermédiaire au raisonnement analytique. Ce qui montre que, globalement, les enseignants interrogés considèrent que le raisonnement dans le registre numérique n'est pas performant. Cela peut laisser penser que c'est la nature du registre numérique dans le raisonnement qui justifie cet état de fait. En comparant le degré de présence du registre algébrique et du registre intermédiaire dans les raisonnements, on a constaté qu'un peu plus d'enseignants penchent pour le raisonnement analytique dans le registre algébrique que pour ce raisonnement dans le registre intermédiaire. Et là encore, on peut en déduire que c'est la nature du registre algébrique dans le raisonnement qui l'emporte sur la nature de registre intermédiaire dans le raisonnement analytique. La nature du registre intermédiaire ou algébrique influence peu l'appréciation des enseignants et que donc la nature du registre algébrique conventionnel ou intermédiaire n'est pas un facteur déterminant dans les appréciations des enseignants. Les enseignants ont privilégié le raisonnement dans le registre algébrique en raison du fait que le registre algébrique est le plus convoqué au collège.

2. Pour les enseignants du collège en Tunisie

Les analyses ont permis de repérer une proportion importante des enseignants du collège (63,33%) qui ne manifestent pas de sensibilité par rapport à la structure des problèmes déconnectés et focalisent leurs attentions sur les formes de l'énoncé et la variable rédactionnelle. Les enseignants ayant une sensibilité par rapport à la structure des problèmes déconnectés est de 33,33% et proposent des justifications centrées essentiellement sur les inconnus à déterminer et sur les relations entre les inconnus. Concernant la sensibilité par rapport au degré d'analycité du raisonnement mobilisé par les élèves lors de la résolution d'un problème déconnecté, nous avons repéré que 93% des enseignants du collège qui ont proposé des notes qui ne sont pas en cohérence avec le degré d'analycité du raisonnement. L'analyse des justifications qui accompagnent les notes attribuées fait apparaitre que celles-ci sont plus rattachées aux critères d'explication du résultat et d'explicitation de la méthode utilisée qu'au caractère analytique du raisonnement mobilisé. Nous avons relevé le souci porté sur l'apprentissage de l'argumentation (notamment la forme de l'argumentation) au détriment de la nature du raisonnement arithmétique ou algébrique, plus précisément, non analytique, à tendance analytique ou analytique. De ce fait, le raisonnement analytique avec inconnue et équation muette est difficile à identifier par les enseignants.

Concernant l'effet du registre sémiotique utilisé lors de la résolution d'un problème déconnecté et son effet sur l'identification du degré d'analyticité du raisonnement, nous avons relevé chez la plupart des enseignants du collège (89,28%) que le registre intermédiaire (discursif) a un effet très faible sur le caractère algébrique du raisonnement. En fait, les enseignants attribuent au registre intermédiaire une valeur presque identique à celle du registre algébrique. Les réponses des enseignants font apparaitre l'importance accordée à l'utilisation de la représentation segmentaire comme outil nécessaire pour résoudre les problèmes déconnectés. Cela constitue une des pratiques communes répandues dans l'enseignement primaire bien qu'elle ne soit pas un objet d'enseignement explicite au niveau des programmes et des manuels officiels. Par contraste avec le registre intermédiaire, le registre numérique a un effet variable.

En conclusion, les enseignants du collège ne semblent pas sensibles aux éléments relatifs à la modélisation des problèmes déconnectés La plupart d'entre eux manifestent un déficit de connaissances autour des structures épistémologiques des problèmes de comparaison et de la distinction entre les situations d'apprentissages qui sont porteuses (problèmes déconnectés) et d'autres (problèmes connectés) qui peuvent favoriser davantage plus une continuité entre l'arithmétique et l'algèbre. Nous relevons également l'absence de toute connaissance en rapport avec l'analyticité d'un raisonnement et le rôle des représentations sémiotiques pour manifester cette analyticité. Ces résultats conduisent à repenser les structures et les dispositifs de la formation initiale et de la formation continue des enseignants du secondaire en vue de renforcer les connaissances nécessaires pour l'enseignement en algèbre élémentaire dans une perspective de Early algebra.

3. Pour les enseignants du collège au Bénin

De l'étude des connaissances des enseignants du collège pour enseigner, nous avons constaté que 36,6 % des enseignants enquêtés connaissent en acte que le caractère déconnecté d'un problème explique sa complexité. Parmi ces enseignants, 66,7 % ont donné une justification pertinente de cette connaissance (soit 24,39 % de l'effectif total).

La sensibilité au caractère analytique d'un raisonnement d'élève n'est perceptible que chez 12,2 % des enquêtés. Cette sensibilité est remarquable en acte chez tous ces enseignants de par leurs justifications. Il ressort finalement que ce n'est pas l'analycité qui est visée dans le raisonnement des élèves chez les enseignants enquêtés.

Parmi les réponses en cohérence avec l'analycité des raisonnements, la sensibilité au raisonnement analytique est forte quand les justifications fournies par les enseignants enquêtés sont cohérentes avec le classement des réponses des élèves. Toutes les justifications sont pertinentes. En effet, le mode d'évaluation des apprentissages scolaires en vigueur dans les collèges du Bénin est l'évaluation critériée, c'est-à-dire basée sur des critères d'évaluation. Cela devrait influencer les capacités d'appréciation des enquêtés ou se retrouver dans les appréciations des enseignants enquêtés. L'analyse, la mathématisation et l'opération sont les critères d'évaluation retenus par l'institution. La mathématisation, traduction en langage mathématique du problème semble indiquer l'analycité dans la démarche de résolution du problème. Dans les réponses qui laissent entrevoir une sensibilité à l'analycité, très peu seulement des enquêtés ont basé leur argumentaire sur l'utilisation des critères d'évaluation.

Au total, dans l'échantillon des enseignants du collège, enquêtés au Bénin, une grande proportion de ces enseignants n'est pas sensible en acte[19] au caractère analytique du raisonnement dans la résolution d'un problème déconnecté.

VI. CONCLUSION

Les résultats obtenus à l'issue de cette étude ont permis d'apporter des éléments de réponse à notre problématique et de relever entre autres certaines caractéristiques des connaissances d'enseignants relatives à l'usage des ressources officielles analysées dans une étude antérieure (Ben Nejma et al. 2022), du point de vue de leur sensibilité aux problèmes proposés dans le développement de la PA à la charnière primaire/collège. Ces situations, que nous qualifions, de porteuses retrouvées dans les curricula des trois pays pourrait pourtant constituer un levier pour le développement du raisonnement analytique chez les élèves en renforçant leurs connaissances en arithmétique et en les initiant à l'algèbre avant l'avènement du symbolisme algébrique conventionnel.

En termes de connaissances du contenu les réponses témoignent du peu de sensibilité manifestée pour la structure épistémologique des problèmes de comparaison et pour l'identification des situations porteuses et de leur potentiel à favoriser chez les élèves l'entrée dans l'algèbre. De plus, les connaissances du contenu liés à l'enseignement mettent en avant la difficulté pour les enseignants des trois pays à identifier des éléments d'analyticité liés au raisonnement à partir des démarches proposées ainsi que le rôle des représentations sémiotiques dans la communication de ces raisonnements. En effet, la non prise en compte, par les enseignants des représentations schématiques et langagières retrouvées dans les démarches des élèves interroge leur rapport à l'algèbre et leur conception du rapport arithmétique/ l'algèbre. Ce rapport semble, en effet,

---

[19] Dans leur manière d'apprécier les raisonnements des élèves.

s’organiser autour de la dimension objet et de l’aspect calculatoire formel au détriment de la dimension outil et de l’aspect relationnel et de la modélisation.

Cette réalité, dans les trois pays, révèle le besoin de formations initiale et continue des enseignants en algèbre élémentaire si l’on souhaite inscrire les curricula dans une vision « précoce » du développement de la pensée algébrique et dépasser les obstacles épistémologiques de la transition arithmétique/algèbre à tous les niveaux de la scolarité obligatoire.

REFERENCES

ABOUHANIFA, S. et SQUALLI, H. (2023). Rapport institutionnel de l’activité modélisation relativement au développement de la pensée algébrique dans la transition primaire/collège au Maroc. *Actes du colloque ADIMA-3, GT2 du 15 au 20 Août 2022 à Hammamet (Tunisie)*, pp.128-139.

ABOUHANIFA, S. (2021). Caractérisation des raisonnements des élèves marocains de 11 à 13 ans dans la résolution de problèmes algébriques, *ITM Web Conf.* Volume 39.

BALL, D. L., THAMES, M. H., et PHELPS, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

BEDNARZ, N. et JANVIER, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. *In* N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

BEN NEJMA, S. (2009). D’une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes : une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien- Thèse de Doctorat-Université Paris Diderot Paris7 et Université de Tunis.

BEN NEJMA, S. (2009). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : Une étude de cas en algèbre élémentaire. En amont et aval des ingénieries didactiques- *Actes de la XV-ème école d'été de didactique des mathématiques*, Édition la pensée Sauvage.

BEN NEJMA, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes ? Etude de cas dans le contexte tunisien- *Petit x.* N° 82. p. 5-30

BEN NEJMA, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. *In* Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. *Actes du colloque EMF-2012,* p. 1133–1142. ISSN 978-2-8399

BEN NEJMA, S. (2018). Analyse des pratiques enseignantes en rapport avec les praxéologies de mise en équations à l’entrée au lycée : une étude de cas dans le contexte Tunisien. *Actes du colloque EMF2018,* p. 944-952. Edition de IREM de Paris.

BEN NEJMA, S., ABOUHANIFA, S., OKÉ, E., NAJAR, R., SQUALLI, H., et ADIHOU, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6e année primaire. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, (pp. 59-95)

BOOTH, L. (1984). Algebra: children’s strategies and errors. Windsor : NFERNELSON.

CHEVALLARD, Y. (1991) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La Pensée Sauvage.

COULANGE, L ; BEN NEJMA, S. CONSTANTIN, C, LENFANT-CORBIN, A (2012). *Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. In* L., Coulange et Drouhard., J-L., Dorier, et A, Robert (dir), Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques (p. 57-79). La Pensée Sauvage H-S

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques,* 7(2), 5–31.

DUVAL, R. (1995). Semiosis et pensée humaine : sémiotiques registres et apprentissages intellectuels. Berna : Peter Lang.

KHALLOUFI, F BEN NEJMA, S; FADHEL, A; et NAJAR, R (2023). Analyse du rapport institutionnel relatif à l'activité de modélisation dans la transition primaire collège en Tunisie. *Actes du colloque ADIMA-3, du 15 au 20 Août 2022 à Hammamet (Tunisie)*, pp. 218-227.

KIERAN, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. *In* F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing

KOEDINGER, K et NATHAN, M. (2004). The real story behind story problems. Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences* 13(2), 129-164.

MARCHAND, P. et BEDNARZ, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'AMQ*, Vol. 39, n°4, pp. 30-42.

NAJAR, R., SQUALLI, H., ADIHOU, A. et ABOUHANIFA, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre, *ITM Web of Conférences* 39, 01004 CIFEM'2020.

OKÉ, S. E., AFFOGNON, G., SOGBAVI, D. et GBAGUIDI, F. (2023). Enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre au Bénin : Analyse des prescriptions. *Actes du colloque ADIMA-3, GT2 du 15 au 20 Août 2022 à Hammamet (Tunisie)*, pp. 160-168.

RADFORD, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Anne D. Cockburn and Elena Nardi. (Eds.), Vol. 4, 81-88.

RADFORD, L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.

ROSNICK, P. et CLEMENT, J. (1980). Learning without understanding: the effects of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, volume 3, n°1, pp.327.

SHULMAN, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

SQUALLI, H. (2003) Survol historique du corpus algébrique enseigné à l'école marocaine. *Cahiers de didactique des mathématiques et des sciences, Actes des séminaires de GIFREMS 2000-2001*, Ecole Normale Supérieure Takaddoum, p. 77-90.

SQUALLI, H., (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone,* Groupe travail 3.

SQUALLI, H., LARGUIER, M., BRONNER, A. et ADIHOU, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22* (1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

WAGNER, S., RACHLIN, S. L. et JENSEN, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

ANNEXES

QUESTION 1

Deux enseignants, Driss et Fatima, comparent la difficulté des deux problèmes suivants pour des élèves de 6^e année primaire ou première année du collège.

Problème 1 :

Un père partage une somme de 1800 dirhams entre ses trois filles : Amina, Bouchra et Chaima. Il donne 2 fois plus à Chaima qu'à Amina et il donne 200 dirhams de moins à Bouchra qu'à Chaima. Bouchra reçoit 600 dirhams. Combien les autres enfants ont-ils reçu ?

Problème 2 :

Un père partage une somme de 600 dirhams entre ses deux filles : Amina et Bouchra. Il donne 150 dirhams de plus à Bouchra qu'à Amina. Combien chaque enfant a-t-il reçu ?

L'avis de Driss :	L'avis de Fatima :
Le problème 1 me semble bien plus compliqué à résoudre que le deuxième pour 3 raisons : ● il y a plus de phrases à lire dans le problème 1 que dans le problème 2 ; ● le total est réparti entre 3 enfants dans le problème 1, il n'y en a que 2 dans le problème 2 ; ● même si, dans le problème 1, le montant de Bouchra est connu, il y a quand même deux inconnues (la part d'Amina et de Chaima) à déterminer.	Pour moi, c'est le problème 2 qui est le plus compliqué, pour deux raisons : ● dans le problème 1, le fait que la part de Bouchra soit connue permet aux élèves de faire des calculs-: il suffit de comparer les montants de Chaima et Amina à celui de Bouchra pour trouver directement les 3 parts ; ● c'est vrai que dans le problème 2, la part de l'une se déduit directement de la part de l'autre. Cependant, plusieurs élèves seront amenés à diviser 600 en 2, et à ajouter 150 dirhams au quotient obtenu, sans vérifier que le total est 600 Dhs.

Selon vous, qui a raison ? Expliquez votre réponse.

QUESTION 2

Dans un examen, vous avez soumis le problème suivant à vos élèves (6^e année primaire ou 1 année du collège) :

Trois amis comparent le nombre de timbres de leur collection. Farid a 2 fois plus de timbres que Chafiq et Siham a 5 fois plus de timbres que Farid. Si au total ils ont ensemble 494 timbres, combien de timbres ont-ils chacun ?

Voici les solutions de 4 élèves, Ahmed, Mariam, Fouad et Sonia.

Solution de Ahmed :

Farid = 2 x plus de timbres que Chafiq ; Siham = 5 x plus de timbres que Farid

Chafiq	Farid	Siham	Total
15	30	150	195
30	60	300	390
40	80	400	520
36	72	360	468
39	78	390	507
37	74	370	481
38	76	380	494

Réponse

Chafiq a 38 timbres, Farid en a 76 et Siham a 380 timbres.

Solution de Mariam :

Chafiq	Farid	Siham	Total
1	2	10	13
2	4	20	26
3	6	30	39

Donc on sait que le nombre de timbres de Chafiq multiplié par 13 donne le total.

En divisant 494 par 13 on obtient le nombre de timbres de Chafiq ; 494 : 13 = 38

Chafiq	Farid	Siham	Total
38	76	380	494

Réponse : Chafiq : 38, Farid : 76, Siham : 380

Solution de Fouad :

494/13 = 38

Chafiq = 38; Farid = 76; Siham = 380

Solution de Sonia :

Chafiq = 1; Farid =2 , Siham = 10; 10 + 2 + 1 = 13

494/13 = 38 timbres/partie

Chafiq : 38; Farid : 76, Siham : 380.

Quelle note sur 20 attribuez-vous à chacun de ces élèves ? Justifiez en quelques lignes chacune de ces notes.

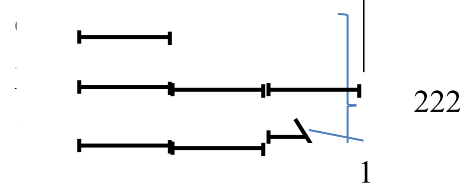
Noms	Note /20	Justification
Ahmed		
Maryam		
Fouad		
Sonia		

QUESTION 3

Dans un examen, vous avez soumis le problème suivant à vos élèves (6[e] année primaire ou 1 année du collège).

Maria, Chaima et Sophia collectionnent des timbres. Maria à 3 fois plus de timbres que Chaima. Sophia a 16 timbres de moins que Maria. Si le nombre de timbres au total est 222 combien de timbres ont-elles chacune ?

Voici les solutions de 3 élèves, Ali, Mustapha, et Nadia

Solution de Ali	Solution de Mustapha	Solution de Nadia
222 + 16 =238 238 / 7 = 34 Chaïma a 34 timbres. Maria a 3x34 = 102 timbres Sophia a 102 – 16 = 86 timbres.	C le nombre de timbres de Chaïma M le nombre de timbres de Maria S le nombre de timbres de Sophia M = 3C; S = M-16 = 3C -16; M + S + C = 222, donc : 3C + 3C -16 + C = 222. D'où ; 7C = 222 + 16 =238. C = 238/7 = 34; M=3x34= 102 et S = 102 – 16 = 86.	 7 **C** -16 = 222. D'où **C** = 238/7 = 34 **M** = 3x34 =102 **S** = 102 – 16 = 86 34+ 102 + 86 = 222.

Quelle note sur 20 attribuez-vous à chacun de ces élèves ? Justifiez en quelques lignes chacune de ces notes.

Noms	Note / 20	Justification
Ali		
Mustapha		
Nadia		

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

Une analyse des rapports entre l'épistémologie et la didactique des mathématiques : cas du concept d'intégrale

Inen Akrouti [20]

Université de Jendouba – ISSHJ / Université de Carthage – LaRINa – Tunisie

Khalid Nab

Université Sultan Moulay Slimane – FLSH

Résumé – Cet article propose une analyse épistémologique du processus d'émergence de la notion d'intégrale, ainsi que le lien que ce processus entretient avec le développement historique des mathématiques. Ce choix est motivé par les résultats de certaines recherches portant sur les liens entre épistémologie, didactique et enseignement des mathématiques. L'épistémologie jouera le rôle de médiateur entre l'étude historique et l'analyse didactique. Elle aide à développer un esprit critique qui permet aux praticiens et aux sujets apprenants d'analyser les contenus disciplinaires abordés. Cette démarche favorise une compréhension approfondie de la signification des concepts mathématiques enseignés et l'élaboration d'une conceptualisation adéquate de ces derniers. Cette perspective rejoint l'idée de Haddad (2012) qui souligne la nécessité de maîtriser les fondements de la réflexion sur le sens et la nature des concepts mathématiques afin de saisir pleinement la portée et le domaine de validité des connaissances visées.

Mots-clés – Épistémologie, histoire des mathématiques, activité mathématique, didactique des mathématiques, concept d'intégrale.

INTRODUCTION

Dans tout projet d'enseignement, le recours aux origines des notions mathématiques paraît incontournable pour donner du sens à la cohérence interne des concepts à enseigner et pour l'exploration de nouvelles idées (Akrouti, 2022). De ce fait, les curricula présentent souvent les concepts mathématiques comme un processus linéaire, où les idées s'enchaînent progressivement, de manière fluide et ordonnée, à l'instar de maillons d'une chaîne. Cependant, un regard sur leur évolution historique démontre bel et bien que lesdits concepts ne suivaient pas une telle logique. Ils sont inventés ou / et développés chaque fois qu'il y a un besoin de répondre à un problème spécifique inhérent à la vie quotidienne (Fauvel et Maanen, 2000). Le retour à l'histoire nous permet de situer la production mathématique dans son contexte social, culturel, économique, pour

---

[20] Akrouti, I. et Nab, K. (2025). U Une analyse des rapports entre l'épistémologie et la didactique des mathématiques : cas du concept d'intégrale. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT5, pp. 58-69.

comprendre et appréhender la pensée mathématique aussi bien au niveau théorique qu'au niveau empirique (i.e. la pratique enseignante). Il nous permet aussi d'expliquer le processus de construction du concept mathématique et les faits qui ont contribué à son développement (Fauvel et Maanen, 2000). Ce regard réflexif crucial pour l'enseignement des mathématiques étudie ce que l'activité mathématique en dit pour le processus de construction du concept. Dans ce même ordre d'idées, Dorier (2000) considère que cette réflexion est fondamentale pour prendre des distances par rapport aux problématiques abordées en didactique. L'étude critique des conjectures, des faits, des procédures, méthodes et des résultats scientifiques est souvent désignée sous le terme de "réflexion épistémologique" (Dorier, 1997 ; Artigue, 1990). En ce sens, l'épistémologie des mathématiques n'examine pas seulement la nature, la validité et la légitimité des connaissances mais aussi les fondements théorico-méthodologiques et les implications des résultats. Elle englobe la réflexion sur la manière dont les mathématiciens formulent des conjectures, démontrent des théories et parviennent à des conclusions. Elle explore également les bases logiques et conceptuelles des différents résultats et cherche à comprendre la nature et la justification des connaissances mathématiques. L'épistémologie se situe ainsi à l'interface de l'étude historique et de l'étude didactique (Dorier, 1997, 2000). En effet, l'articulation entre l'épistémologie et la didactique permet de concevoir une approche qui s'inscrit aussi bien dans l'histoire du développement du concept, que dans le développement des aptitudes à construire des connaissances porteuses du sens sous-jacent de la structure conceptuelle mathématique.

Dans le cadre de cet article, nous abordons la question du lien entre épistémologie et didactique à partir d'une étude historico-épistémologique du concept d'intégrale. Notre texte est organisé en trois parties. La première fait état de la problématique de notre recherche, les bases théoriques qui ont conduit notre travail d'analyse et leur utilité par rapport à cette réflexion ; la deuxième est consacrée à une analyse critique du processus d'émergence et de développement de l'intégrale. Nous regardons les premières tentatives qui ont amené à son émergence et discutons des conditions qui l'ont accompagné. Ceci nous conduit à une analyse de l'activité mathématique et à des interrogations sur sa nature.

DIDACTIQUE ET ÉPISTÉMOLOGIE

La didactique des mathématiques est une discipline scientifique autonome, qui a toujours besoin de créer des rapports avec d'autres domaines de recherche connexes. Il est bien évident, que le recours à l'épistémologie des mathématiques a souvent aidé à comprendre le cheminement historique qui a abouti à l'émergence des concepts soumis à l'étude (Artigue, 1990). L'épistémologie qui se situe au croisement de l'étude historique et de l'analyse didactique joue le rôle de médiateur entre ces deux champs de connaissances (Dorier, 1997) et sert à revoir la question de la signification mathématique d'un concept qui reste ambigu pour les sujets apprenants et également pour certains enseignants (Akrouti, 2021a). Dans certains pays comme la Tunisie, l'enseignement des mathématiques se focalise sur l'acquisition d'un ensemble de savoirs et de savoir-faire sans donner une importance à développer chez le sujet apprenant la compétence à faire l'analyse critique (Akrouti, 2021b ; Haddad, 2012). Par ailleurs, l'épistémologie est perçue comme une réflexion sur la genèse et l'évolution du concept d'intégrale, le processus et les conditions qui ont conduit à son émergence et son développement, les caractéristiques de l'activité mathématique qu'il génère et en général, sur tout ce qui constitue sa spécificité.

Le retour aux problèmes des fondements pourrait motiver l'introduction ou l'enseignement d'un savoir tel que le cas du concept d'intégrale. Dans ce même ordre d'idées, Dorier (1997) considère que la recherche en didactique des mathématiques devrait se focaliser sur l'analyse du processus complexe d'émergence d'un savoir mathématique dès sa production jusqu'à son enseignement pour réussir sa soumission à une transposition didactique réussie et efficiente. Il précise que « l'analyse historique doit être indépendante, doit satisfaire des exigences d'exhaustivité et doit répondre à un questionnement épistémologique […]. Le questionnement épistémologique doit avoir une origine et une finalité didactique » (Dorier, 1997, p. 29). De son côté, Barbin (1997) précise que le retour aux textes originaux alimente des problématiques d'enseignement, et évoque quatre types de problématiques : « la rectification des concept, l'idée de rupture épistémologique, la positivité de l'erreur, et la relativité de l'idée de vérité mathématique » (p. 22).

Sfard (1991) suppose que le processus d'évolution historique d'un concept mathématique, de la genèse à la structuration théorique, passe par trois phases, et précise qu'il existe une hiérarchie allant du procédural au structural. Au début, il s'agit de la phase préconceptuelle qui se caractérise par des manipulations d'objets concrets. Ces manipulations usuelles sont traitées comme si elles n'étaient qu'un processus bien élaboré. Ensuite, la phase opérationnelle au cours de laquelle plusieurs notions liées au concept mathématique émergent en dehors des processus connus. La notion est regardée comme un potentiel plutôt qu'une véritable entité dont provient son existence. Enfin, la phase structurelle où la notion acquiert son statut d'objet et sera considérée comme un véritable objet mathématique. Cela signifie qu'elle devient capable de se référer à elle-même comme une structure mathématique bien formalisée. Sfard (1991) souligne également que les dimensions procédurale et structurale sont reliées, et relèvent d'un système qui fonctionne au niveau des conceptions et des procédures qui en découlent. Le processus de développement historique semble valider cette voie proposée par Sfard (1991) pour quelques concepts tels que les nombres complexes, les fonctions, etc.

Nous avons exploité d'autres travaux et ouvrages qui ont abordé l'histoire des concepts mathématiques et la problématique de leur développement. Artigue (1990) suppose que la réflexion épistémologique est la première étape dans la conception et l'élaboration d'une ingénierie didactique dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Elle précise que l'analyse épistémologique sert à établir des liens entre le savoir tel qu'il est apparu dans l'histoire et le projet d'enseignement. L'épistémologie mathématique n'a donc pas pour vocation à faire progresser le savoir mathématique ou à explorer des questions mathématiques inédites, mais elle préconise un retour sur l'activité mathématique première, c'est-à-dire l'activité mathématique dans les différentes étapes de son évolution conceptuelle. L'épistémologie projette une vision critique, non pas sur l'objet de l'activité mathématique, mais sur ce qu'elle en dit (Blanché, 1972). Elle s'occupe des procédures et des méthodes qui ont amené à l'évolution du concept. L'épistémologie mathématique a pour vocation d'étudier la genèse et le développement de la notion mathématique. Selon Blanché (1972) elle couvre quatre domaines d'étude qui mettent l'accent sur les problèmes de :

1- Validité : il s'agit de la dimension syntaxique qui étudie la manière dont les signes sont combinés. Cela suppose la discussion de la vérité et la non-contradiction des assertions. C'est-à-dire par exemple comment la théorie d'intégration a été formalisée ?
2- Signification et de vérité : il s'agit de la dimension sémantique qui étudie les rapports entre les signes et les objets. Peut-on rendre le concept d'intégrale expérimentalement possible ? Quelle est le domaine de son application ?

3- Méthode : pour les mathématiques, il s'agit des procédures qui ont amené au développement du concept. Á quel point une forme de raisonnement pourrait-elle valider un résultat mathématique ?
4- Limite et la valeur de l'activité mathématique : quelle est la limite d'une théorie ? Comment a évolué la théorie d'intégration ? De l'aire à l'intégrale à la théorie de mesure, comment se sont passées les choses ?

Pour mener à bien notre analyse, nous considérons que le processus de développement du concept d'intégrale est passé par trois phases comme souligné par Sfard (1991). Dans chaque phase, nous regardons les idées qui l'ont accompagnée (Blanché, 1972), et discutons de la validité de ces idées, des méthodes qui ont été utilisées, de leur limite, du champ de leur validité et de la valeur de l'activité mathématique qui les accompagne (Blanché, 1972 ; Barbin, 1997). Enfin, nous mettons en exergue les contributions de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques quant à la didactique des mathématiques (Artigue, 1990 ; Dorier, 1997), en particulier lorsqu'il s'agit de l'intégrale.

PROCESSUS DE DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DU CONCEPT D'INTÉGRALE

L'histoire du calcul intégral est intrinsèquement liée à celle du calcul infinitésimal. Cette découverte du calcul infinitésimal a ouvert de nouvelles orientations de recherche dans une multitude de disciplines scientifiques. Son approche novatrice a permis de soulever des questions inédites et d'impulser des transformations majeures (Akrouti, 2021a). Le Calculus est la mathématique du taux de variation et d'accumulation (Moreno-Armella, 2014). En effet, l'étude de la vitesse d'un objet en mouvement en fonction de la distance parcourue a conduit aux modèles classiques de la tangente à une courbe et de l'aire sous une courbe. Fermat (1601 ; 1665), Cavalieri (1598-1647), Wallis (1661, 1703) et bien évidemment d'autres ont élaboré des méthodes pour faire ces calculs (Czarnocha et al., 2000). Cependant, Akrouti (2021a) considère que les premiers problèmes qui préfigurent le calcul d'intégrale ont pris naissance à partir du calcul d'aires et de volumes. En nous basant sur la hiérarchie de Sfard (1991), nous allons décomposer le processus du développement historique du concept d'intégrale en trois phases.

La phase préconceptuelle ou intuitive

Pour résoudre les problèmes d'aire et de volume, les mathématiciens ont pensé à la divisibilité des grandeurs, ce qui a permis le développement de la méthode d'exhaustion avec Antiphon (vers 430 av J.-C.), améliorée par Eudoxe, puis par Archimède. En se basant sur la commensurabilité et la notion intuitive de la limite, Eudoxe a pu établir les fondements de la théorie de proportionnalité et surmonter les failles du postulat d'Antiphon que posait le passage à la limite. Archimède a également utilisé les fondements de ce procédé pour le calcul d'aires et de volumes. On lui doit le recours à la méthode d'exhaustion pour résoudre des problèmes infinitésimaux et des applications qui font partie du calcul intégral. La méthode d'exhaustion consiste à diviser le segment de parabole en une série d'un grand nombre de triangles qui couvrent la région dans le sens d'une zone restante rendue aussi petite qu'on le souhaite (figure 2). Cette méthode considère la courbe dont on cherche l'aire comme la limite du polygone régulier inscrit ou circonscrit. En augmentant le nombre de ses côtés (figure 1), l'aire de la surface entre les deux figures géométriques sera réduite et deviendra de plus en plus petite. Cavalieri (1598 – 1647) réinvestit la relation entre les lignes de deux figures géométriques établies par Archimède. La méthode des indivisibles de Cavalieri repose sur la conception suivante :

> «A surface consists of an indefinite number of equidistant parallel lines, and a solid is made up of a set of equidistant parallel planes. The plane figure seems then, in some sense, as the sum of these parallel lines and the solid as the sum of those parallel planes contained therein » (Czarnocha et al, 2000, p. 3).

Ces interprétations ont permis à Cavalieri de définir le concept de l'égalité des figures, d'utiliser leurs similarités et de calculer l'aire des formes dont les lignes correspondantes ont un rapport constant. En considérant certaines courbes spéciales de type $\frac{y}{a} = (\frac{x}{b})^n$, il a réduit toute une série de quadratures et de cubatures à la détermination des sommes des puissances de longueurs des lignes d'un triangle (Czarnocha et al, 2000). Les travaux de Cavalieri ne sont démontrés qu'à l'ordre 4 selon Boyer ou 9 selon Baron (cité par Lefebvre, 1996, p. 34). Pour le reste des ordres, il s'agit d'une généralisation des cas vérifiés. La méthode de Cavalieri a été beaucoup critiquée par Tacquet (1612 – 1660) et d'autres en se basant sur les importantes relatives significations de l'homogénéité de la géométrie. En raison de cette critique et bien qu'appréciant et soutenant les idées de Cavalieri, ses contemporains, tels que Roberval (1602 – 1675), Wallis (1616 – 1703), et Pascal (1623 – 1662), proposent une voie alternative pour aborder les indivisibles. Pour Roberval et Wallis, les indivisibles et les lignes de Cavalieri sont considérés comme une sorte de limite de rectangles infiniment divisibles (Czarnocha et al., 2000). Ainsi, une passerelle intéressante est construite entre les deux points de vue opposés sur la structure de l'espace mathématique. Pour Archimède, l'existence de l'aire est supposée géométriquement évidente, en plus, elle est considérée comme une grandeur, donc toutes les opérations mathématiques sont applicables à cette grandeur telles que l'additivité finie, l'invariance par translation… Pour assurer l'unicité de la valeur trouvée, les mathématiciens de l'époque ont recours à la double réduction à l'absurde et par simple déduction, le résultat est évident.

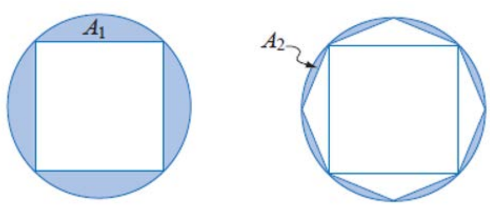


Figure 1 : l'aire est la limite du polygone régulier inscrit

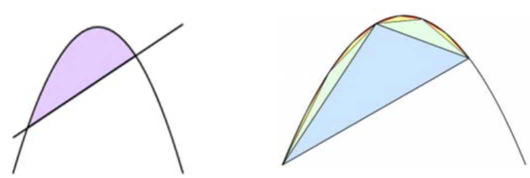


Figure 2 : la méthode d'exhaustion

La redécouverte des travaux de Cavalieri a montré que les analogies avec la physique qui semblent influencer la compréhension de la structure de l'espace mathématique, sont également importantes. Elles rejoignent d'une certaine manière le recours en mathématiques à la physique et en particulier au principe du levier, tel qu'il apparaît chez Archimède. D'un point de vue didactique, la méthode de Cavalieri, basée sur l'indivisibilité des segments, a été transformée en une problématique de rectangles très petits et de passage à la limite, et a construit « la deuxième approche pour les questions d'intégrales au XVIIe siècle » (Lefebvre, 1996, p. 35). Dans sa thèse, Schneider-Gilot (1988) souligne que « des écoliers d'aujourd'hui, comme des mathématiciens d'hier, passent imaginativement ou conceptuellement trop vite à la limite et, au lieu du désiré » (cité par Lefebvre, 1996, p. 35). La technique de découpage d'une figure en des pièces rectangulaires uniformes sert de point de départ pour le calcul d'une aire dans le cadre des deux méthodes : celle des indivisibles et celle d'exhaustion. Archimède ou / et Cavalieri reconstruit l'objet initial à partir de la « sommation » de petits morceaux déjà découpés. Cette sommation est une formalisation "naïve" de la procédure intégrale qui se base sur des représentations matérielles directes pour faire des comparaisons en utilisant des propriétés mathématiques très basiques.

La phase opérationnelle ou algorithmique

Rogalski (2001) considère qu'une nouvelle méthodologie de travail commence à apparaître progressivement au $XVII^e$ siècle. Elle consiste à classer les problèmes rencontrés dans le calcul d'aire au moyen des fonctions. Ce changement a conduit à la résolution de ce type de problèmes en développant une approche algébrique. La rupture avec l'approche géométrique pour le calcul d'aire a conduit progressivement à l'éclosion du calcul infinitésimal. Notons que Newton (1642 – 1727) et Leibniz (1646 – 1716) sont parmi les inventeurs de ce calcul, et que cette découverte de la résolution générale du problème d'aire et de primitive est faite indépendamment par ces deux savants. En effet, Newton considère l'intégrale comme le processus inverse de la dérivée. Son raisonnement se base sur une question qui se ramène à la problématique de la primitive : comment reconstruire la distance à partir de la vitesse ? Son travail a porté sur l'étude des changements infinitésimaux des quantités mathématiques et sur le calcul de l'aire produite par ces changements. En se basant sur une démarche empirique, et à partir du taux de variation, il a défini ce qu'on appelle aujourd'hui le Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA). Contrairement, la méthode de Leibniz consiste à découper la surface sous la courbe en des rectangles de plus en plus minces (Figure 3), puis à sommer leurs aires. Cette méthode considère la tangente comme une sécante qui passe par deux points très proches ayant pour coordonnées (x, y) et $(x + dx, y + dy)$ (Figure 4). Les travaux de Leibniz et de Newton ont contribué à l'élaboration d'un système de notation symbolique et d'un algorithme de calcul du concept d'intégrale définie. L'algorithme appliqué a pris naissance d'une pratique adaptée à cette époque qui est la suivante : Subdivision – Développement en série – Sommation – Mise en équation.

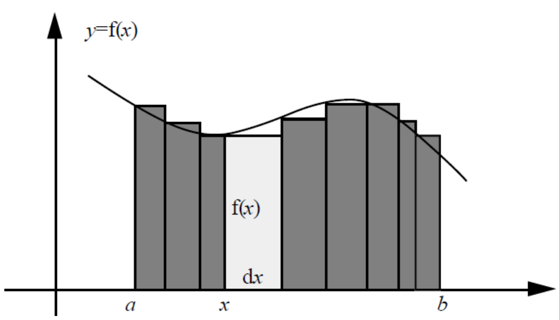


Figure 3 : Découpage de l'aire par Leibniz (Tall, 1992)

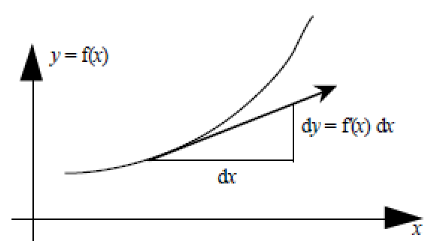


Figure 4 : les composantes du vecteur tangente (Tall, 1992, p. 2)

La phase conceptuelle ou formelle

La définition du concept de limite et sa formalisation par Cauchy (1789, 1857) ont permis à ce dernier d'élaborer une première ébauche de la théorie d'intégration où il a pu mettre les sommes à la disposition du calcul intégral. Avant ces travaux, l'intégrale a été considérée comme la procédure inverse de la dérivée. Avec Cauchy, l'aire sous la courbe d'une fonction continue est considérée comme une primitive de cette fonction. Notons que Lagrange (1736, 1813) est le premier qui a pensé à recourir à la fonction d'aire d'une fonction continue en 1796, sans pouvoir l'expliciter sous forme d'une relation ou d'une procédure. Il a évité le recours aux infinitésimaux en reformulant le calcul différentiel avec les séries de Taylor. Il a établi une approche purement algébrique. Il exprime certaines intégrales via des développements en série. Cauchy donne un statut théorique à l'expression « infiniment petit », et la considère comme une fonction ayant « zéro pour limite ». Pour Lefebvre (1998), cette expression est « une grandeur sans grandeur ». Il précise que « l'infiniment petit n'est plus un être incertain, c'est une abréviation du langage » (p. 36). Riemann (1826, 1866) s'appuie sur la méthode de subdivision de Cauchy pour construire une fondation théorique rigoureuse de la notion d'intégrale définie. On lui doit la définition du concept d'intégrale en le considérant comme la limite des sommes de Riemann d'une fonction bornée. Il a étudié le comportement des fonctions bornées, dépassant la question de la discontinuité. Avec lui, nous passons de l'étude de la continuité à l'étude de l'intégrabilité. L'intégrale est ainsi exprimée par une relation : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$. Par la suite, la problématique change et se transforme en une question de passage du discret au continu.

Conclusion

Le tableau suivant récapitule l'évolution des idées autour de l'intégrale et le développement du raisonnement qui les ont accompagnés tout au long du processus de sa construction :

Phase	Mode de raisonnement	Forme de raisonnement	Idées sous-jacentes
Phase intuitive (préconceptuelle, (Sfard, 1991))	Heuristique	Déductif pour la méthode d'exhaustion	Rapport entre grandeurs de même nature : (idée de mesure d'aire).
		Inductif pour la méthode des indivisibles	
		Abductif pour la manipulation des cas concrets ; ça marche ou ne marche pas.	
Phase algorithmique (opérationnelle, Sfard, 1991))	Empirique	Inductif / déductif	Reconstruction d'une loi d'une grandeur à partir d'une autre : distance / vitesse ; tangente / aire (idée de primitive)
Phase de formalisation (conceptuelle, Sfard, 1991))	Démonstration / preuve	Déductif	Jonction entre le discret et le continu : idée de mesure d'une grandeur produit

Tableau 1 - Développement de la forme et du mode de raisonnement suivant le processus de développement historique de la notion d'intégrale

La diversité du raisonnement mathématique se manifeste en ces dosages de pragmatisme et de conceptualisme. Lefebvre (1998) précise que la diversité se révèle en cette posologie de vision et de calcul, dans le caractère plus ou moins parfait de l'argumentation. L'interprétation de l'intégrale définie constitue un raisonnement quantitatif (Rogalski et al., 2001 ; Simmons et Oehrtman, 2019).

Ce raisonnement correspond à trois types de modèles que nous appelons les modèles : de base, local et global. Le modèle de base représente la relation quantitative qui s'applique à la situation si les quantités en jeu sont deux valeurs constantes ; le modèle local est une version localisée du modèle de base appliquée à un sous-domaine ou à une partie de l'intervalle d'intégration de la situation d'origine ; c'est-à-dire que le découpage s'arrête après un nombre fini de fois (généralement dans une partition), alors que le modèle global est déduit d'un processus d'approximation appliqué au modèle local, dont le raisonnement sous-jacent est considéré sous la forme différentielle. C'est comme si on accumulait les résultats d'une opération quantitative lorsqu'une ou plusieurs quantités d'un modèle de base varient. Il faut également noter que le raisonnement quantitatif dans les modèles de base, locaux ou globaux, y compris les relations entre eux, est souvent non trivial. Il n'y a pas de méthode canonique pour développer un modèle local à partir d'un modèle global et remarquons que réorganiser ou séparer le différentiel de la composante de la distance du modèle local en une structure multiplicative $f\ (x)\ \times\ dx$ entraîne la perte de signification quantitative du différentiel.

Freycinet (1860) considère que le calcul intégral est une continuation évidente dans l'algèbre et la méthode infinitésimale sert à trouver les expressions algébriques des problèmes proposés. « La caractérisation en structure de relation multiplicative entre la fonction à intégrer f et une petite quantité Δx, a été considérée par des chercheurs en didactique des mathématiques (Jones, 2015 ; Sealy, 2014) et également en didactique de la physique (Meredith et Marrongelle, 2008) » (cité par Akrouti, 2022, p. 78) comme indispensable pour rendre la notion d'intégrale plus accessible aux sujets apprenants. Dans ce même ordre d'idées, Legrand (1990) pense que les obstacles à l'enseignement de la théorie d'intégration ne relèvent pas de la didactique mais plutôt de l'épistémologie de la discipline. Sfard (1990) souligne que l'existence des concepts mathématiques est intrinsèquement liée à une dualité, et précise que le raisonnement mathématique possède une particularité qui s'investigue à travers les statuts épistémologiques et le statut cognitif. Elle précise que la double nature des constructions mathématiques peut être observée dans divers types de représentations. Le symbole $\int_a^b f(x)dx$, pourrait être considéré à la fois une conception structurelle et opérationnelle sans qu'il ne soit nécessaire de mentionner le processus implicite qui est symbolisé par $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Les conceptions opérationnelle et structurelle d'une même notion mathématique ne sont pas mutuellement exclusives. Elles sont complémentaires. La dualité dans la construction mathématique n'est pas observée seulement dans les descriptions verbales, mais aussi à travers les types de représentations symboliques comme nous l'avons souligné. Le tableau ci-dessous résume le statut des différentes étapes de la construction de la structure sous-jacente de l'intégrale :

	Processus	Processus-objet	Objet
Partition	$\frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	Δx
Structure multiplicative	$f(x_i)\Delta x$	$A_i = f(x_i)\Delta x$	A_i
Somme	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$	$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	S_n
Limite	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	$\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	L
Intégrale définie	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	$\int_a^b f(x)dx$

Tableau 2 - Les différents statuts de l'intégrale (Akrouti, 2023a, p. 7)

LA NATURE DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

L'activité mathématique est ancrée dans l'histoire. Un concept mathématique comme celui d'intégrale est passé par différentes étapes pour qu'il ait une vraie structuration théorique, avec des périodes d'incertitudes (avec Cavalieri), des périodes de stagnation (depuis Archimède jusqu'à l'aire arabe) et des périodes d'évolution (Newton, Leibniz, Cauchy, Riemann…). Barbin (1997) considère que « le retour à l'histoire permet de voir les mathématiques non comme un produit achevé mais comme un processus intellectuel, non comme un langage mais comme une activité » (p. 20). Elle considère également que le sens des concepts et des théories mathématiques se développe à travers les problèmes. Cela ramène la problématique de l'histoire du concept à une problématique relative à un ensemble de problèmes liés à un questionnement de sens. Ainsi, l'étude historique devient l'étude de l'activité mathématique qui met en œuvre les conjectures, la démonstration, la rigueur ou l'erreur dans le développement du savoir mathématique. De ce fait, il est nécessaire de lire le texte dans le contexte de son époque. Le but est de comprendre ce qui s'est passé plutôt que de juger !

D'un point de vue cognitif, Sfard (1991) distingue trois étapes qui correspondent à trois niveaux de structuration du processus de conceptualisation d'un objet mathématique : l'intériorisation, la condensation et la réification. Un processus est intériorisé lorsqu'il peut s'exprimer par des représentations mentales. Dans le cas de l'intégrale, il s'agit de la représentation graphique de la fonction à intégrer et de l'utilisation de l'aire sous la courbe. La condensation correspond à la phase de transformation du calcul en de nouvelles procédures aisément accessibles. Dans le cas de l'intégrale, cette étape correspond au découpage du domaine d'intégration en sous-domaines plus fins et à approcher l'aire principale par la somme des aires des rectangles de longueur $f(x_i)$ et de largeur Δx. À ce niveau, le sujet apprenant peut agir sur le nombre de découpages jusqu'à le rendre de l'ordre d'un infinitésimal. La réification correspond à la capacité du sujet apprenant à concevoir l'objet mathématique comme « une entité qui se réfère à elle-même » (Akrouti, 2021b, p. 4). En effet, il s'agit de l'unification des procédures précédentes. L'objet est ainsi le résultat du processus qu'il a produit et fait partie d'une théorie. Par la suite, on peut étudier ces propriétés et déterminer les relations entre leurs différents représentants. Dans le cas de l'intégrale, le passage à la limite unifie toutes les procédures de découpage et de sommation, et permet de calculer la valeur exacte de l'intégrale. Ainsi, l'activité mathématique se définit par rapport à la connaissance en tant que génératrice de connaissances. Cela nous amène à dire que cette activité est essentiellement une activité cognitive.

Les mathématiques comportent une dimension socio-culturelle qui nous renseigne sur les personnes qui ont développé les idées dans différentes sociétés (Bishop,1995). Les aspects multiculturels et les questions multidisciplinaires font partie de la réflexion épistémologique. En outre, l'histoire des mathématiques à partir de ses idées, est parfaitement liée à l'histoire de l'Humanité, et devrait être considérée dans cette perspective. Les mathématiques sont naturellement un ensemble de connaissances abstraites qui peuvent être apprises ou redécouvertes. Cependant, elles naissent à partir des problèmes qui expriment un besoin spécifique à un moment donné de l'histoire. Dans ce cadre, Fauvel et Maanen (2000) précisent que les concepts et les théories mathématiques ont été construits dans le processus de répondre à certains types de problèmes, qui étaient essentiellement pratiques au départ, mais qui deviennent abstraits au fur et à mesure que la société évolue. L'activité mathématique est ainsi une activité sociale. Le concept d'intégrale a été développé en réponse à la nécessité de mesurer des aires. Ce besoin de quantification a été le moteur de son élaboration.

CONCLUSION

Le détour historique nous a permis de voir que l'ontogenèse de l'intégrale a été imposée par une nécessité opératoire : le besoin de mesurer des grandeurs qui se rapportent à des figures géométriques non usuelles. Pour ce faire, les mathématiciens de l'époque ont procédé par des comparaisons de plus en plus fines. À travers des méthodes intuitives simples de découpage, d'encadrement, de sommation et de passage à la limite, ils ont réussi à fonder une théorie suffisamment puissante qui est enseignée au supérieur jusqu'à présent. La convergence entre les recherches didactiques et historiques apparaît essentielle dans ce contexte. L'histoire a besoin de s'enrichir des apports théoriques de la didactique pour mieux comprendre les principes régissant les disciplines, et inversement. La didactique doit s'inspirer des tendances historiques pour concevoir des pratiques pédagogiques plus pertinentes. Les recherches didactiques et historiques devraient alors se nourrir mutuellement : l'histoire a besoin de la didactique pour théoriser ses principes, et la didactique a besoin de l'histoire pour éclairer ses pratiques. L'intégration des éléments de l'histoire des concepts mathématiques et de l'épistémologie permet de concevoir et de mettre en œuvre une approche d'enseignement des mathématiques plus accessible au sujet apprenant telle que les ingénieries didactiques (Artigue, 1990). Les mathématiques ne sont « ni figées, ni absolues, ni relevant d'une froide logique » (Holdache et Houatis, 2018, p. 75), ni intégralement déconnectées de la réalité. Elles sont au contraire, évolutives et influencées par les contextes socio-économiques, culturels et techniques. La plupart des travaux en didactique des mathématiques se sont centrés sur les difficultés relevant de la transposition didactique alors que les obstacles épistémologiques ont fait l'objet de peu de travaux (Holdache et Houatis, 2018). L'étude épistémologique nous a permis de voir l'intégrale non comme un produit statique, mais comme un processus intellectuel dynamique. En effet, elle nous a permis de regarder les mathématiques comme une activité continue des êtres humains. Ici, nous rejoignons Fauvel et Maanen (2000) qui soulignent que la reconnaissance de cette activité est importante pour l'établissement des paramètres scientifiques pour la didactique. Sur ce sujet, Akrouti (2023b) souligne que :

> « Le développement d'une approche didactique cohérente ne devrait pas se limiter seulement à cette phénoménologie historique. Elle devrait être considérée dans un cadre qui pourrait rendre les idées qui ont, historiquement, donné lieu au concept mathématique correspondant, des idées familiales pour un sujet apprenant » (p. 140).

En conclusion, la variété des démarches promues par les programmes scolaires rend l'histoire des mathématiques et la méthodologie mathématique particulièrement pertinentes pour favoriser une compréhension plus profonde des concepts mathématiques.

REFERENCES

AKROUTI I. (2021a). *L'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université en Tunisie. Quelle approche ? Quelle alternative ?* Thèse de l'Université Virtuelle de Tunis.

AKROUTI, I. (2021b). Que représente le concept d'intégrale définie chez les étudiants à l'entrée à l'université ? ITM Web of Conferences 39, 01010 (2021), (p. 1 – 15). https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010

AKROUTI, I. (2022). La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1 (1), (p. 72 – 110). https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/55

AKROUTI, I. (2023a). Un outil méthodologique pour l'analyse du concept image d'un enseignant dans un cours d'analyse réelle. In Achour, S., Ben Nejma, S., Dhieb, M., Ghedamsi, I., Khalloufi, F., & Kouki, R. (Eds.). *Actes du 13ème Colloque de Didactique des Mathématiques (ATDM 2023)*, (p. 5 – 18). Editions ATDM. ISBN 978-9938-78-716-0.

AKROUTI, I. (2023b). *La modélisation mathématique d'un phénomène physique : une approche expérimentale possible pour l'enseignement de l'intégrale*. Les actes du troisième colloque scientifique de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains, Tunisie, (p. 140 – 149).

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2.3), (p.241-286).

BARBIN, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, Vol XXXVII, 1, (p. 20 – 25).

BLANCHÉ, R. (1972). *L'Épistémologie*. Paris, P.U.F. (Que sais-je ?), no 1475.

CZARNOCHA, B., DUBINSKY, E., LOCH, S., PRABHU, V., & VIDAKOVIC, D. (2001). Conceptions of area: In students and in history. *The College Mathematics Journal*, 32(2), 99-109. https://doi.org/10.2307/2687114

DORRIER, J.-L. et al. (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. *Recherches en didactique des mathématiques* Grenoble : La Pensée Sauvage, (p. 299 – 317).

DORRIER, J.-L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques-Perspectives théoriques sur leur interaction. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°12.

FAUVEL, J. et MAANEN, J. V. (2000). History in mathematics education: the ICMI study, Dordrecht: Kluwer, (p. 1-38).

FREYCINET, M. C. (1860). De l'analyse infinitésimale : Etude de la métaphysique du haut calcul, Paris.

HADDAD, S. (2012). *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien*. Thèse de l'Université Virtuelle de Tunis et Université Paris Diderot.

JONES, R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-8.

KELLER, O. (2006). La figure et le monde - Une archéologie de la géométrie. Vuibert, 978-2-7117-5371-0.

LEFEBVRE, J. (1996). Moments et aspects de l'histoire du calcul différentiel et intégral. Deuxième partie : Moyen Ageet dix-septième siècle. *Bulletin AMQ*, Vol. XXXVI, 11 (1), 1996, (p. 29 – 40).

LEFEBVRE, J. (1998). Moments et aspects de l'histoire du calcul différentiel et intégral. Cinquième partie : le dix-neuvième siècle et la notion de limite. *Bulletin AMQ*, Vol. XXXVIII, 11 (1), 1998, (p. 34 – 41).

LEGRAND, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(9), (p. 365-406).

MEREDITH, D. C. et MARRONGELLE, &K. A. (2008). How students use Mathematical Resources in an Electrostatic Context. *American Journal of Physics*, 76(5), (p.70-578).

MORENO-ARMELLA, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 46: (p. 621-633). DOI 10.1007/s11858-014-0580-4.

OLDACHE, M. et HOUATIS, D. (2018). Importance de l'épistémologie et l'histoire des sciences dans l'enseignement. *Didactiques*, 7(2) (p.59 – 78).

ROGALSKI, M., ROBERT, A. & PPOUVANNE, N. (2001), Carrefour entre Analyse - Algèbre - Géométrie, *Ellipse Editions*.

ROGALSKI, M. (2013). Sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure : faire simple et pédagogique ? *La Gazette des mathématiciens*, 132, (p.31 – 42).

ROSSE, A. (2007). Vers le calcul différentiel et intégral. *Bulletin AMQ*, Vol. XLVII, no 1, (p. 26-43).

SCHNEIDER-GILOT, M. (1988). *Des objets mentaux aire et volume au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

SEALY, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), (p.230 – 245).

SIMMONS, C. et OEHRTMAN, M. (2019). *Quantitatively Based Summation: A framework for student conception of definite integrals*. *T*he Conference on Calculus in Upper Secondary and Beginning University Mathematics, Matric and University of Agder, Kristiansand, Norway, (p.124 – 127).

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, (p.1 – 36).

TALL, D. (1992). *Students' Difficulties in Calculus.* Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Québec, August 1992.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

L'intégration d'un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines : pratiques déclarées d'enseignants de sciences et technologie

Abderrahmane Benrherbal[21]

Université Mohammed VI Polytechnique

Miranda Rioux

Université du Québec à Rimouski

Abdelkrim Al Marrakchi

Ministère de l'Éducation Nationale, du Préscolaire & des Sports

Résumé – Dans ce texte, nous décrivons les grandes lignes d'un projet s'intéressant à l'enseignement des STIM (Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques) dans les écoles marocaines. Bien que les STIM fassent désormais partie des curricula de l'école marocaine, à ce jour, on en connait très peu sur l'enseignement des STIM en contexte marocain et, de façon plus précise, sur les facteurs qui facilitent cet enseignement ou qui lui font obstacle. Afin d'explorer comment les enseignants intègrent un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines (pratiques déclarées), nous avons donc sollicité des enseignants de technologie ou de sciences œuvrant dans des collèges ou des lycées marocains et avons formé un échantillon de convenance constitué de 51 enseignants. Au printemps 2022, nous leur avons demandé de répondre à un questionnaire en ligne sur l'enseignement des STIM. Grâce au logiciel NVivo, nous avons ensuite effectué une analyse qualitative interprétative des données ainsi constituées. Si la majorité des répondants ont déclaré intégrer les STIM dans leur enseignement, nos résultats mettent toutefois en relief l'importance d'améliorer les conditions de travail des enseignants (ressources disponibles et nombre d'élèves par groupe), de favoriser une certaine coordination entre les disciplines et de leur offrir des opportunités de formation.

I. INTRODUCTION

L'enseignement des STIM (Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques) retient de plus en plus l'attention de la communauté internationale de recherche. Dans leur revue

---

[21] Benrherbal, A., Rioux, M. et Marrakchi, A. (2024). L'intégration d'un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines : pratiques déclarées d'enseignants de sciences et technologie. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – Affiche, pp. 70-77.

systématique des écrits publiés sur le sujet de 2011 à 2020, Irwanto et ses collaborateurs (2022) ont d'ailleurs noté que « […] le nombre de publications liées à l'éducation STIM semble progresser rapidement dans la dernière décennie, malgré une contribution inégale des pays autour du monde » (trad. libre de Irwanto et al., 2022, p. 29). En fait, ces auteurs ont dressé le palmarès des 15 pays ayant le plus publié sur le sujet et ils ont remarqué qu'aucun pays africain ne figurait dans cette liste. Si le Maroc ne fait pas exception, on peut toutefois observer certaines publications en lien avec l'enseignement des STIM dans ce pays (par exemple, Britel et Cherkaoui, 2021; Lechhab et al., 2023 ; Margoum et al., 2023; Benrherbal et Rioux, 2024). Nonobstant ces publications, et bien que les STIM fassent désormais partie des curricula de l'école marocaine, à ce jour**,** on en connait très peu sur l'enseignement des STIM en contexte marocain. Les enseignants marocains intègrent-ils les STIM dans leur enseignement ? Comment conçoivent-ils cet enseignement ? Quelles conditions facilitent ou font obstacle, selon eux, à l'enseignement des STIM au Maroc ? Ce sont les questions qui, de prime abord, se sont imposées à notre esprit.

Dans cet article, nous commençons par décrire la problématique à laquelle nous répondons, laquelle fait état d'une méconnaissance à l'égard des obstacles et des supports à l'intégration des STIM dans les écoles marocaines, tels qu'ils sont perçus par les enseignants. Nous présentons ensuite le cadre conceptuel dans lequel nous ancrons notre réflexion. Nous y précisons notamment ce que nous entendons par « une approche intégrée d'enseignement des STIM ». Par la suite, nous formulons nos objectifs de recherche et donnons quelques indications relatives à la méthodologie suivie, notamment en lien avec la constitution de notre échantillon, la collecte et l'analyse des données. Enfin, les résultats relatifs au troisième objectif sont présentés, puis discutés. Si la majorité des répondants ont déclaré intégrer les STIM dans leur enseignement, nos résultats mettent toutefois en relief l'importance d'améliorer les conditions de travail des enseignants (ressources disponibles et nombre d'élèves par groupe), de favoriser une certaine coordination entre les disciplines et de leur offrir des opportunités de formation. Nous terminons ce texte en précisant la portée et les limites de nos résultats.

II. PROBLÉMATIQUE

Britel et Cherkaoui (2021) se sont récemment demandé si le système éducatif marocain était prêt à intégrer les STIM et ont créé, pour explorer cette question, un focus groupe composé de directeurs d'établissement, de membres de l'administration, d'enseignants STIM, de parents et d'acteurs œuvrant dans des centres d'activités STIM pour enfants. Globalement, les dix experts interrogés considéraient que le Maroc était prêt et ont formulé les recommandations suivantes :

- L'engagement de toutes les parties prenantes concernées dans une communication efficace et une approche collaborative ;
- Le développement d'un programme pertinent basé sur les meilleures pratiques en STIM intégré et répondant aux besoins du marché du travail ;
- Fournir aux enseignants STIM le soutien, le développement professionnel, la formation et les ressources nécessaires ;
- Établir des partenariats et obtenir le soutien de l'industrie pour de meilleures opportunités d'apprentissage pour les étudiants (trad. libre de Britel et Cherkaoui, 2021, p. 6061).

Si ces recommandations nous semblent pertinentes, elles ne nous renseignent guère sur l'intégration d'une approche d'enseignement intégrée des STIM telle qu'elle est perçue par les enseignants marocains. Quels obstacles rencontrent-ils ? Quels sont les facteurs qui supportent cette intégration ? Les enseignants du Maroc sont-ils confrontés aux mêmes défis que les enseignants des autres pays ?

Margot et Kettler (2019) ont effectué une revue systématique des écrits concernant les perceptions des enseignants à l'égard de l'intégration des STIM. Ils ont retenu 29 articles scientifiques publiés entre 2000 et 2017. Ces chercheurs ont mis en relief des obstacles et des défis à l'intégration des STIM, de même que des supports à leur intégration. Le tableau 1 en offre un aperçu synoptique.

Obstacles et défis à l'intégration	Supports à l'intégration
- Défis pédagogiques	- Collaboration
- Défis curriculaires	- Curriculum
- Défis structurels	- Support des administrateurs
- Considérations liées aux élèves	- Expériences préalables des enseignants
- Temps, outils d'évaluation et connaissance des disciplines	- Opportunités de développement professionnel

Tableau 1 *– Obstacles, défis et supports à l'intégration des STIM identifiés par Margot et Kettler (2019)*

Les résultats obtenus par Margot et Kettler (2019) nous renseignent sur les perceptions des enseignants à l'égard de l'intégration des STIM, certes, mais nous ignorons, à l'heure actuelle, si les enseignants du Maroc ont les mêmes perceptions. À notre avis, il est impératif de questionner les enseignants pour en apprendre davantage sur l'intégration des STIM dans les écoles marocaines et éventuellement les soutenir dans leurs pratiques.

III. CADRE CONCEPTUEL

Si les STIM renvoient à un ensemble de disciplines, il ne suffit pas d'enseigner l'une de ces disciplines - par exemple, les mathématiques - pour adopter une approche intégrée d'enseignement des STIM. Or comme l'ont constaté Martín-Páez et ses collaborateurs (2019), il n'est pas facile de définir cette approche d'enseignement. En fait, dans leur revue de littérature, Martín-Páez et al. (2019) ont mis en lumière certaines inconsistances en lien avec la façon de définir cette approche. Cela dit, dans la majorité des études recensées, cette approche référait :

- à une expérience d'enseignement qui intègre les 4 disciplines (Sciences, Technologie, Ingénierie et Mathématiques) ;
- au sein de laquelle l'ingénierie joue un rôle clé ;
- et qui implique habituellement le recours à des contextes réels d'utilisation de la technologie (traduction libre de Martín-Páez et al., 2019, p. 815).

Dans le cadre de notre recherche, nous avons toutefois retenu la définition proposée par Kelley et Knowles (2016), qui associent cette approche à « […] une approche de l'enseignement du contenu STIM de deux ou plusieurs domaines STIM, liés par des pratiques STIM dans un contexte authentique, dans le but de relier ces sujets pour améliorer l'apprentissage des étudiants » (trad.

libre de Kelley et Knowles, 2016, p. 3). Ainsi, quand nous parlons d'un « enseignement fondé sur les STIM », c'est à une approche d'enseignement interdisciplinaire intégrant du contenu d'au moins deux disciplines STIM que nous référons.

IV. OBJECTIFS

Afin d'en apprendre davantage sur l'intégration d'un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines, nous avions formulé trois objectifs de recherche :

1. Explorer comment les enseignants des écoles marocaines conçoivent un enseignement fondé sur les STIM.

2. Identifier, selon les enseignants, les ressources requises pour intégrer un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines.

3. Explorer comment les enseignants intègrent un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines (pratiques déclarées).

Dans ce texte, nous rapportons les résultats relatifs au troisième objectif.

V. MÉTHODOLOGIE

Dans cette section seront présentés quelques éléments liés à la méthodologie suivie pour constituer notre échantillon, pour collecter les données et en effectuer l'analyse.

1. Échantillon

Puisque nous cherchions à en apprendre davantage sur l'intégration d'un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines, et considérant que nous cherchions à obtenir le point de vue des enseignants, nous avons formé un échantillon de convenance constitué de 51 enseignants de technologie ou de sciences œuvrant dans des collèges ou des lycées de différentes régions du Maroc. Ces enseignants ont accepté librement de répondre à un questionnaire en ligne sur l'enseignement des STIM au printemps 2022.

2. Collecte des données

Tel que nous venons de le mentionner, au printemps 2022, nous avons invité les sujets de notre étude à répondre à un questionnaire en ligne sur l'enseignement des STIM. Ce questionnaire comportait 12 questions, dont cinq ont été posées spécifiquement pour explorer comment les enseignants intègrent un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines (notre 3^{e} objectif). Elles se formulent comme suit :

- est-ce que vous intégrez ce type d'enseignement dans votre milieu de pratique ?
- comment intégrez-vous les STIM dans votre enseignement ?
- à quelle fréquence utilisez-vous ce type d'enseignement ?
- selon vous, qu'est-ce qui fait obstacle à l'intégration d'un enseignement basé sur les STIM dans votre milieu de pratique ?
- selon vous, qu'est-ce qui faciliterait l'enseignement des STIM dans votre milieu de pratique ?

Ces questions nous ont notamment permis d'accéder aux pratiques déclarées d'enseignement des STIM et aux perceptions des enseignants à l'égard de l'intégration des STIM dans leurs milieux de pratique.

3. Analyse des données

Nous avons effectué une analyse qualitative interprétative des données constituées. Nous avons amorcé le processus d'analyse des données en important les données brutes dans le logiciel d'analyse qualitative Nvivo. Nous avons ensuite créé un cas pour chaque répondant (51 cas en tout). Après avoir codifié les réponses de chaque cas en fonction de la question posée, nous avons analysé les réponses formulées question par question, et ce, afin d'identifier les thèmes émergents. Lorsqu'opportun, nous avons également relevé la fréquence de chaque thème.

VI. RÉSULTATS

Nous présentons ici les résultats obtenus en lien avec notre troisième objectif de recherche, lequel s'énonce comme suit : explorer comment les enseignants intègrent un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines (pratiques déclarées).

Dans un premier temps, l'analyse des réponses apportées à la première question a permis de constater que la majorité des enseignants questionnés (28/51) déclarent intégrer les STIM dans leur enseignement.

Dans un deuxième temps, l'analyse des réponses apportées à la deuxième question (Comment intégrez-vous les STIM dans votre enseignement ?) a permis de mettre en relief les buts, le cadre et les moyens déployés pour effectuer cette intégration. Par ordre décroissant de fréquence, les enseignants questionnés ont affirmé que le but de cette intégration était d'étudier ou de concevoir un système technique (10 mentions), dans le cadre de projets (6 mentions), et ce, en utilisant comme moyen la robotique (5 mentions).

Dans un troisième temps, nous devons signaler que l'analyse des réponses apportées à la troisième question ne nous a malheureusement pas permis de caractériser la fréquence de cette intégration. La formulation de cette question y est probablement pour quelque chose et serait à revoir.

Dans un quatrième temps, l'analyse des réponses apportées à la question 4 a permis de caractériser les éléments faisant obstacle à l'intégration d'un enseignement basé sur les STIM dans le milieu de pratique des répondants. La figure 1 offre un aperçu de obstacles.

Obstacles liés aux conditions de travail

- Manque de ressources
- Nombre d'élèves par classe

Obstacles liés aux disciplines STIM

- Cloisonnement disciplinaire
- Évaluation des apprentissages par des examens

Obstacles liés aux élèves

- Langue
- Parents
- Niveau des élèves

Obstacles liés aux enseignants

- Manque d'expertise ou de formation

Figure 1*- Obstacles identifiés par les répondants*

Par ordre décroissant de fréquence, les principaux obstacles identifiés sont le manque de ressources (13 mentions), le niveau des élèves (12 mentions), le nombre d'élèves par classe (10 mentions) ainsi que le cloisonnement disciplinaire (9 mentions).

Enfin, dans un cinquième et dernier temps, l'analyse des réponses apportées à la cinquième question a permis de caractériser les éléments qui faciliteraient l'enseignement des STIM dans le milieu de pratique des répondants. La figure 2 offre un aperçu des leviers identifiés.

Leviers liés aux conditions de travail

- Améliorer les conditions de travail
- Disponibilité des ressources
- Enseigner à des groupes
- Limiter le nombre d'élèves par groupe

Leviers liés aux disciplines STIM

- Changer le programme
- Coordination entre les disciplines

Leviers liés aux élèves

- Augmenter les compétences langagières des élèves
- Le niveau scolaire des élèves

Leviers liés aux enseignants

- Entraide chez les enseignants de technologie
- Former les enseignants

Figure 2 *– Leviers identifiés par les répondants*

Par ordre décroissant de fréquence, les principaux leviers identifiés sont la disponibilité des ressources (12 mentions), limiter le nombre d'élèves par groupe (7 mentions), former les enseignants (6 mentions) et assurer une coordination entre les disciplines (5 mentions).

VII. DISCUSSION

Les obstacles et les leviers identifiés le plus fréquemment par les répondants sont similaires à ceux recensés par Margot et Kettler (2019) dans leur revue systématique des écrits. Les perceptions des enseignants marocains en ce qui a trait à l'intégration des STIM dans leurs milieux de pratique ne seraient pas tant différentes des perceptions nourries par les enseignants des autres pays. Par ailleurs, comme on pouvait s'y attendre, nos résultats indiquent qu'il y a une certaine correspondance entre les obstacles et les leviers identifiés le plus fréquemment. En effet, le manque de ressources, le nombre d'élèves par classe ainsi que le cloisonnement disciplinaire sont des obstacles qui peuvent être associés aux leviers consistant à accroître la disponibilité des ressources, à limiter le nombre d'élèves par classe et à assurer une coordination entre les disciplines. Aussi, quand on demande aux participants comment ils intègrent les STIM dans leur enseignement, on remarque qu'ils ont tendance à intégrer les STIM pour étudier ou concevoir un système technique. Il s'agit là d'une des pratiques du modèle de Kelley et Knowles (2016). Il est aussi possible de noter que les enseignants recourent fréquemment à des contextes réels d'utilisation de la technologie comme la robotique, contexte qui renvoie à l'un des aspects de la définition de Martín-Páez et ses collaborateurs (2019).

VIII. CONCLUSION

Dans ce texte, nous rapportions les grandes lignes d'un projet de recherche exploratoire s'intéressant à l'enseignement des STIM (Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques) dans les écoles marocaines. Si ce projet a contribué à l'avancée des connaissances sur le sujet, il faut néanmoins garder à l'esprit que notre échantillon est trop petit pour que nous puissions généraliser nos résultats, ce qui soulève la question de la représentativité de l'échantillon. De plus, de par le choix de nos outils de collecte de données, nous avons limité notre exploration aux pratiques déclarées par les participants. Il peut donc y avoir une différence entre les perceptions et les déclarations des répondants et les observations qui peuvent être réalisées sur le terrain. Néanmoins, nous en connaissons maintenant davantage sur l'enseignement des STIM dans les écoles marocaines, tel qu'il est perçu par les enseignants. Pour que les enseignants intègrent un enseignement fondé sur les STIM dans les écoles marocaines, nous reconnaissons l'importance d'améliorer leurs conditions de travail, et ce, notamment en accroissant les ressources disponibles et en limitant le nombre d'élèves par groupe. Nos résultats mettent également en relief la nécessité de favoriser une certaine coordination entre les disciplines et d'offrir, aux enseignants, des opportunités de formation sur le sujet. Ces recommandations rejoignent celles qui ont été émises par Britel et Cherkaoui (2021), qui prônaient notamment l'adoption d'approche collaborative et qui soulignaient, rappelons-le, la nécessité de « Fournir aux enseignants STIM le soutien, le développement professionnel, la formation et les ressources nécessaires » (trad. libre de Britel et Cherkaoui, 2021, p. 6061). Nous espérons que cette recherche sera le premier pas vers l'élaboration de formations STIM destinées aux enseignants du royaume et adaptées aux spécificités du contexte éducatif marocain.

RÉFÉRENCES

BENRHERBAL, A. et RIOUX, M. (2024). Analysis of Declared Pedagogical Practices in STEM Education in Morocco. *The Journal of Quality in Education*, *14*(23), 16-28.

BRITEL, Z. et CHERKAOUI, A. (2021). Evaluation of the readiness for integrated "science, technology, engineering, and mathematics" education in Morocco. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, *99*(24).

IRWANTO, I., SAPUTRO, A. D., WIDIYANTI, W., RAMADHAN, M. F. et LUKMAN, I. R. (2022). Research trends in STEM education from 2011 to 2020: A systematic review of publications in selected journals. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, *16*(5), 19-32.

KELLEY, T.R. et KNOWLES, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. International Journal of STEM Education, 3 (11).

LECHHAB, A., BENQASSOU, I., EL-HARS, F., CHEKOUR, M. et HAFID, M. M. (2023). Teacher's Perceptions of STEM Education at the Primary Level in Morocco. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, *17*(14).

MARGOT, K.C. et KETTLER, T. (2019) Teachers' perception of STEM integration and education: a systematic literature review. IJ STEM Ed6, 2 (2019). https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2.

MARGOUM, S., DAADAOUI, L. et BERRADA, K. (2023). Laboratory-Based STEM Education: Micro-computer Based Laboratories and Virtual Laboratories. Dans *Erasmus Scientific Days 2022 (ESD 2022)* (pp. 197-209). Atlantis Press.

MARTIN-PAEZ, T., AGUILERA, D., PERALES-PALACIOS, F. J. et VILCHEZ-GONZALEZ, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education ? A review of literature. Science Education, 103(4), p. 799-822.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

Mathématiques Instrumentées : Réinventer les pratiques d'enseignement à l'ère numérique au Maroc.

Tariq Bouzid[22]

Ecole Supérieure de l'Éducation et de la Formation, Université Ibn Tofaïl – Kénitra

Résumé – Cette contribution explore comment les technologies numériques peuvent transformer l'enseignement des mathématiques et les pratiques des enseignants, en se focalisant sur le contexte marocain, un pays africain en pleine évolution technologique et engagé dans une transition numérique ambitieuse. L'article dégage certains avantages de ces technologies, tels que la personnalisation de l'apprentissage, l'amélioration des interactions en classe et la visualisation des concepts mathématiques abstraits, à travers des exemples concrets d'enseignants utilisant des logiciels éducatifs, des plateformes web et des jeux pédagogiques. En s'appuyant sur la théorie instrumentale, cette étude examine l'efficacité des outils technologiques dans les pratiques professionnelles et pédagogiques des enseignants ayant vécu les premières vagues de transition numérique. Des recommandations pratiques sont proposées pour aider les enseignants à exploiter ces technologies de manière optimale, en maximisant leurs bénéfices tout en respectant les objectifs pédagogiques fondamentaux.

I. INTRODUCTION

Depuis les années 2000, les technologies numériques (ou Technologies d'information et de communication) ont remodelé la culture numérique marocaine, transformant les apprentissages au-delà des méthodes traditionnelles « tableau-papier-stylo ». Cette évolution a profondément influencé la jeunesse marocaine, qui s'engage de plus en plus avec les technologies numériques, comme en témoignent les études sur l'augmentation de l'utilisation d'Internet et de l'accès aux ordinateurs (Hamdy, 2007 ; Taam et al., 2024). Cependant, un écart notable persiste entre ces expériences d'apprentissage distinguées, axées sur la technologie, et les pratiques éducatives formelles, en particulier dans les régions rurales du Maroc (Nejjari et Bakkali, 2017).

Dans l'enseignement des mathématiques, les outils conventionnels comme les compas, les règles et les tableaux noirs dominent encore, surtout dans des contextes en développement comme le Maroc. Cette persistance s'explique souvent par des barrières logistiques et un scepticisme quant aux avantages éducatifs des technologies numériques (Taam et al., 2007). Malgré ces défis, l'essor mondial des technologies, des premiers logiciels didactiques aux technologies avancées - aujourd'hui - basées sur l'intelligence artificielle (IA), continue de remettre en question les méthodes pédagogiques traditionnelles. Les innovations numériques, telles que les plateformes d'e-learning, les tableaux blancs interactifs et les applications mobiles, sont devenues incontournables

[22] Tariq, B. (2024). Mathématiques Instrumentées : Réinventer les pratiques d'enseignement à l'ère numérique au Maroc. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – Affiche, pp. 78-86.

dans l'éducation moderne. Pourtant, leur impact sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au Maroc reste inégal (Berrado et al., 2009).

Le ministère marocain de l'Éducation nationale a lancé, dès 2005, une stratégie pour généraliser les technologies numériques dans l'enseignement public, notamment à travers le programme GENIE (Nejjari et Bakkali, 2017). La pandémie de COVID-19 a accéléré cette transition numérique, révélant à la fois les potentialités et les limites de l'enseignement à distance. Cependant, malgré les avancées technologiques, l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques reste un défi, nécessitant une réflexion approfondie sur les pratiques pédagogiques et les cadres théoriques qui les sous-tendent.

II. PROBLÉMATIQUE

L'enseignement des mathématiques à l'ère numérique se heurte à plusieurs défis. D'une part, les outils traditionnels ne répondent plus pleinement aux besoins des apprenants immergés dans un environnement numérique en évolution constante. D'autre part, l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement reste souvent superficielle, faute d'un cadre théorique solide pour guider les pratiques pédagogiques. Enfin, les enseignants manquent souvent de formation continue pour suivre l'évolution accélérée des technologies numériques, ce qui limite leur capacité à exploiter pleinement le potentiel technique ou pédagogique de ces outils.

Au Maroc, malgré les efforts déployés dans le cadre du programme GENIE, l'utilisation des technologies numériques en classe de mathématiques reste limitée. Les enseignants se retrouvent souvent confrontés à des outils qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment, ce qui limite leur capacité à les intégrer de manière efficace dans leur enseignement. Cette situation soulève des questions cruciales : Comment les enseignants s'approprient-ils les outils numériques ? Quels sont les impacts de ces outils sur les apprentissages des élèves ? Et comment peut-on former les enseignants à une intégration réussie des technologies numériques dans leur pratique ?

III. CADRE THÉORIQUE

L'intégration des technologies informatiques dans l'enseignement des mathématiques s'appuie sur plusieurs cadres théoriques qui explorent l'interaction entre la technologie, la pédagogie et le développement cognitif. L'un des concepts centraux de cette étude est celui de genèse instrumentale, un processus par lequel les outils numériques sont appropriés par les individus (enseignants et/ou élèves), se transformant en instruments significatifs pour l'apprentissage et l'enseignement (Trouche, 2004 ; Artigue, 2002).

Le concept de genèse instrumentale (Rabardel, 2002) s'inspire de l'ergonomie cognitive et des théories de l'activité (Rabardel, 2003). Il postule que les individus, engagés dans des activités orientées vers un objectif, interagissent avec des artefacts (comme les outils numériques) et les transforment en instruments qui médiatisent l'activité (comme l'apprentissage). Cette transformation s'opère à travers deux processus :

- L'instrumentalisation : Le développement de schèmes dirigés vers l'artefact.
- L'instrumentation : Le développement de schèmes d'action visant à accomplir des tâches spécifiques.

Ces processus sont essentiels pour comprendre comment les technologies numériques médiatisent l'apprentissage des mathématiques. Ils mettent en évidence les interactions dynamiques entre l’outil et l’utilisateur : l’outil influence l’utilisateur (instrumentation), et l’utilisateur adapte et personnalise l’outil (instrumentalisation). Ainsi, les enseignants et les élèves ne se contentent pas d’utiliser ces technologies ; pour enseigner ou apprendre, ils faut qu’ils les transforment activement en instruments qui soutiennent leurs activités.

IV. CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Cette étude repose sur une approche qualitative, centrée sur l’analyse des pratiques enseignantes dans le contexte marocain. Les données ont été collectées à travers :

- Des entretiens ouverts avec 20 enseignants de mathématiques précurseur dans l’intégration de la technologie éducative au Maroc, sélectionnés pour leur expérience, et leur disponibilité.
- L’analyse de documents (plans de cours, supports pédagogiques, ressources numériques) produits ou utilisé par les enseignants.

Le choix de ces méthodes permet de capturer la complexité des pratiques enseignantes et d’explorer en profondeur les processus d’appropriation des outils numériques.

Les données ont été analysées à l’aide d’une analyse thématique, visant à identifier les patterns récurrents dans les pratiques enseignantes. Cette analyse s’appuie notre cadre théorique, en particulier la genèse instrumentale. Les processus théoriques clés qui ont guidé l’analyse sont :

- Genèse instrumentale : Nous avons cherché des indices sur comment les enseignants passent par des phases d’appropriation des outils.
- L’instrumentalisation : Comment les enseignants adaptent les outils numériques à leurs besoins pédagogiques (par exemple, en personnalisant des logiciels comme GeoGebra).
- L’instrumentation : Comment les outils numériques influencent les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves (par exemple, en facilitant la visualisation de concepts abstraits ou la résolution d’un problème).

Cette approche permet de comprendre comment les enseignants intègrent les technologies numériques dans leur enseignement et comment ces outils transforment leurs pratiques pédagogiques.

V. RÉSULTATS

1. Appropriation des outils numériques.

Les enseignants marocains ont démontré une forte capacité à s’approprier les outils numériques et à les adapter à leurs besoins pédagogiques. Par exemple, Mohammed Dahhak, enseignant du secondaire collégial, a été un pionnier dans l’utilisation des plateformes web dès l’an 2000. Il explique :

« J’ai voulu en faire un espace de travail ouvert pour mes élèves. J’ai donc eu l’idée de ne lister sur le blog que les sujets sur lesquels je voulais que mes élèves travaillent. Je n’ai donc, en premier lieu, qu’écrit les titres et j’ai demandé à tous mes élèves d’effectuer des recherches sur ces sujets puis de me les communiquer via le skyblog pour les valider. En seulement une semaine, le blog a enregistré : plus de 90 visites, plus de 44 articles déposés par les élèves, plus de 60 élèves ont fait des recherches, soit sur Internet dans la salle multimédia, soit en bibliothèque. »

Aujourd’hui, cette approche s’est modernisée avec des plateformes comme WhatsApp, MS Teams, Moodle et Google Classroom, qui ont pris une importance particulière pendant la pandémie de COVID-19.

Un autre exemple est celui de Malika M., une enseignante du secondaire collégiale qui s’est intéressée aux tablettes numériques dès leur apparition pour enseigner les mathématiques au secondaire en 2012 :

« Au début, j’étais fascinée par cette nouvelle invention qu’était la tablette numérique. Ensuite, j’ai rapidement réalisé qu’elle pouvait bouleverser mon mode d’enseignement et d’apprentissage. Malgré leur coût élevé, j’ai acheté quelques tablettes pour mes élèves en classe, ce qui leur a permis de manipuler des objets mathématiques de manière interactive. Par exemple, ils peuvent déplacer des formes géométriques pour comprendre les propriétés des angles ou des symétries. Cela m’a offert des possibilités qui étaient impossibles à réaliser avec le tableau (traditionnel), rendant ainsi l’apprentissage plus engageant et inclusif. Beaucoup d’élèves passifs sont devenus actifs pendant les séances de mathématiques. »

2. Transformation des pratiques pédagogiques.

L’intégration des outils numériques a transformé les pratiques pédagogiques traditionnelles. El Ghazi Bouzid, enseignant du collège, a adopté en 2009 des didacticiels de présentation géométrique et des présentateurs pour créer des mini laboratoires multimédias dynamiques :

« J’ai compris que les technologies de l’information et de la communication pouvaient m’être d’une grande utilité pour les mathématiques, notamment pour dessiner des figures parfaites en un temps record. Je préparé beaucoup de mes cours que je projette à mes élèves en classe sur PowerPoint. C’est très efficace pour des leçons sur la géométrie dans l’espace par exemple. L’effet sur les élèves est sans commune mesure : l’image et le son attirent leur attention et certains d’entre eux s’essaient à produire eux-mêmes des figures mathématiques dans le laboratoire multimédia. »

Les enseignants passent par différentes phases d’appropriation des outils numériques, allant de la découverte à la maîtrise. Ces phases sont influencées par des facteurs tels que l’accessibilité de l’outil, la formation, le soutien institutionnel et les interactions avec les pairs. Par exemple, Abdelhadi E., enseignant du secondaire qualifiant, a commencé à utiliser GeoGebra en 2011. Il explique :

« Au début, j’étais réticent à utiliser GeoGebra, mais après une formation en ligne, j’ai progressivement réalisé son potentiel. Aujourd’hui, je l’utilise régulièrement dans mes cours, que ce soit en géométrie, en analyse ou en statistique, pour créer des simulations interactives et des visualisations qui rendent les concepts mathématiques plus abordables pour les élèves. »

En tant qu’ancien enseignant de mathématiques au cycle secondaire qualifiant, je confirme avoir personnellement exploré et utilisé GeoGebra depuis 2012 :

« Contrairement à d’autres logiciels similaires tels que Mathlab et Mathematica, GeoGebra est gratuit, open-source, facile à manipuler et à utiliser pour les élèves. Il m’a été d’une grande utilité pour présenter de nouvelles notions et créer des simulations interactives et dynamiques, renforçant ainsi la compréhension des concepts mathématiques. J’ai notamment utilisé GeoGebra pour diverses études analytiques et géométriques, facilitant la visualisation de concepts souvent abstraits pour les élèves. Les nombreuses fonctionnalités de GeoGebra, telles que la détermination géométrique des solutions d’équations et l’interprétation géométrique du nombre dérivé (voir les figures 1 et 2 ci-dessous), ont enrichi mes pratiques d'enseignement et ont encouragé l'autonomie des élèves. »

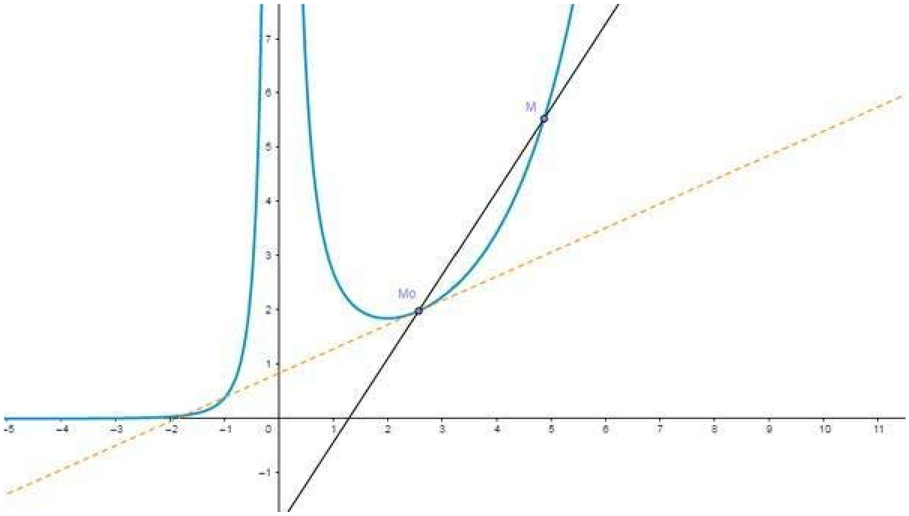


Figure 1 *– Interprétation géométrique du nombre dérivé en un point.*

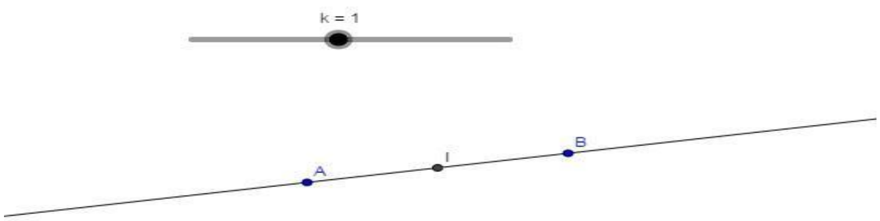


Figure 2 *– Ensemble des points du plan vérifiant l'équation MA= kMB (k est un réel)*

Très récemment, l'utilisation de l'intelligence artificielle (IA) a commencé à émerger dans l'éducation. Par exemple, Fatima A., enseignante du secondaire collégial, illustre comment l'IA a aidé en 2023 à personnaliser les apprentissages :

> ChatGPT m'a accompagnée dans la planification de mes cours. Il m'a aidée à créer des parcours d'apprentissage adaptés et à mieux préparer mes situations d'apprentissage avant d'aller en classe. Les élèves reçoivent des exercices qui correspondent à leur niveau, ce qui les motive à progresser à leur rythme. Cela a complètement changé la manière dont je peux accompagner chaque élève.

3. Impact sur les apprentissages.

Mme D., enseignante du cycle primaire, en 2017 a essayé une pédagogie basée sur le jeu numérique, elle souligne le rôle des jeux éducatifs dans l'engagement des élèves et leur compréhension des concepts abstraits :

> Contrairement aux outils traditionnels, le jeu motive beaucoup les élèves à l'apprentissage des mathématiques. Il met à leur disposition un espace d'expérimentation mathématique, dans lequel ils sont invités à exercer leurs capacités à réfléchir. Il encourage également la communication et la collaboration entre élèves, tout en créant une atmosphère de compétition positive.

4. Défis.

Malgré les avantages, l'intégration des technologies numériques présente des défis. Les enseignants manquent souvent de formation continue pour suivre l'évolution rapide des outils. Par exemple, plusieurs enseignants soulignent que les technologies évoluent tellement vite qu'il est difficile pour eux de rester à jour. Et qu'une formation régulière serait essentielle pour leurs aider à exploiter pleinement ces outils en constante évolution.

VI. ANALYSE.

L'analyse des données révèle plusieurs tendances clés :

1. Appropriation des outils numériques

Les enseignants qui réussissent à intégrer les technologies numériques dans leur enseignement démontrent une forte capacité à s'approprier les outils et à les adapter à leurs besoins pédagogiques. Cette appropriation est une manifestation d'une genèse instrumentale réussie, où les outils numériques deviennent des instruments pédagogiques à part entière. Par exemple, l'utilisation de GeoGebra ou de tablettes numériques montre comment les enseignants passent par des phases d'appropriation, allant de la découverte à l'accommodation. Ces phases sont influencées par des facteurs tels que : L'accessibilité de l'outil (dans l'établissement scolaire ou ailleurs), la formation (initiale ou continue), le soutien institutionnel (l'appui de la direction et des programmes nationaux comme GENIE). Une genèse instrumentale réussie se manifeste également dans les documents produits par ces enseignants. Par exemple, la qualité de leurs productions pédagogiques, telles que les supports de cours soigneusement rédigés à l'aide de logiciels de traitement de texte et enrichis d'images, témoigne de leur maîtrise des outils numériques. De même, l'utilisation efficace de tableurs (comme Excel) pour organiser les données ou créer des graphiques illustre leur capacité à intégrer ces technologies dans leurs pratiques. Fait notable, alors que certains documents pourraient être rédigés manuellement, ces enseignants choisissent volontairement d'utiliser des logiciels de traitement de texte. Ils justifient ce choix par des avantages pratiques, comme l'explique l'un d'eux : « C'est beaucoup plus pratique, je peux modifier le document en un temps record. » Cette adoption volontaire et réfléchie des outils numériques illustre bien une genèse instrumentale réussie.

2. Transformation des pratiques pédagogiques

Les outils numériques transforment les méthodes d'enseignement, rendant les cours plus interactifs et adaptés aux besoins des élèves. Les résultats montrent que les technologies ne sont pas simplement des supports techniques, mais des instruments qui redéfinissent les pratiques pédagogiques et les processus d'apprentissage. Par exemple, l'utilisation de GeoGebra pour visualiser géométriquement les solutions d'une équation, PowerPoint pour la géométrie dans l'espace ou de jeux éducatifs pour l'apprentissage collaboratif illustre comment les enseignants intègrent ces outils dans leurs cours. Ce processus d'instrumentation montre comment les outils influencent les pratiques enseignantes.

3. Impacts sur les apprentissages

Les technologies numériques favorisent l'engagement des élèves et leur compréhension des concepts abstraits. Cependant, leur efficacité dépend de la manière dont elles sont intégrées, c'est-à-dire de la façon dont l'enseignant implémente et adapte la technologie à ses fins (instrumentalisation). Par exemple, les simulations interactives créées avec GeoGebra permettent aux élèves de visualiser des concepts complexes, comme les dérivées ou les transformations géométriques, rendant ainsi l'apprentissage plus concret et accessible, qui peut notamment aider à surmonter des difficultés d'ordre didactique ou épistémologique. De même, les jeux éducatifs et les tablettes numériques encouragent une participation active des élèves, y compris ceux qui étaient auparavant passifs.

4. Défis et opportunités

Malgré les progrès, des défis persistent, notamment : Le manque de formation continue ; les enseignants soulignent la difficulté de suivre l'évolution rapide des technologies sans un accompagnement régulier. Les ressources limitées ; le coût élevé des outils numériques et l'accès inégal aux technologies dans les régions éloignées restent des obstacles majeurs malgré les efforts déployés par le ministère de l'éducation nationale. Finalement, la résistance au changement ; certains enseignants restent réticents à adopter de nouvelles méthodes, par manque de confiance ou de compétences.

VII. DISCUSSION

Les résultats de cette étude rejoignent ceux d'autres recherches sur l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques. Par exemple, les travaux de Drijvers (2015) montrent que les outils numériques, lorsqu'ils sont bien intégrés, peuvent transformer les pratiques pédagogiques et améliorer les apprentissages des élèves en mathématiques. Cependant, notre étude met en lumière des défis spécifiques au contexte marocain, tels que le manque de formation continue et l'accès inégal aux ressources technologiques (Nejjari et Bakkali, 2017). Ces défis sont également soulignés par Selwyn (2011), qui note que l'intégration des technologies dans les pays en développement est souvent entravée par des obstacles structurels et institutionnels.

De plus, l'évolution rapide des technologies éducatives, des ordinateurs de bureau aux ordinateurs portables, tablettes et smartphones, des projecteurs aux tableaux blancs interactifs, et aujourd'hui aux imprimantes 3D, à la réalité augmentée et à l'intelligence artificielle (IA), ouvre de nouvelles perspectives pour la personnalisation des apprentissages. Par exemple, l'émergence de l'IA dans l'éducation, illustrée par l'utilisation de ChatGPT, permet de créer des parcours d'apprentissage adaptés aux besoins individuels des élèves en mathématiques. Ces résultats s'alignent avec les plusieurs résultats sur les potentialité éducatives de l'AI pour l'enseignement des mathématique (Zawacki-Richter et al., 2019 ;Holmes et al., 2019 ; Supriyadi et Kuncoro, 2023).

Les résultats de cette étude soulignent la nécessité d'une formation continue pour les enseignants, afin de les accompagner dans l'appropriation des outils numériques. Par exemple, des modules de formation pourraient être développés pour aider les enseignants à se familiariser et à maîtriser les nouveaux outils informatiques, tout en découvrant leurs vertus pédagogiques. Ces formations devraient également aborder les aspects pédagogiques de l'intégration des technologies, en mettant l'accent sur les facteurs de la genèse instrumentale et ses processus. Comme le souligne

Trouche (2004), la formation des enseignants doit inclure une réflexion sur la manière dont les outils numériques peuvent être transformés en instruments pédagogiques efficaces. De plus, les résultats montrent que les enseignants qui bénéficient d'un soutien institutionnel sont plus susceptibles de réussir l'intégration des technologies numériques. Cela suggère que les politiques éducatives devraient inclure des mesures pour renforcer les infrastructures technologiques, fournir un accompagnement régulier aux enseignants et encourager une culture numérique adaptée à l'enseignement des mathématiques. Tels facteurs peuvent jouer un rôle crucial dans la réussite de l'intégration des technologies informatiques au Maroc (Ertmer et Ottenbreit-Leftwich, 2013).

Néanmoins, cette étude présente certaines limites. Par exemple, les données sont basées sur des pratiques déclarées par les enseignants, ce qui peut introduire un biais de désirabilité. De plus, l'échantillon est limité à des enseignants précurseurs dans l'intégration de certains outils informatiques, ce qui ne reflète pas nécessairement la réalité de tous les enseignants marocains. Pour les recherches futures, il serait intéressant d'explorer :

- L'impact des technologies numériques sur les performances scolaires des élèves, à travers des études longitudinales.
- Le rôle des communautés de pratique pour soutenir l'appropriation des outils numériques par les enseignants et les élèves au Maroc.
- Les défis et opportunités liés à l'utilisation des technologies émergentes, comme l'intelligence artificielle, dans l'enseignement des mathématiques.

VIII. CONCLUSION

Cette étude a exploré comment les technologies numériques transforment l'enseignement des mathématiques au Maroc, en mettant l'accent sur les pratiques des enseignants et les pas d'appropriation du numérique. Les résultats montrent que les enseignants qui réussissent à intégrer ces technologies passent par des phases de genèse instrumentale, adaptant les outils à leurs besoins pédagogiques (instrumentalisation) et les utilisant pour enrichir leurs pratiques (instrumentation). Ces transformations favorisent l'engagement et la compréhension des élèves, mais elles soulèvent également des défis, notamment le manque de formation continue et de ressources adaptées. Pour maximiser le potentiel des technologies numériques, il est essentiel de renforcer la formation des enseignants, d'améliorer les infrastructures technologiques et d'encourager les échanges entre pairs. Les perspectives pourraient explorer l'impact de l'intelligence artificielle et des communautés de pratique pour soutenir cette transition numérique, tout en préservant les objectifs pédagogiques fondamentaux.

REFERENCES

ARTIGUE, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

BERRADO, A., DARHMAOUI, H., El ASLI, A., LEGROURI, A., LOUDIYI, K., MESSAOUDI, F., & SMITH, K. (2009). Measuring the impact of introducing ICT into the instruction of mathematics, physics, and earth and life sciences. *In* the three middle school levels in Morocco, ICERI2009 proceedings (p. 2526–2531).

DRIJVERS, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). *In* Cho, S. (éds) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (p.135-151). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

ERTMER, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. T. (2013). Removing obstacles to the pedagogical changes required by Jonassen's vision of authentic technology-enabled learning. Computers & Education, 64, 175-182. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.008

HAMDY, A. (2007). ICT in education in Morocco. https://worlddidac.org/wp-content/uploads/2017/10/MRL-463750BRI0Box31co010ICTed0Survey111.pdf

HOLMES, W., BIALIK, M., & FADEL, C. (2019). Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning. Center for Curriculum Redesign.

NEJJARI, A. & BAKKALI, I. (2017). L'usage des TIC à l'école marocaine: État des lieux et perspectives. Hermès, 78(2), 55. https://doi.org/10.3917/herm.078.0055

RABARDEL, P. (2002). *People and technology.* Université paris 8 (p.188). hal-01020705

RABARDEL, P. (2003). From artefact to instrument. Interacting with Computers, 15(5), 641-645. https://doi.org/10.1016/S0953-5438(03)00056-0

SELWYN, N. (2011). Education and Technology: Key Issues and Debates. Bloomsbury Publishing.

SUPRIYADI, E., & KUNCORO, K. S. (2023). Exploring the future of mathematics teaching: Insight with ChatGPT. Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, 11(2), 305-316. https://doi.org/10.30738/union.v11i2.14898

TAAM, A., AMAR, A., HMEDNA, B., BENABBES, K., DAOUDI, R., & El MAKRANI, A. (2024). Exploration of the relationships between information and communication technology (ICT) and the education system in Morocco. Scientific African, e02447. https://doi.org/10.1016/j.sciaf.2024.e02447

TROUCHE, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?. Educational Studies in Mathematics, 55, 181–197. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017674.82796.62

ZAWACKI-RICHTER, O., MARÍN, V. I., BOND, M. et Gouverneur F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – where are the educators? International Journal of Educational Technology in Higher Education, 16(39). https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Analyse du rapport institutionnel des élèves à l'activité de modélisation dans le manuel de la 6ème année primaire au Maroc

Brahim Ennassiri[23]

Université Cadi Ayyad, ENS de Marrakech, Maroc

Said Abouhanifa

Centre Régional des Métiers de l'Enseignement et de la Formation. Settat, Maroc

Elmostapha Alkhouzai

Université Hassan premier, Settat, Maroc

Résumé - Cette étude s'inscrit dans le cadre du projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD), intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». Elle vient à la suite des recherches que nous menons pour identifier les savoirs à enseigner relativement à la pensée algébrique au Maroc, dans la transition primaire-collège. A la lumière des résultats de ce projet, cette recherche vise à décrire le rapport institutionnel des élèves à la modélisation en tant que composante du développement de la pensée algébrique (PA)dans le curriculum de la dernière année du primaire. Notre objectif est d'analyser le potentiel algébrique de certaines activités du manuel scolaire officiel Marocain « Al-Jayid Fi Ryadiat » à favoriser l'entrée dans la pensée algébrique. Notre modèle de référence est inspiré du MERPA (Jeanotte, squalli,et al 2019, Squalli, Jeannotte et al 2020, 2024, Najar et al 2021) et du travail de recherche conduit par Ennassiri et al (Ennassiri et al, 2023). Notre corpus est basé sur les nouveaux programmes du primaire marocain, le manuel scolaire « Al-Jayid Fi Ryadiat » et le guide qui l'accompagne.

I. INTRODUCTION

Le passage du primaire au collège est souvent accompagné par des difficultés, voire des ruptures épistémologiques et institutionnelles entre l'arithmétique et l'algèbre. Ces deux domaines sont souvent considérés comme indépendants dans les approches classiques. Cependant, l'approche du courant Early Algebra est différente, elle cherche à renforcer à la fois les connaissances arithmétiques des élèves ainsi que leur pensée algébrique en proposant des activités à potentielles telles que des problèmes de généralisation et de modélisation (Booth,1984,1988 ; Kieran, 1992).

---

[23] Ennassiri, B.; Abouhanifa, S.et Alkhouzai, E. (2024). Analyse du rapport institutionnel des élèves à l'activité de modélisation dans le manuel de la 6ème année primaire au Maroc. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp.87-99.

La modélisation est selon Squalli (2000) une porte d'entrée dans la pensée algébrique qui permet aux élèves de s'engager dans une activité algébrique significative. Les résultats des enquêtes internationales effectuées auprès des élèves marocains comme TIMSS 2019 et PISA 2018 (OECD, 2018) témoignent des faibles performances des élèves marocains du primaire et du secondaire collégial, notamment, en résolution de problèmes. Parmi les mesures prises au Maroc, figure la révision du curriculum et des programmes au cycle de l'enseignement primaire. Cette recherche vient dans la suite des études que nous menons à propos du rapport institutionnel au Maroc dans la transition primaire/collège relativement à la pensée algébrique et notamment à la modélisation comme une composante fondamentale de cette pensée, notre premier article a ciblé l'étude du rapport institutionnel relatif à la modélisation dans le collège en analysant les activités proposées dans un manuel officiel (Ennassiri et al, 2023). Le manuel ciblé par notre analyse est considéré comme une projection du curriculum officiel. L'article a pour objectif d'analyser les savoirs à enseigner relativement à la modélisation en mettant l'accent à la fois sur le curriculum et le manuel de l'élève en tenant compte du potentiel algébrique éventuel. Nous essayons à travers cette étude de répondre aux questions suivantes :

(1) Quels savoirs à enseigner relativement à la modélisation dans le curriculum du primaire ? et comment le manuel scolaire (Al-JAYID,2020), l'a-t-il mis en œuvre à travers les tâches proposées ?
(2) Quel est le potentiel algébrique résidant dans les activités de modélisation proposées dans le manuel (Al-JAYID,2020) ?

Notre analyse s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et s'appuie sur le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MERPA), (Squalli et Jeannotte, 2024 ; Najar et al. 2021). Nous adoptons la méthodologie de recherche relative à l'analyse des programmes officiels et des manuels scolaires utilisée dans les travaux de l'OIPA (Bronner et Larguier, 2018 ; Ennassiri et al, 2023).

II. CADRE THÉORIQUE

1. La modélisation mathématique

Chevallard définit la modélisation mathématique comme « l'étude mathématique des systèmes extra-mathématiques » ou « intra-mathématiques » (Chevallard, 1989). Ce processus passe par 3 étapes selon Chevallard : « 1) - On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z … 2) - On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations. 3) - On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. » (Chevallard, 1989, p. 53). Les deux premières étapes sont inscrites dans le domaine de la réalité, alors que la 3ème est purement mathématique.

Chevallard distingue le registre du « mathématisé » qui représente celui du système étudié et le registre du « mathématique » qui représente celui dans lequel « se conduit la modélisation », ce dernier représente l'outil de la modélisation et le premier représente son objet.

2. La théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

La notion d'objet constitue le point de départ de la TAD, en effet, l'objet est « tout entité matérielle ou immatérielle qui existe pour au moins un individu » (Chevallard, 1999), les chiffres, les symboles, l'excellence, la dignité, l'équation … sont des objets.

Institution : c'est l'espace qui rassemble les objets de différents types, les individus, les objets et les rapports personnels que fait un individu avec un objet donné de l'institution, dans notre cas, le 6ème primaire représente notre institution ciblée. Dans une institution donnée I, tout individu occupe une position, l'élève occupe une position différente de celle d'un enseignant, et à chaque individu X et un objet de savoir O on associe un rapport personnel $R_I\ (X, O)$ qui rassemble toutes les interactions de X envers l'objet O (le manipuler, le retenir, l'appliquer …), de même, à chaque institution I et un objet de savoir O on définit un rapport institutionnel $R_I\ (O)$, un sujet X est idéal pour l'institution I relativement à l'objet O si son rapport personnel$R_I\ (X, O)$ est plus proche que possible du rapport institutionnel à cet objet $R_I\ (O)$, « une personne Y appelée à juger la connaissance qu'a une personne X d'un objet O ne sait guère qu'apprécier la conformité du rapport personnel $R_I\ (X, O)$ au rapport institutionnel $R_I\ (p, O)$), où p est la position que X est censée occuper au sein de I ». (Chevallard, 2003), dans notre cas, l'objet de savoir est la modélisation. Quant au modèle praxéologique proposé par la TAD, il fournit un ensemble de mécanismes par lesquels « l'assujettissement en position p d'une personne X à une institution I conduit à la formation, ou à la modification, ou à la confirmation du rapport personnel de X à un objet O, $R(X, O)$»(Chevallard, 2003). C'est, en quelque sorte, une organisation de l'ensemble d'activités (tâches) que le sujet d'une institution a à accomplir au sein de cette institution pour améliorer son rapport personnel à un objet donné, conformément son rapport institutionnel. « Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. » (Bosch & Chevallard, 1999). Dans cette perspective, l'activité mathématique, consiste à accomplir une tâche t qui fait partie d'un certain type de tâches T et mise en œuvre par une technique τ (ou plusieurs), justifiée par une technologie θ qui sert également à la mettre en question d'en produire d'autres relatives à la même tâche, à la fin, la théorie Θ justifie la technologie θ. A chaque praxéologie mathématique correspond alors un quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta\ ]$, constitué d'un bloc pratico-technique $[T, \tau\ ]$ qui réfère à la partie pratique de la praxéologie et d'un bloc technologico-théorique $[\ \theta, \Theta\ ]$ qui réfère à sa partie théorique, lorsque l'organisation praxéologique est centrée sur un seul type de tâches elle est dite « ponctuelle ».

3. Le courant Early Algebra

Early Algebra est un courant de recherche qui propose une autre approche pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre, il ne s'agit pas d'une introduction précoce de l'algèbre formelle ni d'une pré-algèbre. Mais c'est une stratégie qui cherche à enrichir les curriculums et les contenus mathématiques, afin d'offrir des opportunités aux élèves pour développer la pensée algébrique, dès la phase arithmétique avant l'introduction de la lettre, sous le slogan « l'algèbre avant la lettre » (Kapput, 1998 ; Carraher, 2007 ; Squalli, Mary et Marchand, 2011 ; Squalli et Bronner, 2017). Plusieurs questions ont été traitées dans ce sens. Certains chercheurs se sont intéressés aux opérations et aux propriétés algébriques, qui posent des difficultés chez les élèves tel que le signe d'égalité (Carpenter et al., 2003). D'autres se sont penchés sur les propriétés algébriques telles que la distributivité et l'associativité, nous citons la recherche effectuée sur la multiplication par Constantin et Coulange (2017) qui a mis en évidence les potentialités de quelques activités arithmétiques au primaire et qui contribuent à la construction de la distributivité comme une propriété algébrique, d'autres chercheurs (Coulange , Ben Nejma et al 2012, Ben Nejma, 2010, 2018) se sont intéressés aux pratiques enseignantes relatives à l'enseignement de la modélisation en mettant en avant l'écart important entre le curriculum prescrit et le curriculum implémenté dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

Squalli (2000) définit la modélisation comme une composante essentielle du développement de la pensée algébrique dans la mesure où elle permet la construction et l'interprétation de la validation de modèles algébriques de situations réelles ou mathématiques.

4. Le Modèle Praxéologique de Référence de la Pensée Algébrique (MPRPA)

Le MPRPA proposé (Najar et al, 2021) définit l'algèbre comme un ensemble d'activités mathématiques dans lesquelles intervient une ou plusieurs opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) qui peut être une addition, une soustraction, une division… Mais elles sont répétées un nombre fini de fois. Par conséquent, les activités qui seront comptabilisées seront uniquement celles dont la résolution nécessite d'effectuer au moins une seule opération, ces activités seront ensuite classées selon deux critères : (1) leur potentiel algébrique, (2) la complétude du processus de modélisation. Ce modèle est axé sur trois praxéologies régionales, « Généraliser », « Modéliser » et « Calcul » qui constituent les piliers du développement de la pensée algébrique puisque ces composantes permettent de mobiliser un raisonnement algébrique sophistiqué basé sur la généralisation, l'analycité, la symbolisation, le raisonnement sur les relations fonctionnelles … etc. Ce modèle a été exploité dans une recherche comparative autour de la transition arithmétique - algèbre dans les programmes du Bénin, du Maroc et de la Tunisie (Ben Nejma et al., 2022). L'analyse des praxéologies mathématiques développées dans les manuels scolaires de ces pays (6e année primaire) a permis de rendre compte des manières dont ces manuels préparent les élèves à l'algèbre du secondaire.

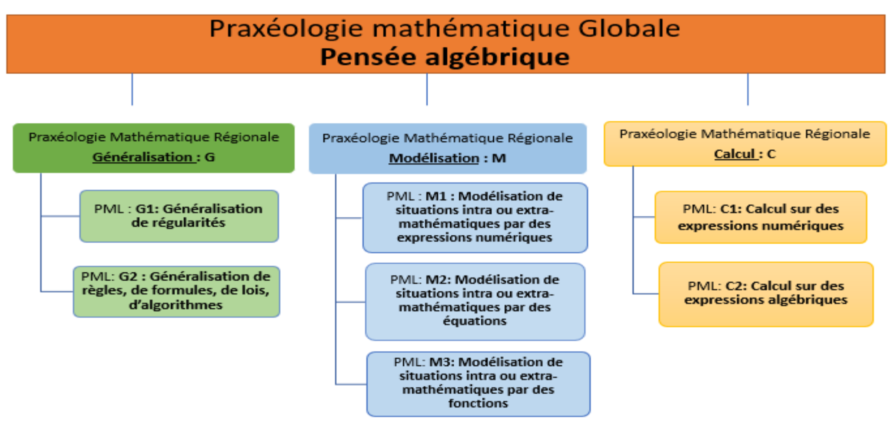


Figure 1 *– Schéma représentant le MPRPA, Najar et al. (2021)*

5. Caractérisation de l'OMR Modélisation selon le critère de complétude

Le processus de modélisation est complet « lorsque le problème à modéliser est issu d'une situation mathématique ou extra-mathématique, et la consigne permet à l'élève de passer par les trois étapes du processus de modélisation décrit par Chevallard ». Si, cependant, la consigne explicite le modèle à l'élève, le processus est incomplet comme le cas pour l'activité suivante : Un paysan demande à son fils de compter le nombre d'animaux dans l'étable, le fils lui répond : « Dans notre étable il y a des chevaux et des poules, j'ai compté 70 têtes et 176 pattes ». En notant le nombre de chevaux par x montrer que $2x + 140 = 176$, déduire le nombre de chevaux et de poules dans l'étable ? » (Ennassiri et al, 2023 p.254).

Dans le cadre du projet APPRENDRE (Najar et al, 2020-2023), il a été question de définir le potentiel algébrique d'une activité mathématique comme un outil méthodologique (Ben Nejma et al 2022) pour caractériser les techniques attendues selon qu'elles soient de nature arithmétique ou algébrique ou à tendance algébrique. « Trois niveaux ont été considérés : potentiel algébrique nul, faible et fort : Le premier niveau concerne les tâches purement arithmétiques. C'est à dire celles qui impliquent des nombres qui sont tous déterminés et la réalisation de la tâche repose uniquement sur la qualité nombrant des nombres (leurs valeurs) » (Najar et al, 2021). Pour les activités de modélisation, les problèmes connectés représentent un exemple d'activités à potentiel algébrique nul, comme le cas de l'exemple suivant : Hajar possède 200 DH, combien lui reste s'elle achète 2 bandes-dessinées à 45 DH chacune et un roman à 25 DH ? L'inconnue qu'on cherche ici est le montant restant à Hajar après l'opération de l'achat, l'élève opère sur les quantités connues de la situation (200 ; 2 ; 45 ; 25) : 200- (2 x 45 +25), il est envisagé qu'il adopte une méthode purement arithmétique. « Le deuxième niveau concerne les tâches dont les énoncés encouragent l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève ». Le troisième niveau représente les tâches à potentiel algébrique fort, lorsque « l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève » (Najar et al, 2021). C'est le cas de l'exercice suivant : Un homme âgé de 43 ans a trois fils qui ont respectivement 5 ans, 7 ans et 11 ans. Après combien d'année l'âge du père sera-t-il la somme des âges des trois fils ? Il s'agit d'une tâche qui ne favorise aucune technique arithmétique.

III. METHODOLOGIE

Le nouveau curriculum du primaire (6-12ans), a été mis en œuvre pour en 2021, il est composé d'un seul document qui rassemble toutes les disciplines enseignées au primaire (MEN, 2020). Ce curriculum obéit aux directives de la réforme 2015-2030 du système éducatif Marocain. Notre méthodologie consiste à analyser les programmes officiels et le manuel scolaire « Al-Jayid Fi Ryadiat » qui projette les principes et les directives du nouveau curriculum.

On considère ainsi 3 étapes : Etape1 : adaptation du MPRPA (Najar et al, 2021) aux objectifs de notre étude en rajoutant le concept de complétude et en focalisant uniquement sur la praxéologie régionale « modéliser ». Etape2 : identification des textes officiels et du manuel à analyser. Etape3 : Analyse de la praxéologie mathématique relative à la modélisation mathématique à la lumière des critères d'analyse définis dans notre modèle d'analyse.

IV. ANALYSE INSTITUTIONNELLE

1. La modélisation dans le curriculum de 6ème primaire

Le nouveau curriculum du primaire définit la modélisation ainsi : « … La modélisation est l'application des mathématiques pour résoudre des problèmes réels, des problèmes mathématiques ou d'autres sciences, en transformant un problème issu de la vie en un problème mathématique, puis en le traitant et le résoudre, choisissant les meilleures solutions adaptées à la nature du problème abordé, puis généraliser et prévoir. C'est aussi un processus qui comprend l'observation du phénomène… atteindre des résultats mathématiques et réinterpréter le modèle, … Or le modèle mathématique essaye de décrire les relations mathématiques traduisant un ensemble de problèmes, la modélisation en mathématiques vise à : - Fournir à l'apprenant des modèles de pensée en traitant la logique et le raisonnement de l'esprit, et en organisant des voies de pensée… - L'apprenant développe la capacité de résoudre des problèmes spécifiques dans plusieurs domaines... L'enseignant(e) est donc appelé à adopter des situations problèmes inspirées du milieu socioculturel et socioéconomique des apprenants. » [24]. L'analyse de cet extrait, permet de dégager plusieurs aspects liés au processus de modélisation comme il a été décrit par Chevallard, notamment la présence des concepts tels que « le modèle », « les situations extra-mathématiques », et « les relations mathématiques ». Mais, il n'y a aucun indice qui mentionne la relation entre la modélisation et la PA, même si plusieurs éléments de la PA sont indiqués tels que la production de nouvelles connaissances, l'organisation de la pensée, le développement du raisonnement et la distinction entre le mode de pensée arithmétique et algébrique. On peut dire alors, que le curriculum du primaire accorde une grande importance à la modélisation, en tant qu'habileté à développer chez les élèves et comme un processus qui permet de générer de nouvelles connaissances mathématiques et d'organiser la pensée.

2. Caractérisation des activités selon le potentiel algébrique

Les résultats de l'étude de ce manuel indiquent qu'il contient au total 608 tâches où l'une des opérations arithmétiques intervient, parmi ces tâches, il y a 273 qui s'inscrivent dans la praxéologie régionale « modéliser », les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	M1	M2	M3	Total
Potentiel nul (A)	40,3% (110)	7,3% (20)	9,5% (26)	57,1 % (156)
Potentiel faible (B)	11,7% (32)	3,7% (10)	11,7% (32)	27,1 % (74)
Potentiel fort (C)	3,3% (9)	0,3% (1)	12,1% (33)	15,7 % (45)
Total	55,3% (151)	11,3% (31)	33,3% (91)	100 % (273)

***Tableau 1** – répartition des genres de tâches selon leur potentiel algébrique*

Les résultats montrent que plus que la moitié des activités relevant de la PMR « modéliser » ne possèdent aucun potentiel algébrique, 27,1 % (74) possèdent un potentiel faible et seulement 15,7 % (45) représentent un potentiel algébrique fort. Ceci indique que la majorité des activités du manuel relevant de cette praxéologie, sont orientées au premier lieu vers la mise en œuvre des techniques purement arithmétiques. En effet, les tâches les plus fréquentes sont d'abord du type M1 : modélisation de situations par des expressions numériques. Dont la majorité ne représentent aucun potentiel algébrique, cela montre que les activités de modélisation de ce manuel sont

[24] Extrait du curriculum du primaire version 2021, page 279

exploitées pour générer des expressions numériques à des fins de calcul. En deuxième lieu, on trouve le genre de tâches de la PML M3 : modélisation de situations par des relations fonctionnelles 33,3% % (91), dont plus que les deux tiers (65) possèdent un potentiel algébrique au moins faible et presque le un tiers ne possédant aucun potentiel algébrique (32). En dernière place, il y a le type M2 : modélisation de situations par des équations qui représente seulement 11,3% (31) de la totalité des tâches qui relèvent de cette praxéologie régionale, contrairement aux tâches du type M3, plus que les deux tiers de ces tâches (20) ne possèdent aucun potentiel algébrique et le un tiers seulement possède un potentiel algébrique faible ou fort (11). En comparant les scores des trois PML de la PMR « modéliser » on déduit que la PML de type M3 est celle qui rassemble plus de tâches à potentiel algébrique fort 12,1% (33), ce qui montre que les activités proposées dans le manuel qui conduisent à une covariation, sont orientées vers le développement de la PA. Cependant, les situations qui ramènent à une expression numérique sont quasiment vides du potentiel. Pour déterminer pour chaque praxéologie locale, le type de tâches dominant, ainsi que leur répartition selon le potentiel algébrique, on détaille les résultats dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Genre de tâches : M1				Genre de tâches : M2		Genre de tâches : M3			
	M1.1	M1.2	M1.3	M1.4	M2.1	M2.4	M3.1	M3.2	M3.3	
Effectif %	51,28 % (140)	0,73 % (2)	1,47 % (4)	1,83 % (5)	11 % (30)	0,37 % (1)	23,44 % (64)	0,37 % (1)	9,52 % (26)	100 % (273)
Total A	104	2	3	1	20	0	19	0	7	57,14 % (156)
Total B	29	0	1	2	9	1	20	0	12	27,11 % (74)
Total C	7	0	0	2	1	0	25	1	7	15,75 % (43)

***Tableau 2–** répartition des types de tâches selon leur potentiel algébrique*

Le type de tâche M1.1 représente 51,28 % (140) du total des activités de modélisation. 74,3% (104) de ces activités ne possèdent aucun potentiel algébrique,20,7% (29) représentent un potentiel faible et seulement 5% (7) possèdent un potentiel fort. Les activités relevant de ce type sont quasiment vides du potentiel algébrique, même s'elles représentent la majorité des activités de modélisation, ce résultat montre que les expressions numériques produites par ces activités sont exploitées uniquement à des fins calculatoires et non pas pour le développement de la pensée algébrique. Puis en 2ème lieu, figure le type de tâches M3.1 : Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle, qui représente 23,44 % (64) dont presque 40% (25) possèdent un potentiel algébrique et 30 % (19) vides du potentiel algébrique, ce résultat confirme celui ressortit du manuel « Al-Moufid » du collège que la présence du concept de variable a favorisé le potentiel algébrique (Ennassiri et al, 2023). En 3ème lieu, on trouve les tâches de type

M2.1 : Résoudre une situation se modélisant par une équation avec un taux de 10,99 % (30) dont presque les deux tiers (20) sont sans potentiel algébrique et uniquement une seule tâche a un potentiel algébrique fort. Ensuite, il y a les tâches de type M3.3 : Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée, avec un taux de 9,52 % (26) dont 7 sont vides du potentiel algébrique, 12 ont un potentiel faible et 7 possèdent un potentiel fort.

3. Caractérisation des activités selon le critère de la complétude de modélisation

La modélisation est un processus intellectuel considéré par Squalli (2000) comme outil pour la mise en place du calcul algébrique, c'est pour cette raison que notre analyse doit se focaliser sur les différentes étapes de ce processus : A quel point, les activités du manuel offrent-elles à l'élève l'opportunité de passer complètement par ce processus ? Parmi les 273 tâches de situations à modéliser, il y a seulement 80 où la modélisation est complète. La répartition des tâches selon le critère de complétude est présentée dans le tableau ci-dessous :

	M1	M2	M3	Total
Modélisation complète	17,6% (48)	3,3% (9)	8,4% (23)	29,3 % (80)
Modélisation incomplète	37,7% (103)	8,1% (22)	24,9% (68)	70,7 % (193)
Total	55,3% (151)	11,4% (31)	33,3% (91)	100 % (273)

Tableau 3 *– répartition des tâches de modélisation selon le critère de complétude.*

Ces résultats indiquent que parmi les 273 activités relevant de la praxéologie régionale « modéliser » seulement 80 représentent une modélisation complète. Ceci est dû peut-être du fait que la majorité de ces activités visent à appliquer les connaissances instaurées pendant les séances de construction, les règles de calcul et les méthodes véhiculés au cours de chaque leçon. Par ailleurs, l'analyse quantitatif des données collectées ne montre aucun lien entre la complétude de la modélisation et le potentiel algébrique, Nous présentons quelques exemples :

1- M1 : modélisation de situations par des expressions numériques ou algébriques

Exemple1 :

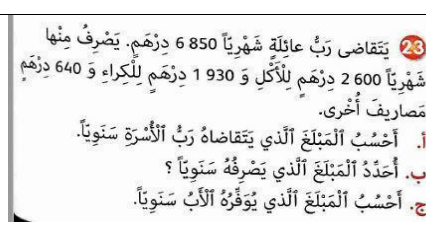
 23 يتقاضى رَبُّ عائِلَةٍ شَهْرِيّاً 6 850 دِرْهَم. يَصْرِفُ مِنها شَهْرِيّاً 2 600 دِرْهَم لِلْأَكْلِ وَ 1 930 دِرْهَم لِلْكِراءِ وَ 640 دِرْهَم مَصاريفَ أُخْرى. أ. أَحْسُبُ الْمَبْلَغَ الَّذي يَتَقاضاهُ رَبُّ الْأُسْرَةِ سَنَوِيّاً. ب. أُحَدِّدُ الْمَبْلَغَ الَّذي يَصْرِفُهُ سَنَوِيّاً ؟ ج. أَحْسُبُ الْمَبْلَغَ الَّذي يُوَفِّرُهُ الْأَبُ سَنَوِيّاً.	Le père d'une famille gagne mensuellement 6 850 DH, il dépense chaque mois, 2 600 DH pour la nourriture, 1 930 DH pour le loyer et 640 DH comme dépense divers. a) Calculer le salaire annuel du père. b) Calculer ses dépenses annuelles. c) Calculer l'épargne annuel du père.

Figure 2 *- Extrait du manuel officiel du collège Marocain Al-Jayid Fi Ryadiat, page 28*

Cette activité s'inscrit dans le cadre des exercices d'application qui ont pour objectif d'appliquer les opérations arithmétiques, la situation est extra-mathématique, le problème est connecté et la tâche est de type M1.1 : Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique ou algébrique. La tâche principale est de trouver l'expression numérique qui modélise la situation pour trouver l'épargne annuel du père, puis de calculer sa valeur $12 \times (6850 - (2600 + 1930))$ ou encore $12 \times (6850 - 2600 - 1930)$ les questions intermédiaires vont empêcher l'élève de chercher lui-même le modèle qui correspond à la situation, donc la modélisation n'est pas complète et le potentiel algébrique est nul, car la consigne n'encourage aucune méthode algébrique, les questions posées ne permettent pas aux élèves de produire des expressions numériques équivalentes, ces expressions peuvent représenter une occasion de traiter la notion de l'équivalence, en identifiant les expressions numériques équivalentes modélisant le même problème : $12 \times (6850 - 2600 - 1930) = 12 \times \left(6850 - (2600 + 1930)\right) = 12 \times 6850 - 12 \times (2600 + 1930)$ ...

2- M2 : Modélisation de situations par une équation :

Exemple2 :

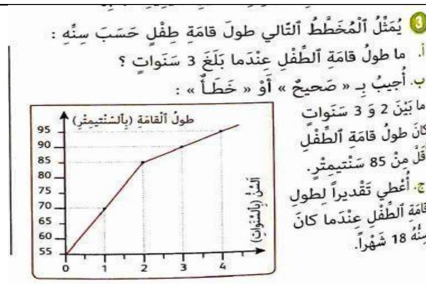
تقاضى مُسْتَخْدَمٌ وَزَوْجَتُهُ مَعاً 398 دِرْهَماً في ٱلْيَوْمِ. ـمْتُ أَنَّ أُجْرَةَ ٱلزَّوْجِ تَقِلُّ عَنْ أُجْرَةِ ٱلزَّوْجَةِ بِـ 120 فَما هِيَ ٱلْأُجْرَةُ ٱلشَّهْرِيَّةُ وَٱلسَّنَوِيَّةُ لِكُلِّ واحِدٍ مِنْهُما ؟ أَيّامِ ٱلسَّنَةِ 365 يَوْماً، وَعَدَدُ أَيّامِ ٱلشَّهْرِ 30 يَوْماً).	Un ouvrier et sa femme gagnent 398DH chaque jour. Sachant que le salaire du mari est inférieur à celui de sa femme de 120 DH, quel est le salaire mensuel et annuel de chacun d'eux ? (une année compte 356 jrs, un mois 30 jrs)

Figure 3 *- Extrait du manuel officiel du collège Marocain* ***Al-Jayid Fi Ryadiat****, p. 28*

Il s'agit d'un problème qui figure dans la partie consacrée à l'évaluation des leçons de l'unité 1, c'est une situation extra-mathématique se modélisant par une équation, le modèle n'est pas donné à l'élève, le problème est déconnecté et la tâche est de type M1.1 : Résoudre une situation se modélisant par une équation, la consigne ne favorise aucune méthode arithmétique face à la méthode algébrique. La tâche consiste à déterminer le salaire journalier du mari et de sa femme, ce problème a un potentiel algébrique fort car il permet de manipuler l'inconnu sans la représenter, l'une des méthodes, consiste à traduire le problème par l'équation $2 \times$ salaire de la femme $+120 = 390$, les élèves du primaire n'arrivent pas généralement à cette représentation, mais ils procèdent comme si l'équation était construite en effectuant les opérations : le salaire de la femme $= (390 - 120) \div 2$ ou encore le salaire du mari $= (390 + 120) \div 2$, parfois les pratiques des enseignants font obstacle à ces méthodes analytiques sophistiquées, en essayant de donner aux élèves une méthode de résolution générale pour ce type de problème (ajouter la somme à la différence et diviser par 2 pour trouver le plus grand salaire).

3- M3 : modélisation de situations par une relation fonctionnelle

Exemple3 :



Le diagramme ci-dessous représente la taille d'un enfant selon son âge :

a) Quelle est la taille de l'enfant à l'âge de 3ans ?
b) Répondre par « vrai » ou « faux » :

Entre 2 et 3 ans la taille de l'enfant est inférieure à 85 cm.

c) Donner une valeur approchée à la taille de l'enfant à l'âge de 18 mois.

Figure 4 - *Extrait du manuel officiel du collège Marocain* ***Al-Jayid Fi Ryadiat****, page 28*

C'est une situation extra-mathématique qui présente une relation fonctionnelle entre la taille de l'enfant en cm et son âge, c'est la taille qui varie en fonction de l'âge, la modélisation n'est pas complète puisque le modèle et le potentiel algébrique est faible car la consigne invite l'élève à déterminer la taille de l'enfant dans quelques points, ce qui lui permet de manipuler la notion de variable (la taille) même s'elle n'est pas représentée par une lettre , par ailleurs, les questions posées ne permettent pas à l'élève d'utiliser la notion de l'antécédant car aucune question ne lui invite à déterminer l'âge associé à une taille donnée. La modélisation est incomplète, car le graphe modélisant la relation fonctionnelle entre les deux variables est donné. L'analyse de plusieurs activités du manuel montre que les activités qui permettent à l'élève de passer complètement par le processus de modélisation possèdent, généralement, un potentiel algébrique contrairement à celles orientées uniquement vers le calcul, ce résultat confirme que la complétude du processus de modélisation a une influence positive sur le potentiel algébrique.

I. DISCUSSIONS ET CONCLUSIONS

Cette étude a montré que le curriculum des mathématiques de primaire accorde une grande importance à la modélisation comme une compétence à développer chez l'élève, elle est considérée comme l'un des principes fondateurs du curriculum. Les résultats de l'analyse du manuel « Al-Jayid Fi Ryadiat » indiquent qu'il comprend un nombre important d'activités de modélisation, dont la majorité sont du type M1 : Modélisation d'une situation par une expression numérique ou algébrique, où les tâches sont orientées vers la génération des expressions numériques dans le but d'effectuer des calculs plutôt que vers la mise en œuvre d'un raisonnement algébrique, ce qui a entrainer que la plupart de ces activités ont un potentiel algébrique nul ou faible. L'analyse des activités de modélisation qui figurent dans ce manuel confirme que les problèmes de type déconnecté donnent aux élèves un nombre important d'opportunités, pour développer un raisonnement analytique basé sur la manipulation de l'inconnue, et pas uniquement sur la qualité nombrant des données comme c'est le cas pour les problèmes connectés. D'une autre part, les tâches du type M2 et M3 ne sont pas nombreuses, même si elle possèdent, généralement, un potentiel algébrique par la présence de la notion de l'inconnue ou de la variable qui construisent à notre sens, l'essence du raisonnement algébrique. Il est recommandé aux concepteurs des manuels, de mettre en considération le potentiel algébrique des activités proposées. Les praxéologies à potentiel algébrique ont un apport considérable à préparer les élèves du primaire pour dépasser les difficultés qui accompagne la transition arithmétique – algèbre, cet apport doit être explicité dans le curriculum des mathématiques. D'autre part, plusieurs situations proposées dans le manuel sont proches de la réalité de l'élève, mais la plupart des consignes ne lui permettent pas de passer complètement par le processus de modélisation au sens de Chevallard, ce qui l'empêche de s'engager dans ce processus intellectuel qui favorise le développement de la pensée algébrique.

RÉFÉRENCES

BEN NEJMA, S. (2021). La place de la modélisation dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Pratiques institutionnelles et pratiques enseignantes dans le système éducatif tunisien- *ITM Web of Conférences 39*

BEN NEJMA, S., ABOUHANIFA, S., OKÉ, E., NAJJAR, R., SQUALLI, H. & ADIHOU, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6e année primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Numéro thématique 2 (Tome 1),* 59-95.

BEN NEJMA, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes ? Etude de cas dans le contexte tunisien. *Petit x*, N° 82, pp.5-30. https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR10001/IGR10001.pdf

BOOTH, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook,* pp. 20-32. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

BOOTH L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, Vol 5*

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1*), 77-124.

BRONNER, A & LARGUIER, M. Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. In Aboud, M. (Ed.) *Mathématiques en scène : des ponts entre les disciplines Actes EMF2015 – GT2,* pp. 275-283(2018).

CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L., & LEVI, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, vol. 2, p. 669–705. Charlotte, NC : Information Age Publishing.

CHEVALLARD, Y. (1999). Organiser l'étude. Cours 3. Écologie & régulation, *Actes de la Xème École de didactique des mathématiques.* La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999b). Organiser l'étude. Cours 3. Écologie & régulation, *Actes de la Xème École de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2e partie). *Petit x, (19*), 43-72.

CONSTANTIN, C. & COULANGE, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : une entrée dans la pensée algébrique ? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 9–32. https://doi.org/10.7202/1055726ar

COULANGE L., BEN NEJMA S., CONSTANTIN C., LENFANT-CORBIN A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. Dans L, Coulange et-P Drouhard., JL Dorier, A, Robert (dir), Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, *RDM*, pp. 57-79. Grenoble : La Pensée Sauvage. https://revue-rdm.com/ouvrage/enseignement-de-lalgebre-elementaire-bilan-et-prespectives/

ENNASSIRI, B, MOUKHLISS, M, ABOUHANIFA, S, EKHOUZAI, E, AZIZI, E & BENKENZA, N. (2023). Analysis of the Institutional Relationship of the Modelling Activity in a Moroccan High School Textbook. *Academic Journal of Interdisciplinary Studies. 12. 248*. 10.36941/ajis-2023-0020.

JEANNOTTE, D., SQUALLI, H. ET ROBERT, V. (2020). Highlighting the potential for developing early algebraic thinking: a praxeological framework of reference. *Communication présentée au 14th International Congress of Mathematical Education.* 12-19 Juillet 2020, Shangai, China.

KAPUT, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebra flying» the K-12 curriculum.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

KIERAN, C. (1992). The learning of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New-York/Toronto: Macmillan.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DU MAROC (MEN), DIRECTION DES CURRICULUMS (2021). *Le Curriculum Scolaire du primaire Version Finale : Aout 2021*. https://men-gov.ma

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DU MAROC (MEN), DIRECTION DES CURRICULUMS (2021). *Manuel de mathématiques du primaire « Aljayid Fi-Arryadiat* ». Maison d'édition Alouma.

NAJAR, R., SQUALLI, H., ADIHOU, A. & ABOUHANIFA, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences. 39*. 10.1051/itmconf/20213901004.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD). (2018). *Programme for International Student Assessment: PISA 2018*.

SQUALLI, H., JEANNOTTE, D., KOUDOGBO, J. ET ROBERT., V. (2019) Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise. *Communication présentée dans Working group 3 : Teaching for connections and understanding. CIEAEM-71*, Braga, 22 - 26 juillet (2019).

SQUALLI, H. ET BRONNER, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 1). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(3),* 1-8.

SQUALLI, H., & JEANNOTTE, D. (2024). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques,* 66-101. https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/57

SQUALLI, H., MARRY, C. ET MARCHAND, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (2011), (pp. 65-78). De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.lebea.2011.01.0001.

SQUALLI, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Université Laval, Québec, Canada.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Les activités de comparaison et de généralisation à la transition primaire-collège au Maroc

Sabah Haddad[25], Belkassem Seddoug[1]
CRMEF Rabat Salé Kénitra, Maroc
Ahmed Delbouh[1]
CRMEF Dakhla Oued Ed-Dahab, Maroc

Résumé – Dans cet article, nous présentons l'analyse d'une partie des résultats d'une enquête qui a été réalisée au cours d'un projet, dans le cadre du programme APPRENDRE, intitulé « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». Le travail étudie les raisonnements des élèves dans la résolution des problèmes de partage (comparaison) et de généralisation. C'est l'étude d'une transition conceptuelle (arithmétique-algèbre) lors de la transition institutionnelle primaire-secondaire.

I. INTRODUCTION

1. Contexte de la recherche

Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet interuniversitaire intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ». Le thème de ce projet s'inscrit dans la thématique générale de la transition école collège qui est abordée sous l'angle des problèmes de la transition entre l'arithmétique enseignée au primaire (6-12 ans) et l'algèbre enseignée au collège (13-15 ans) dans les trois pays africains concernés par ce projet. Il nous a semblé important, dans un premier temps, d'analyser le potentiel du développement de la pensée algébrique des programmes officiels du primaire et du collège de ces trois pays. Plus précisément, faire une analyse du savoir à enseigner relativement au développement de la « pensée algébrique » dans les programmes officiels dans chacun des trois pays. Ensuite, comparer ces programmes afin de rendre compte de la manière dont ils préparent les élèves du primaire à l'algèbre du collège, à travers des enquêtes menées auprès des élèves du primaire et du collège. Ces enquêtes ont pour but de documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans

[25] Hadda, S.; Seddoug, B. et Delbouh, A. (2024). Les activités de comparaison et de généralisation à la transition primaire-collège au Maroc. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 100-113.

la résolution de problèmes de comparaison et de généralisation. Enfin, documenter « les connaissances des enseignants » du primaire et du collège en regard d'activités de résolution de problèmes de comparaison et de problèmes de généralisation.

Dans ce travail, nous présentons, à travers les résultats de l'enquête réalisée auprès des élèves, une analyse de la transition arithmétique-algèbre dans le cadre de transition école-collège au Maroc.

II. ELÉMENTS DE LA PROBLÉMATIQUE

Le système d'enseignement marocain introduit l'algèbre à partir du secondaire collégial et la voie privilégiée pour cette introduction est celle des équations de premier degré à une inconnue. L'apprentissage du calcul algébrique est alors central dans l'enseignement de l'algèbre, il est mobilisé dans des activités de mathématisation de diverses situations par des expressions algébriques ainsi que dans des activités de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'équations algébriques du premier degré à une inconnue. Il s'agit donc d'une entrée classique à l'algèbre qui ne s'appuie sur l'arithmétique enseigné au primaire qu'à travers les connaissances des élèves sur les nombres entiers et rationnels ainsi que les opérations algébriques sur ces nombres. La question de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre a alimentée plusieurs recherches. Cherchant à introduire l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, Bednarz et Janvier (1993) se sont intéressées à l'identification des types de problèmes facilitant le passage de l'élève d'un mode arithmétique à un mode algébrique de résolution. Selon ces auteures, certains problèmes jouent un rôle clé dans cette transition, notamment les problèmes de partage en parties inégales, qui mettent en jeu des relations de comparaison et sont qualifiés de déconnectés (Bednarz et Janvier, 1993).

Afin de dégager des éclairages sur cette transition dans le contexte marocain, nous avons analysé les procédures des élèves dans la résolution d'une classe de problèmes de partage inéquitable et de généralisation, avant et après l'entrée à l'algèbre. Nous cherchons donc à comprendre : *de quelle manière s'opère cette transition arithmétique-algèbre ? Qu'est ce qui est perdu et qu'est ce qui est récupéré, dans ce sens, pendant la transition primaire-collège ?*

III. CADRE THÉORIQUE

Dans notre analyse, nous avons choisi de nous fonder sur le cadre conceptuel de l'algèbre élémentaire et de la pensée algébrique développé par des membres de l'OIPA (Squalli, 2000, 2015 ; Squalli et al., 2020a ; Squalli et al., 2020b). Nous analysons les raisonnements mobilisés par les élèves de la sixième année du primaire et la première année du collège dans la résolution de problèmes de comparaison et de problèmes de généralisation.

En ce qui est des problèmes de comparaison, on utilise le protocole d'analyse élaboré par Squalli, Bronner, Larguier et Adihou (Squalli et al., 2020a), qui permet de distinguer trois grandes catégories de raisonnements : La première regroupe les raisonnements de nature non analytique [dits aussi arithmétiques] (degré d'analycité nul). Une seconde catégorie regroupe les raisonnements analytiques [dits aussi algébriques] (degré d'analycité optimal). La troisième catégorie regroupe les raisonnements dits à tendance analytique [dits aussi raisonnements à tendance algébrique] qui respectent partiellement les caractéristiques d'un raisonnement analytique que nous venons de présenter (degré d'analycité non nul, mais non optimal). (p. 45).

Ils définissent aussi les registre de représentation sémiotique (Duval, 1995) des inconnues et des équations. Le registre de représentation est dit « numérique » quand les traces de la résolution de l'élève ne comportent que des nombres déterminés et des opérations sur ces nombres.

Le registre de représentation est dit « algébrique conventionnel » si l'élève recourt au langage algébrique littéral. Le registre de représentation est dit « intermédiaire » si l'élève recourt à un, ou à plusieurs, mode de représentation non purement numérique ou algébrique conventionnel. Par exemple, l'élève peut représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide. Il peut représenter les relations par un dessin, utiliser une table de valeurs numérique, etc. (Ibid., p. 47).

Par conséquent, pour analyser les raisonnements des élèves dans les problèmes de comparaison, nous avons retenu les deux aspects : le degré d'analyticité du raisonnement et le registre de représentation sémiotique utilisé.

Pour analyser les productions des élèves dans la résolution des problèmes de généralisation, nous nous appuyons sur un cadre conceptuel proposé par Squalli (2015, 2021), dans lequel il considère que la généralisation est à la fois un processus et un produit (généralité) de ce processus. Pour justifier ou valider une généralisation il distingue deux types de raisonnement (*arithmétique* et *algébrique*). Chaque type est caractérisé par la nature de l'argument qui justifie la généralité : empirique ou théorique.

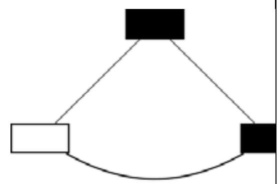
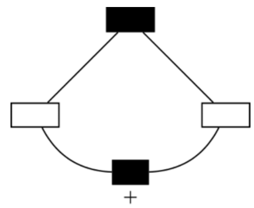
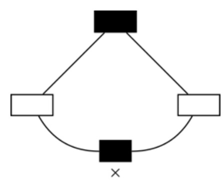
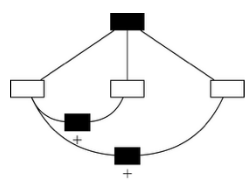
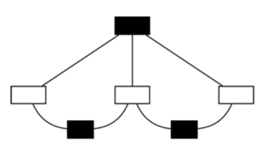
Cette distinction entre ces deux formes de généralisation nous permet de distinguer entre une généralisation arithmétique et une généralisation algébrique.

> Le caractère algébrique de la pensée ou de l'activité mathématique ne réside pas dans la présence de signes alphanumériques, mais dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. Dans ce sens, une généralisation est arithmétique si elle est empirique, autrement dit si la généralité est induite à partir de quelques exemples numériques et fondée sur la qualité nombrante de ces exemples. Une généralisation est algébrique si elle est théorique, autrement dit si elle s'appuie sur un raisonnement du sujet basé sur une argumentation intellectuelle. (Squalli, 2021, p. 4).

Afin d'analyser une généralisation, nous donc avons pris en compte sa nature – algébrique ou arithmétique – ainsi que le registre de représentation de la généralité, qu'il soit algébrique conventionnel, intermédiaire ou numérique.

IV. MÉTHODOLOGIE

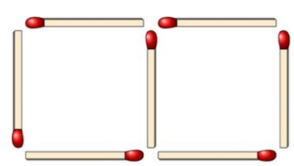
Nous avons préparé et administré deux tests à un échantillon varié d'élèves (2408 pour le Maroc) de la sixième année du primaire et de la première année du collège, afin d'explorer leurs raisonnements dans la résolution de problèmes de comparaison et de généralisation. Au Bénin, au Maroc et en Tunisie, l'enseignement fondamental comprend neuf années de scolarité obligatoire (de 6 à 15 ans) et est réparti en deux cycles pédagogiques : le cycle primaire (six ans) et le cycle collégial (trois ans). Dans le but d'identifier les éventuelles évolutions dans les raisonnements des élèves lors du passage du primaire au collège, les mêmes problèmes ont donc été proposés à tous les élèves. Dans le test de comparaison, on a proposé cinq problèmes, le premier problème étant connecté sa résolution nécessite une soustraction, alors que les quatre autres sont déconnectés.

Enoncé du problème	Structure	Nature des relation
Problème 1 : Hussam a partagé la somme de 133 000 dirhams entre ses deux nièces, Maria et Chaima. Il a donné à Maria 33 000 dirhams. Combien Chaima a-t-elle reçu ?		Problème connecté dont la résolution nécessite une soustraction.
Problème 2 : Ahmed achète deux voitures pour ces filles, Maria et Chaima. La voiture de Maria coute 17 600 dirhams de plus que celle de Chaima. Si la somme totale consacrée à l'achat des deux voitures est de 181 000 dirhams, combien coûtera chacune des deux voitures ?		Problème déconnecté. Une relation additive entre deux inconnues.
Problème 3 : Sami fait l'inventaire de deux produits de sa boutique. Il compte 3 fois plus de produits de conserve que de produits de nettoyage. S'il y a 132000 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?		Problème déconnecté. Une relation multiplicative entre deux inconnues.
Problème 4 : Une famille dépense par année pour les frais de scolarité de ses enfants 15 000 dirhams de plus que pour les frais de l'alimentation. Elle dépense aussi, pour l'habillement 5 000 dirhams de plus que les frais d'alimentation. Au total ces dépenses par an sont de 131000 dirhams, combien dépense-t-elle dans l'alimentation, la scolarité de ses enfants et l'habillement ?		Problème déconnecté. Deux relations additives, impliquant trois inconnues. Le problème est du type **source** : une seule inconnue permet de générer les deux autres.
Problème 5 : Maria, Chaima et Sophia collectionnent des timbres. Maria à 3 fois plus de timbres que Chaima. Sophia a 16 timbres de moins que Maria. Si le nombre de timbres au total est 208, combien de timbres ont-elles chacune ?		Problème déconnecté. Deux relations l'une additive et l'autre multiplicative, impliquant trois inconnues.

		Le problème est du type **composition d'opération** : une des données est le point d'arrivée d'une relation et le départ de l'autre.

Tableau 1 : *Les problèmes du test de comparaison*

Le test de généralisation est composé de deux problèmes, le premier sous forme d'un programme de calcul et le second porte sur les carrés et les triangles d'allumettes.

<table>
<tr><td>Problème 1 : Devinette du nombre secret d'Ali
Ton ami Ali a choisi un nombre compris entre 1 et 100.
Il l'a multiplié par 10.
Il a divisé le nombre obtenu par 5.
Il a divisé le nombre obtenu par 2.
Il a ajouté 9.
Il a enlevé le nombre choisi au départ.
Il a retranché 4
Peux-tu deviner le nombre que Ali a obtenu à la fin des calculs ?
Explique comment tu as fait.</td><td>Il s'agit d'un programme de calcul qui peut être résolu par une procédure purement algébrique, en notant x le nombre choisi et en exprimant le programme par une expression algébrique.</td></tr>
<tr><td>Problème 2A : Carrées d'allumettes
Voici une chaîne formée de deux carrés. On compte 7 allumettes.
1- Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 10 carrés.</td><td></td></tr>
</table>

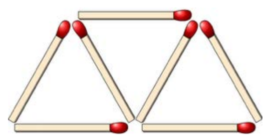
2- Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 1001 carrés. 3- Explique comment tu peux savoir le nombre d'allumettes pour n'importe quelle chaîne de carrés ?	
Problème 2B : Triangles d'allumettes Voici une chaîne formée de trois triangles. On compte 7 allumettes. - Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 10 triangles ? - Explique comment tu peux savoir le nombre d'allumettes pour n'importe quelle chaîne de triangles.	

Tableau 2 : *Les problèmes du test de généralisation*

Pour distinguer entre les deux catégories des élèves, nous dirons tout simplement : élèves du primaire et élèves du collège. L'échantillon des élèves des écoles primaires est constitué de 1072 élèves et celui des élèves des collèges est constitué de 1336 élèves. Pour chacun des deux niveaux, les élèves ont été répartis au hasard en deux groupes, le premier groupe a traité les problèmes de comparaison alors que l'autre groupe a répondu aux problèmes de généralisation. Le Tableau 3 présente la répartition des élèves selon le test passé.

Niveau	Nombre des élèves / Test		Total
	Comparaison	Généralisation	
Primaire	685	387	1072
Collège	557	779	1336
Total	1242	1166	2408

Tableau 3 : *Répartition des élèves selon le type de test passé*

V. ANALYSE DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES

1. Analyse des résultats du test de comparaison

Le test de comparaison a été administré à un total de 1242 élèves. Le Problème 1 est de type connecté, sa résolution nécessite une opération de soustraction, il a été introduit dans le test pour encourager les élèves à entrer dans le jeu. Par sa nature, il peut être résolu par un raisonnement arithmétique écrit dans un registre numérique. Le Tableau 4 résume la répartition des réponses au

Problème 1.

	Réponses correctes	Réponses erronées ou incomplète	Pas de réponse
Pri maire	71,24 % (488)	6,57 % (45)	22,19 % (152)
Col lège	77,56 % (432)	14,00 % (78)	08,44 % (47)

Tableau 4 : *Répartition des réponses pour le Problème 1*

On constate que sa résolution a été réussie par 488 élèves du primaire sur un total de 533 élèves qui ont essayé de le résoudre, soit un taux de 91,55 % de réussite, alors que ce taux est de 432 sur 510, soit 84,70 % pour les élèves du collège interrogés.

Les problèmes 2 et 3 sont de type déconnecté avec une seule relation de comparaison. Les tableaux 5 et 6 résument la répartition des réponses aux deux problèmes 2 et 3.

	Réponses correctes	Réponses erronées ou incomplète	Pas de réponse
Pri maire	20,15% (138)	53,87 % (369)	25,98 % (178)
Col lège	13,64 % (76)	66,97 % (373)	19,39 % (108)

Tableau 5 : *Répartition des réponses pour le Problème 2*

	Réponses correctes	Réponses erronées ou incomplète	Pas de réponse
Pri maire	21,31% (146)	45,40 % (311)	33,29 % (228)
Col lège	15,80 % (88)	47,94 % (267)	36,26 % (202)

Tableau 6 : *Répartition des réponses pour le Problème 3*

On constate que la résolution du Problème 2 a été réussie par 138 élèves du primaire sur un total de 507 élèves qui ont essayé de résoudre, soit un taux de 27,21 % de réussite, alors que ce taux est de 76 sur 449, soit 16,93 % pour les élèves du collège interrogés. Pour le Problème 3, ce taux de réussite est de 146 sur 457, soit 31,95 %, pour le primaire et 88 sur 355, soit 24,79 %, pour le collège.

Les problèmes 4 et 5 sont de type déconnecté avec deux relations de comparaison. Les tableaux 7 et 8 résument la répartition des réponses aux deux problèmes 4 et 5.

	Réponses correctes	Réponses erronées ou incomplète	Pas de réponse
Primaire	16,06% (110)	43,06 % (295)	40,88% (280)
Collège	07,00 % (39)	49,91 % (278)	43,09 % (240)

Tableau 7 : *Répartition des réponses pour le Problème 4*

	Réponses correctes	Réponses erronées ou incomplète	Pas de réponse
Primaire	7,45% (51)	43,94 % (301)	48,61% (333)
Collège	04,31 % (24)	46,68 % (260)	49,01 % (273)

Tableau 8 : *Répartition des réponses pour le Problème 5*

On constate que la résolution du Problème 4 a été réussie par 110 élèves du primaire sur un total de 405 élèves qui ont essayé de le résoudre, soit un taux de 27,16 % de réussite, alors que ce taux est de 39 sur 317, soit 12,30 % pour les élèves du collège interrogés. Pour le Problème 5, ce taux de réussite est de 51 sur 352, soit 14,49 %, pour le primaire et 24 sur 284, soit 8,45 %, pour le collège. Le diagramme en bâtons suivant (Figure 1) résume les taux (calculés par rapport au nombre total des réponses correctes dans chaque catégorie d'élèves) de réussite dans les différents problèmes du test de comparaison.

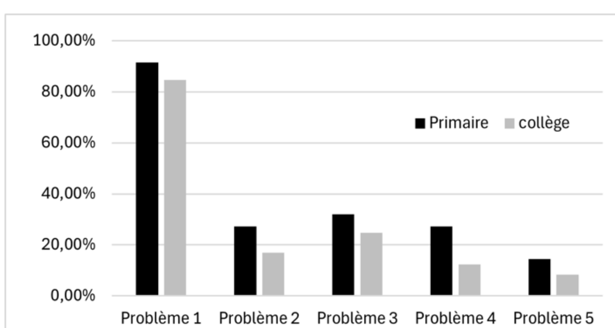


Figure 1 : *Taux de réussite dans les différents problèmes du test de comparaison*

À ce niveau d'analyse, on constate que, globalement, les élèves du primaire ont eu un peu plus de succès dans la résolution des cinq problèmes du test de comparaison que ceux du collège. Pour essayer de comprendre cette différence, nous allons affiner notre analyse, en nous limitant aux quatre problèmes de type déconnecté et en ne prenant en compte que les tentatives de résolutions effectives selon chaque problème. Le Tableau 9 suivant synthétise les catégories de raisonnements des élèves pour les problèmes 2 à 5 du test de comparaison selon les types de raisonnements et les registres de représentations sémiotiques.

Types de raisonnements et Registres de représentations	Nombres de réponses et Fréquences	
	Primaire	Collège
Arithmétique Registre intermédiaire (ARi)	0,29% (5)	0% (0)
Arithmétique Registre numérique (ARn)	58,22% (1002)	65,98% (927)
À tendance algébrique Registre intermédiaire (TALi)	0,06% (1)	0% (0)
À tendance algébrique Registre numérique (TALn)	0% (0)	0,21% (3)
Algébrique Registre algébrique (ALa)	0,93% (16)	22,21% (312)
Algébrique Registre intermédiaire (ALi)	3,78% (65)	0,28% (4)
Algébrique Registre numérique (ALn)	36,72% (632)	11,32% (159)

Tableau 9 : *Raisonnements des élèves dans les problèmes 2 à 5 du test de comparaison*

On constate que la quasi-totalité des raisonnements produits par les élèves du primaire sont exprimés dans un registre numérique, ce qui est attendu vu que ces élèves n'ont reçu aucun enseignement de l'algèbre formel. En revanche, le fait que plus des trois quarts des élèves du collège utilisent un registre numérique, nous pousse à se poser des questions, surtout que presque le quart d'entre eux utilise le registre algébrique conventionnel. Les raisonnements à tendance algébrique sont absents dans les deux catégories d'élèves interrogés.

En ne prenant en compte que les raisonnements qui ont abouti dans le test de comparaison, le Tableau 10 suivant résume les taux calculés par rapport au nombre total des raisonnements produits dans chaque catégorie d'élèves.

Types de raisonnements et Registres de représentations	Nombres de réponses et Fréquences	
	Primaire	Collège
Algébrique Registre algébrique (ALa)	0,29%	10,46%
Algébrique Registre intermédiaire (ALi)	1,45%	0,07%
Algébrique Registre numérique (ALn)	22,31%	5,12%
Arithmétique Registre numérique (ARn)	1,80%	0,43%
À tendance algébrique Registre numérique (TALn)	0,00%	0,07%

Tableau 10 : *Raisonnements réussis des élèves dans les problèmes 2 à 5 du test de comparaison*

Le graphique suivant (Figure 2) représente les données du Tableau 10.

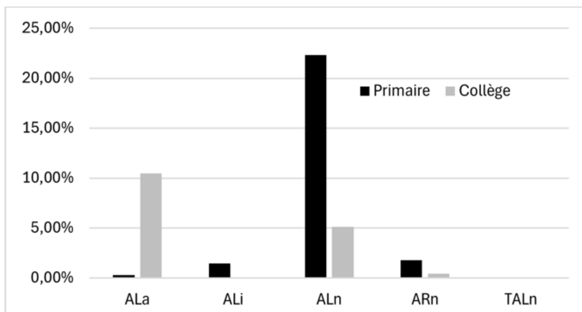


Figure 2 : *Taux des raisonnements corrects des élèves pour les problèmes 2 à 5 du test de comparaison*

On peut aussi constater que 384 élèves du primaire ont été capables de produire, dans un registre numérique, des raisonnements de nature algébrique corrects. En revanche, il semble que l'introduction du concept d'équation dans le collège pousse les élèves à privilégier une résolution purement algébrique. Mais il parait qu'au moment du passage du test, les élèves du collège interrogés n'étaient pas encore familiarisés avec la modélisation, par les équations, de problèmes de partage inéquitable. Ce qui peut consolider les résultats du travail de Bednarz et Janvier (1996) cité dans (Adihou et al., 2015) : « Leur étude fait aussi ressortir les difficultés des élèves de revenir à des résolutions arithmétiques lorsque ces derniers maitrisent les résolutions algébriques. » (Adihou et al., 2015, p. 208).

2.Analyse des résultats du test de généralisation

Le test de généralisation a été administré à un échantillon de 387 élèves du primaire et 779 du collège (voir Tableau 3), soit un total de 1166 élèves. Il est composé de deux problèmes, le premier est un programme de calcul, dans le second, on donne deux formulations des problèmes des maisons d'allumettes, la première avec des carrés et la seconde avec des triangles. De la même manière qu'au test de comparaison, les réponses des élèves ont été classées selon leur nature. Le Tableau 11 résume les réponses des élèves aux deux problèmes de généralisation.

	Réponses correctes		Réponses erronées ou incomplètes		Pas de Réponse	
	Primaire	Collège	Primaire	Collège	Primaire	Collège
Problème 1	3,62 % (14)	22,85% (178)	91,21% (353)	51,48% (401)	5,17% (20)	25,67% (200)
Problème 2A	4,91 % (19)	5,91% (46)	43,67% (169)	40,69% (317)	51,42% (199)	53,40% (416)
Problème 2B	5,68 % (22)	6,16% (48)	40,57% (157)	37,23% (290)	53,75% (208)	56,61% (441)

Tableau 11 : *Réponses des élèves aux problèmes de généralisation*

Les résultats de l'analyse présentés dans le Tableau 11 montrent qu'en dehors du Problème 1, qui été réussi par 178 élèves du collège, presque 95 % des élèves interrogés sont incapables de proposer des réponses correctes à ces problèmes. Nous pensons que ces élèves n'étaient pas familiarisés avec des problèmes de généralisation.

Si on se limite aux élèves qui ont tenté de répondre aux problèmes du test de généralisation, on constate (voir Figure 3) que les élèves du collège ont eu beaucoup plus de succès dans le Problème 1 que ceux du primaire. En revanche, les taux de réussite dans les deux parties du Problème 2 sont très faibles et presque identiques.

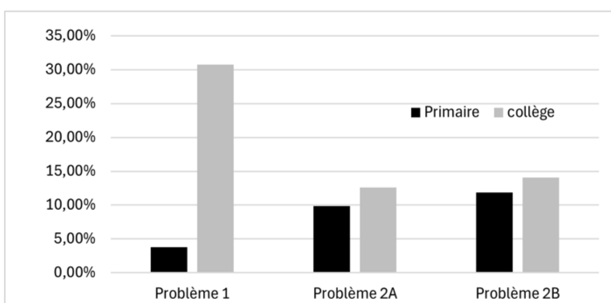


Figure 3 *: Taux de réussite dans les différents problèmes du test de généralisation*

Un premier constat est que l'enseignement de l'algèbre au collège peut être à l'origine de cet écart entre les performances entre les élèves du primaire et ceux du collège dans la résolution du Problème 1 du test de généralisation. En effet, la majorité des raisonnements produits par les élèves du collège, pour ce problème, sont de type algébrique écrits dans le registre algébrique conventionnel. Ce constat peut être affiné par l'analyse des raisonnements des élèves.

En ne prenant en compte que les tentatives de résolutions effectives selon chaque problème du test de généralisation, le Tableau 12 résume les catégories de raisonnement des élèves pour les problèmes du test de généralisation selon les types de raisonnements et les registres de représentations sémiotiques.

Types de raisonnements et Registres de représentations	Nombres de réponses et Fréquences	
	Primaire	Collège
Généralisation arithmétique registre numérique (ARn)	59,65% (439)	61,72% (1 190)
Généralisation algébrique registre intermédiaire (ARi)	0,68% (5)	0,88% (17)
Généralisation algébrique registre algébrique (ALa)	1,49% (11)	6,69% (129)
Généralisation algébrique registre numérique (ALn)	31,52% (232)	26,61% (513)
Généralisation algébrique registre intermédiaire (ALi)	6,66% (49)	4,10% (79)

Tableau 12 : *Raisonnements des élèves dans les problèmes du test de généralisation*

Nous constatons que même si les élèves du collège ont reçu un enseignement d'algèbre, ce qui explique leur performance dans le Problème 1, les résultats du Tableau 12 montrent que la majorité des raisonnements produits par les élèves des deux cycles sont de type arithmétique et ceux qui sont de type algébrique sont écrits dans le registre numérique ou des registres intermédiaires.

Le Tableau 13 représente les taux (calculés par rapport au nombre total des raisonnements produits dans chaque catégorie d'élèves) des types de raisonnements qui ont abouti dans le test de généralisation.

Types de raisonnements et Registres de représentations	Nombres de réponses et Fréquences	
	Primaire	Collège
Généralisation arithmétique registre numérique (ARn)	2,04%	20,44%
Généralisation algébrique registre intermédiaire (ARi)	0,54%	0,21%
Généralisation algébrique registre numérique (ALn)	0,41%	0,73%

Généralisation algébrique registre intermédiaire (ALi)	3,80%	2,70%
Généralisation algébrique registre algébrique (ALa)	0,68%	4,30%

Tableau 13 : *Raisonnements réussis des élèves dans les problèmes du test de généralisation*

Les résultats du Tableau 13 consolident les constats : un très faible taux des élèves a réussi le test et en ce qui est des raisonnements produits, ils sont de type arithmétique et s'ils sont de type algébrique ils sont écrits dans des registres numériques ou intermédiaires. C'est ce qu'on peut observer sur la Figure 4 qui représente les données du Tableau 13.

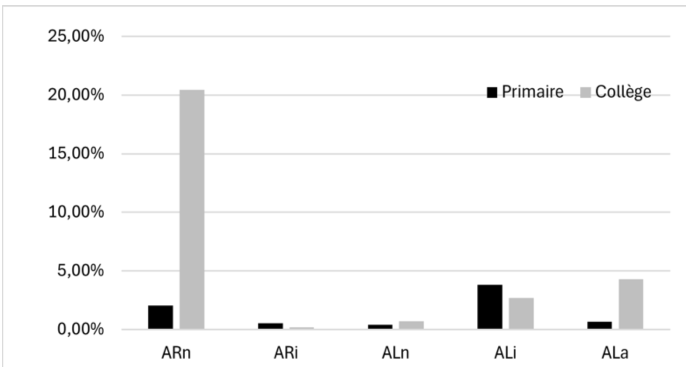


Figure 4 : les taux des types de raisonnements qui ont aboutis dans le test de généralisation

Il convient de souligner que les élèves n'avaient pas eu l'occasion de résoudre ce type de problèmes. En effet, l'analyse des traces de leurs productions témoignent de l'absence d'un effet enseignement puisqu'ils produisent des généralités très variées qu'ils justifient de manières encore très variées.

VI. CONCLUSION

L'un des objectifs de cette recherche était de documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans la résolution de problèmes de comparaison ainsi que dans la résolution de problèmes de généralisation afin de rendre compte de la manière dont les programmes préparent les élèves du primaire à l'algèbre du collège. Notre analyse révèle que les élèves du primaire sont capables de produire des raisonnements de type algébrique ou à tendance algébrique sans l'usage de registre algébrique conventionnel mais en utilisant des registres intermédiaires. En revanche, l'avènement de l'algèbre à l'entrée du collège pousse la majorité des élèves du collège vers l'utilisation du registre algébrique pour résoudre ce même type de problèmes même en l'absence de la maitrise des résolutions algébriques. Ceci nous pousse à croire qu'une bonne partie du travail de préparation réalisé au cours de l'enseignement primaire n'est pas prise en compte à l'entrée dans l'algèbre : cette capacité des élèves du primaire à produire des raisonnements algébriques n'est pas exploitée à cette entrée. Il y a donc des apprentissages à explorer chez les élèves dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. En effet, les raisonnements manifestés, dépassent ceux de la pensée arithmétique et les registres de représentation sémiotique utilisés ne sont pas nécessairement algébriques conventionnels. Il nous semble alors judicieux d'initier les élèves dès le primaire à ces types de raisonnements, aussi bien pour résoudre des problèmes de comparaison que pour aborder des problèmes de généralisation. La pertinence de l'utilisation de l'algèbre passera par un travail systématique sur des problèmes où l'utilisation de l'arithmétique atteint ses limites et n'est plus pertinente dans ces cas, donc par un travail graduel sur des problèmes de plus en plus complexes où l'algèbre semble devenir un outil plus avantageux pour leur résolution.

REFERENCES

ADIHOU, A., SQUALLI, H., SABOYA, M., TREMBLAY, M. et LAPOINTE, A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. *In* Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

BEDNARZ, N. et JANVIER, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem-solving: continuities and discontinuities. *In* J. Rossi Becker et B. J. Pence (dir.), *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 19-25). Pacific Grove : PME-NA Program Committee.

BEDNARZ, N. et JANVIER, B. (1996). Algebra as a problem solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. *In* N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra : perspectives for Research and Teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht : Kluwer.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang SA.

NAJAR, R., SQUALLI, H., ADIHOU, A. et ABOUHANIFA, S. (2021). Transition primaire collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. ITM Web Conf., 39 01002 (2021). DOI : https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901004.

SQUALLI, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

SQUALLI, H., BRONNER, A., LARGUIER, M., et ADIHOU, A. (2020a). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62.

SQUALLI, H., OLIVEIRA, I., BRONNER, A. et LARGUIER, M. (2020b). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Québec : Livres en ligne du CRIRES. En ligne : https ://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches.

SQUALLI, H. (2021). La généralisation algébrique : Un processus mathématique peu développé chez les élèves à la fin de l'école secondaire. ITM Web Conf., 39 01002 (2021). DOI : https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901002.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Modélisation mathématique, technologie et vitesse dans une perspective STIM

Fernando Hitt[26]

Université du Québec à Montréal, Canada

Matías Camacho Machín

Université de La Laguna, Espagne

Résumé – La perspective curriculaire STIM (Science, Technologie, Ingénierie et Mathématiques) est d'une grande ambition, et les défis liés à l'enseignement et à l'apprentissage dans ce cadre deviennent de plus en plus évidents. Bien que le programme STIM soit en place depuis plusieurs décennies, l'intégration progressive de ces disciplines est un sujet actuel. Du point de vue de la didactique des mathématiques, certains chercheurs, dont nous faisons partie, estiment que les processus de modélisation, en tant qu'éléments centraux, facilitent une meilleure intégration du programme. Dans ce contexte, nous présentons les résultats d'une étude menée auprès d'étudiant.e.s en formation (1re année universitaire) pour devenir des enseignant.e.s de mathématiques pour le secondaire au Québec (élèves de 12 à 16 ans). Ces résultats ouvrent de nouvelles perspectives pour l'intégration progressive des mathématiques, de la cinématique et de la technologie, en tenant compte de la modélisation mathématique.

I. INTRODUCTION

À la fin du 20e siècle et au début du 21e, deux perspectives curriculaires ont été développées dans différents pays. D'une part, l'un d'eux a été développée aux États-Unis, d'un point de vue de l'intégration de la Science, de la Technologie, de l'Ingénierie et des Mathématiques (STEM selon les sigles en anglais) ; et d'autre, une perspective curriculaire qui priorisait l'enquête (inquiry-based learning) en mathématiques et en sciences (PRIMAS, Maaßß et Reitz-Koncebovski, 2013). Dans cette dernière perspective il y avait une priorité à l'intégration des différentes didactiques des sciences, sous une approche transversale et interdisciplinaire.

La perspective curriculaire du STIM a eu un impact croissant à l'échelle mondiale, et la recherche commence à mettre en lumière certains défis liés à l'intégration des différentes branches scientifiques. Deux problèmes majeurs commencent à être analysés par les chercheurs:

1. Le déséquilibre existant dans l'intégration des différentes branches scientifiques du STIM.

[26] Hitt, F. et Matías, C. M. (2024). Modélisation mathématique, technologie et vitesse dans une perspective STIM. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT3, pp. 114-125.

2. La formation des enseignant.e.s responsables de la mise en œuvre du programme lié au STIM.

Concernant le premier point, English (2015, 2016) affirme le suivant:

Je soutiens ensuite que les mathématiques risquent d'être éclipsées, en particulier par la science, dans le climat international actuel des STIM. (p. 5)

Récemment, Lasa, Abaurrea et Iribas (2020) ont confirmé les propos d'English (2015, 2016) concernant le manque de contenu mathématique dans les activités STIM proposées aux élèves. Les auteurs, Lasa et al. (Idem), soulignent concrètement ce problème :

En affirmant l'hypothèse (A), le contenu mathématique des activités STIM est basique et utilitaire, étant principalement lié à la mesure des grandeurs, à l'interprétation statistique des nombres et à l'utilisation du langage géométrique fondamental. (p. 346)

Encore, sur cette problème d'intégration du programme d'enseignement STIM, Chalmers, Carter, Cooper et Nason (2017), faisant référence à Cooper (2014) et English (2016), soulignent que :

Dans de nombreux programmes d'intégration STIM, les étudiants ne sont pas profondément engagés dans l'élaboration de concepts en mathématiques, en ingénierie et en sciences. Il existe un problème selon lequel les composantes individuelles des STIM, en particulier les mathématiques et l'ingénierie, deviennent « estompées » à mesure que l'accent de l'enseignement passe de la construction des connaissances à l'application. (p. 3)

En retournant au travail d'English (2015), elle propose une alternative à ce problème :

Je propose des suggestions pour rehausser le profil de l'enseignement des mathématiques et illustre ces idées en décrivant deux activités qui abordent la modélisation avec des données en sixième année. (p. 5)

Concernant le deuxième point, dans la première décennie de ce siècle, Furner et Kumar (2007) ont signalé l'importance d'une intégration efficace des mathématiques et des sciences dans la formation des enseignant.e.s. Cette problème dans la formation des enseignant.e.s a été confirmée lors du congrès ADIMA 4 (2024) au cours de la discussion de sa table ronde (Bousadra et al., 2024), soulignant que ce problème demeure toujours d'actualité.

Devant cette difficile tâche d'intégration, on avait commencé à parler d'intégration partielle avec deux branches scientifiques ou plus (Sanders, 2009). Selon l'approche de Kelley et Knowles (2016), ils proposent que la communauté de pratique soit le moteur de mobilisation : de la recherche scientifique, de la conception technique, de la culture technologique et de la pensée mathématique. Tout cela, pour mobiliser l'apprentissage situé STIM. Dans cette perspective, Que signifie exactement le terme « communauté de pratique » dans notre contexte éducatif ? Question très pertinente, puisque Wenger (1998), a affirmé que ce concept avait été analysé en lien avec l'apprentissage et la production en milieu de travail.

Cette perspective invite à repenser l'analyse de la classe de mathématiques sous l'angle d'une communauté de pratique. Nous allons élaborer plus loins sur cette problématique.

Dans les sections suivantes, nous aborderons deux aspects clés : d'une part, le rôle de la modélisation mathématique dans une approche STIM intégrée, envisagée sous l'angle de la didactique des mathématiques ; d'autre part, une interprétation de la notion de communauté de pratique, en présentant une méthode d'enseignement ancrée dans l'apprentissage socioculturel. Enfin, nous illustrerons ces deux dimensions à travers une expérimentation menée auprès d'étudiant.e.s en formation pour devenir enseignant.e.s de mathématiques au secondaire au Québec.

II. LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE : UN ÉLÉMENT CLÉ D'UNE APPROCHE STIM INTÉGRÉE

Dans la même lignée de réflexion qu'English (2015) sur l'importance de promouvoir les processus de modélisation dans la classe de mathématiques, Maaß, Geiger, Romero-Ariza et Goos (2016) proposent la mise en œuvre du STIM intégré du point de vue des mathématiques, en mettant en avant trois approches interdisciplinaires: (1) les compétences du XXIe siècle ; (2) modélisation mathématique ; et (3) l'éducation à la citoyenneté responsable.

Sur ces points, ils soulignent l'importance de prendre en compte le rapport sur l'évaluation et l'enseignement des compétences du 21e siècle (ATC21S, 2009), qui s'appuie sur quatre grandes catégories :

1. Modes de pensée : créativité, pensée critique, résolution de problèmes, prise de décision et apprentissage.

2. Modes de travail : communication et collaboration.

3. Outils de travail : technologies de l'information et de la communication (TIC) et maîtrise de l'information.

4. Compétences pour vivre dans le monde : citoyenneté, vie et carrière et responsabilité personnelle et sociale.

Récemment, en mettant l'accent sur la question du développement durable, Wiegand et Borromeo-Ferri (2023) ont exploré l'utilisation des activités de modélisation mathématique comme levier pour enseigner cette thématique dans une approche pédagogique intégrative. Les auteurs cherchent à démontrer que la modélisation mathématique constitue un outil efficace pour intégrer l'éducation au développement durable dans l'enseignement.

Donc, étant donné que la didactique des mathématiques a une large littérature sur les obstacles cognitifs des élèves (e.g. Brousseau, 1998) et que la modélisation mathématique est fondamentale dans l'apprentissage selon les chercheurs avant mentionnés, nous adoptons cette problématique dans une perspective d'enseignement STIM. Notre contribution se limite à préciser comment promouvoir la communication dans la classe de mathématiques et le travail en collaboration.

La modélisation ou processus de modélisation, dans une première approche, consiste à interpréter un phénomène physique, économique, etc. en termes mathématiques. Niss, Blum et Galbraith (2007) signalent un élément très important, dans un processus de modélisation, à savoir que le processus doit être cyclique ; Ce processus permet de construire modèles intermédiaires liés aux différents registres de représentation, avant d'arriver à un modèle.

Dans cette perspective, le processus de modélisation mathématique peut être défini comme l'ensemble des actions visant à produire des représentations spontanées afin de soutenir une explication scientifique d'un phénomène étudié (Hitt et Quiroz, 2019 ; Hitt et Quiroz, accepté pour publication).

Dans ce processus, l'émergence de représentations spontanées n’est pas nécessairement institutionnelle (Hitt & Quiroz, 2019, accepté pour publication), mais, à terme, les actions des élèves et productions de représentations s'affinent pour expliquer le phénomène à travers un modèle en termes d’un système de représentations institutionnelles. Ce processus de modélisation amène à délimiter un ensemble de variables liées au phénomène étudié et à produire des explications en fonction des variables sélectionnées. De ce point de vue, en prenant en compte une approche d’apprentissage socioculturel, où la discussion est un des éléments principaux, le modèle est raffiné selon la discussion en équipe, en grand groupe et dans le processus d’autoréflexion, avant l’institutionnalisation des connaissances.

Dans la Figure 1, nous proposons un processus de mathématisation horizontale selon Freudenthal (1991), qui dans notre cas se réfèrent à la 1e étape de notre méthode d’enseignement (voir plus bas) lié au travail individuel, et peu à peu, dans un travail en équipe, il y a une promotion naturelle d’un processus de mathématisation verticale (Freudenthal, Idém). Ainsi, étant donné qu'il s'agit d'un processus cyclique, nous souhaitons utiliser le modèle d'apprentissage en spirale de Mason (1996), qui propose les étapes de manipulation, de prise de conscience et d'articulation. En intégrant ces deux points de vue théorico-practiques, nous désignerons le processus d'apprentissage comme le processus Freudenthal-Mason. Les situations ont été conçues pour favoriser, d’une part, des processus de visualisation intégrant l’intuition, la production de représentations spontanées, l’anticipation, la prédiction et la validation empirique ; et d’autre part, une progression vers la formulation d’une conjecture et une validation plus rigoureuse.

C'est précisément dans cette perspective que nous avons conçu la méthode d'enseignement que nous avons appelée ACODESA (Apprentissage Collaboratif, Débat, Autoréflexion et processus d'institutionnalisation, voir Figure 1).

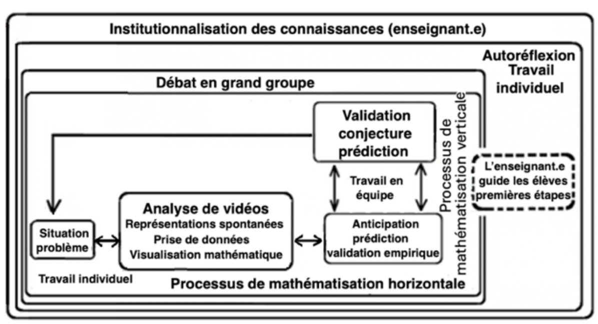


Figure 1 *– Modélisation mathématique, STIM et organisation d'activités avec ACODESA*

Cette méthode d’enseignement a été appliquée dans divers types d’études, notamment lors de la transition du primaire au secondaire (voir Hitt, Saboya et Cortés, 2017 ; Hitt, Quiroz, Saboya et Lupiañez, 2023), au niveau secondaire (Hitt et González-Martín, 2015), préuniversitaire (Dufour, 2019; Hitt et Dufour, 2021) et dans la formation des enseignant.e.s (Hitt, 2007). Dans l’ensemble de ces recherches, une évolution des représentations spontanées vers les représentations institutionnelles a été mise en évidence.

Dans cette perspective, nous avons exploré comment la technologie pouvait faciliter l’enseignement des concepts mathématiques. Nous avons choisi le concept de fonctions en partie, notion importante dans les processus de modélisation mathématique et aussi, d’étudier la dérivée d’une fonction, un concept particulièrement complexe à appréhender dans un cours de calcul différentiel. Ce choix repose sur deux raisons principales : d’une part, la possibilité d’attaquer un obstacle cognitif lié à la construction des fonctions , dans un contexte de en partiela vie réelle; et l’autre, d’établir un lien avec la cinématique, en utilisant dans les deux cas le logiciel *Tracker*, qui offre un support interactif pour aborder phénomènes de la vie réelle.

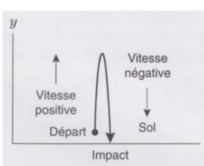
En résumé, *Tracker* nous permet d'analyser une vidéo d’un phénomène de la vie réelle et de collecter des données. Une fois les données obtenues, il est possible de les copier dans un tableau de *GeoGebra* pour proposer un modèle (graphique et algébrique) permettant d'analyser le phénomène.

III. TRACKER ET LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Nous avons intégré l’utilisation de *Tracker* et *GeoGebra* dans nos cours et expérimentations, notamment dans la formation des enseignant.e.s. Cette démarche repose sur deux constats : d’une part, les élèves de niveau préuniversitaire n’ont pas réussi à modéliser une situation proposée par Dufour (2019) sur le freinage d’un conducteur, mettant en évidence des difficultés conceptuelles (Hitt & Dufour, 2021); d’autre part, comme l’indique l’étude de Zandieh (2000), la notion de dérivée est introduite dans les manuels scolaires en lien avec la vitesse instantanée. En effet, dans les manuels américains et canadiens, le concept de dérivée est principalement enseigné à travers l’étude de la vitesse instantanée (voir Figure 2).

Hughes-Hallett, Glaeson et al. (1999)

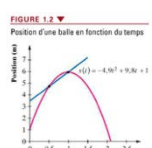
Vitesse moyenne et vitesse instantanée. Lancement vertical d'un pamplemousse. Nous voulons calculer sa vitesse pour l'instant t=1 s.



t (s)	0	1	2	3	4	5	6
y (ft)	6	90	142	162	150	106	30

Hamel et Amyotte (2007)

On lance une balle vers le haut à partir d’une hauteur de 1 m avec vitesse initiale de 9,8 m/s. En vertu de lois physiques, la position de la balle (sa hauteur mesurée en mètres) *t s* après son lancement est donnée par la fonction $s(t) = -4{,}9\, t^2 + 9{,}8t + 1$. On veut déterminer la vitesse (instantanée) de la balle 0,5 s après son lancement.



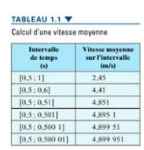


TABLEAU 1.1
Calcul d'une vitesse moyenne

Intervalle de temps (s)	Vitesse moyenne sur l'intervalle (m/s)
[0,5 ; 1]	2,45
[0,5 ; 0,6]	4,41
[0,5 ; 0,51]	4,851
[0,5 ; 0,501]	4,895 1
[0,5 ; 0,500 1]	4,899 51
[0,5 ; 0,500 01]	4,899 951

Figure 2 – *Introduction à la dérivée avec la vitesse instantanée aux États-Unis et Canada*

Le problème est que, en général, la vitesse négative est introduite immédiatement (voir Figure 2). La notion de vitesse négative est à l’origine d’obstacles cognitifs (Goldberg & Anderson, 1989; Handhika, Istiantara, Astuti, 2019; Dufour, 2019 ; Hitt et Dufour, 2021; Hitt, Soto-Munguía, Romero-Felix et Dávila-Araiza, 2022; McDermott, Rosenquist et van Zee, 1987; Zandieh, 2000).

IV. EXPÉRIMENTATION AVEC DES ÉTUDIANT.E.S EN FORMATION POUR DEVENIR ENSEIGNANT.E.S DE MATHÉMATIQUES

1.L’ascenseur

Dans le cadre d'une expérience menée auprès de 14 étudiants en formation (1re année universitaire) pour devenir professeur de mathématiques à l'école secondaire du Québec (école secondaire de 5 ans, âgés de 12 à 16 ans), on leur a posé le problème suivant :

Une entreprise d'ascenseurs demande à un ingénieur d'interpréter graphiquement le mouvement d'un ascenseur d'un étage à l'autre au cours d'une période de 12 seconds. L'entreprise vous demande de prendre en compte, pour vos représentations graphiques (croquis), les variables : Temps, Hauteur et Vitesse. Compte tenu de ces trois variables, l'ingénieur est invité à fournir trois graphiques.

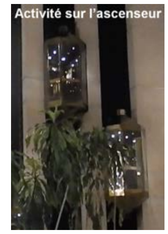


Figure 3 – Énoncé d'un problème d'un ascenseur

Les résultats ont été les suivants. Parmi les 14 productions individuelles des étudiant.e.s (sur papier), en prenant le temps comme variable indépendante et la hauteur comme variable dépendante, nous avons que :

9 ont donné une représentation d'une fonction linéaire (« / »);

3 ont donné une représentation quadratique (2 avec une concavité du type « » et 1 avec une concavité du type « »);

2 ont donné une représentation d'une fonction cubique.

La discussion en équipes n'a pas permis de faire progresser l'ensemble des membres. Toutefois, les deux réponses proposant une approche plus pertinente ont conduit à la formation d'une équipe de deux personnes, qui a poursuivi l'approfondissement de la situation.

Une fois que les étudiant.e.s ont utilisé Tracker, ils ont opté pour essayer de trouver une fonction pour modéliser le phénomène.

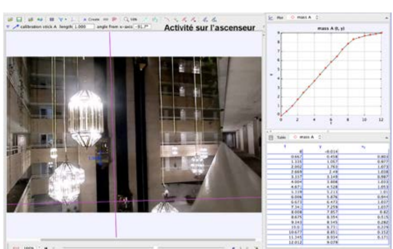


Figure 4 – Prise de données avec Tracker (ascenseur), union des points par segments

Nous utilisons Tracker pour précisément passer des idées intuitives sans précision à la modélisation de situations d'un point de vue mathématique. Les étudiant.e.s même avec le nuage de points sur *GeoGebra*, ont proposée premièrement, un ajustement lié à une fonction linéaire (majorité des étudiant.e.s), après, sa proposition a été d'une fonction quadratique et finalement l'équipe des deux étudiant.e.s a proposé une fonction cubique.

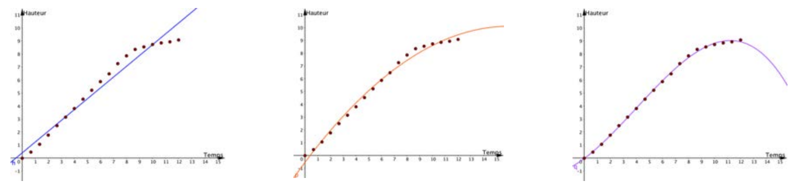


***Figure 5** – Différentes options d'ajustement d'une fonction avec GeoGebra*

Les deux étudiants avant mentions ont analysé les autres propositions et les ont rejetées en argumentant que l'ascenseur ne pouvait pas démarrer ou s'arrêter brusquement. Lors de la discussion en grand groupe, ils ont présenté une argumentation finale, qui a fait consensus parmi l'ensemble des participant.e.s (voir Figure 6).

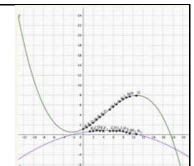
Si on visualise la hauteur de l'ascenseur selon le temps en une seul représentation, la trajectoire de l'ascenseur selon le temps correspond à une fonction polynomiale de 3e degré et sa dérivée la vitesse en fonction du temps correspond à une fonction polynomiale de 2e degré V=ΔdΔt.	

***Figure 6** – Différentes options d'ajustement d'une fonction avec GeoGebra*

On constate que, comme le montre la Figure 6, bien que les deux étudiants aient proposé un modèle plus adapté à la situation que les autres participants, ils présentent une confusion entre la notion de trajectoire de l'ascenseur et sa représentation graphique (variables temps et distance parcourue), ainsi qu'entre la notation de la vitesse moyenne et celle de la vitesse instantanée.

2.Accidents de voiture

Une fois que les étudiant.e.s ont commencé à se familiariser avec l'utilisation de Tracker et GeoGebra, ils/elles sont passé à l'utilisation de *Tracker* avec des accidents de voiture.

Dans le premier cas, lors d'un accident que l'on peut trouver sur Internet, il est possible d'utiliser Tracker. L'utilisation du *Tracker* demande une mesure, dans ce cas le modèle de la voiture est connu, cela nous permet de savoir que la longueur du Mitsubishi Outlander est de 4,656 m (donnée nécessaire pour l'utilisation de *Tracker*). Dans le second cas, ne connaissant pas exactement le type de voiture, une mesure approximative a été prise.

***Figure 7** – Vidéos sur YouTube permettant une analyse avec Tracker*

Grâce à *Tracker* et *GeoGebra*, il est possible d'analyser et de déterminer la vitesse de chaque voiture dans les deux accidents. La Figure 8 montre les résultats obtenus.

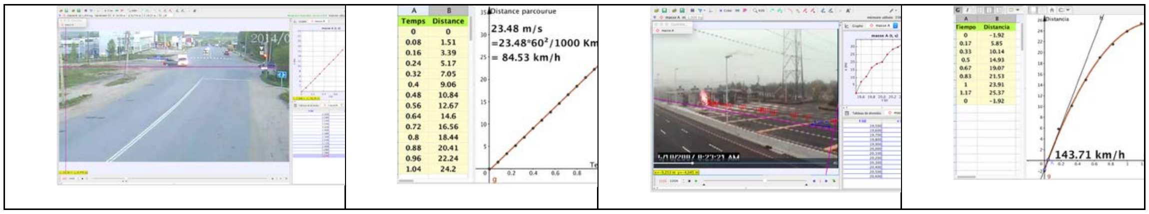


Figure 8 – *Analyse de vidéos avec Tracker et GeoGebra*

Dans le premier cas, on peut conclure que le chauffeur n'a pas tenté de freiner, sa vitesse étant restée constante tout au long du trajet. En revanche, lors du deuxième accident, le conducteur a essayé de freiner, mais n'a malheureusement pas réussi à arrêter la voiture, entraînant une collision avec la barrière. Grâce à *Tracker* et *GeoGebra*, il est possible de calculer la vitesse au moment où la voiture est apparue dans le film, laquelle est estimée à 143,71 km/h.

3.Remplissage de récipients et la fonction en parties

Un autre problème lié à la formation des enseignant.e.s est celui des programmes d'études. Prenons comme exemple le contenu lié à la fonction en parties.

Dans le PFEQ (2007), 2e cycle au secondaire, le thème de la fonction en parties est brièvement évoqué, alors qu'il est fondamental dans les processus de modélisation mathématique :

Pour les fonctions périodiques, définies par parties et en escalier, la représentation graphique en relation avec le contexte est privilégiée même si, dans certains cas, le registre symbolique pourrait être utilisé. (p. 80)

Nous avons fait un vidéo (remplissage d'un grand verre) et nous avons demandé aux futurs enseignant.e.s (1re année universitaire) d'expliquer le phénomène observé en utilisant le logiciel *Tracker* (voir Figure 9).

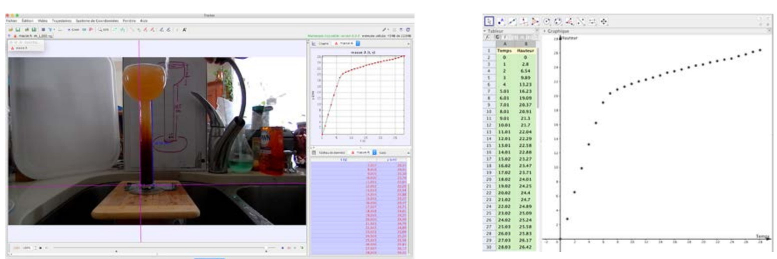


Figure 9 – *Données obtenues avec Tracker et nuage de points avec GeoGebra*

Une fois les données recueillies, les 14 étudiant.e.s ont successivement proposé soit une fonction linéaire, soit une fonction quadratique, et enfin une fonction cubique, sans jamais envisager une fonction en parties. De plus, la discussion en équipes n'a pas permis de faire évoluer leurs propositions.

Cela met en évidence un obstacle épistémologique, défini comme une conception qui entrave la construction cognitive d'un concept (Brousseau, 1998). Dans notre cas, l'obstacle repose sur l'idée que "*toute fonction doit être continue et exprimée par une seule form*ule". Cette conception se retrouve également chez certains enseignant.e.s de mathématiques en service (Hitt, 1994).

Finalement, à la demande du professeur de faire une analyse plus approfondie, les étudiant.e.s ont réussi à examiner la situation en visualisant le contenant en deux parties (voir Figure 10).

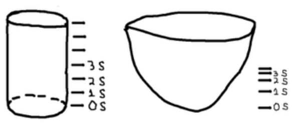


Figure 10 *– Analyse de la situation en deux parties*

L'analyse du récipient, 1e partie cylindrique et après similitude avec une demi-sphère, a promu la proposition d'une fonction en parties (linéaire et cubique, voir Figure 12).

Fonction en parties construite à l'aide de GeoGebra et l'instruction AjustPoly.

$fx=\{3,24x-0,05,$ si $0\leq x\leq 6,2$
$0,00043x^3-0,03x^2+0,77x+16,18,$ si $6,2<x\leq 28,03$

Figure 11 *– Fonction en parties avec Geogebra*

V. CONCLUSION

La recherche sur les processus de modélisation analysés dans ce document met en évidence l'importance d'adopter une approche d'intégration STIM sous l'angle de la didactique des mathématiques. Cette perspective s'inscrit dans la continuité des travaux d'English (2015, 2016), de Maaß, Geiger, Romero-Ariza et Goos (2016), et plus particulièrement de Wiegand et Borromeo-Ferri (2023). Ces derniers auteurs soulignent la nécessité de valoriser les processus de modélisation mathématique pour favoriser une approche pédagogique intégrative et relever les défis liés à l'éducation au développement durable.

Dans ce document nous avons montré les difficultés que les étudiant.e.s ont avec les processus de modélisation mathématique pour modéliser certaines situations de la vie réelle. Aussi, nous considérons que le contenu lié à la fonction en parties n'est pas suffisamment traité dans les manuels scolaires et la priorité que font les auteurs sur l'utilisation des fonctions continues favorise l'ancrage à un obstacle épistémologique qui s'oppose à un processus de modélisation plus approprié à la situation étudiée.

Nous avons également démontré que l'utilisation de la technologie, notamment *Tracker* et *GeoGebra*, facilite le processus de modélisation mathématique dans une approche de découverte guidée, comme le suggère Freudenthal (1991). L'analyse vidéo via *Tracker* offre aux étudiant.e.s une approche plus précise, leur permettant de formuler, prédire et évaluer une conjecture. Ce processus favorise ainsi un apprentissage en spirale, s'inscrivant dans l'approche Freudenthal-Mason.

Dans notre approche d'intégration du STIM, la technologie a joué un rôle instrumental. Il serait important de penser à lui donner plus de place dans une intégration du STIM.

Nous avons conçu des activités basées sur la cinématique, car certains concepts mathématiques, comme la vitesse instantanée, sont abordés dans les manuels scolaires de mathématiques dans l'apprentissage du calcul différentiel. Cette branche de la physique étant étroitement liée aux mathématiques, son intégration s'avère naturelle. Il serait néanmoins pertinent d'explorer d'autres activités issues d'autres domaines de la physique pour enrichir cette approche.

Une limitation de cette étude réside dans le fait que nous nous sommes focalisées sur le processus de modélisation mathématique. Dans une approche d'intégration du STIM, il est essentiel d'élargir la notion de modèle à d'autres disciplines scientifiques, comme le souligne dans son ouvrage Nouvel (2002).

RÉFÉRENCES

BOUSADRA, F., DARHMAOUI, H., GHABBAR, Y., et MARRAKECHI MEN, A. (2024). Table ronde. Le mouvement des STIM en éducation à l'ère des mutations technologiques et sociétales : entre les opportunités et les défis. ADIMA 4, Benguerir, Maroc.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHALMERS, Ch., CARTER, M-L., COOPER T, et NASON, R. (2017). Implementing big ideas to advance the teaching and learning of science, technology, engineering and mathematics (STEM). *International Journal of STEM Education*. Open acces: DOI 10.1007/s10763-017-9799-1.

COOPER, T. (2014). YuMi Deadly Maths: Big ideas for mathematics: Prep to Year 9. Kelvin Grove, Qld: YuMi Deadly Centre, Queensland University of Technology.

DUFOUR, S. (2019). *Le processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée*. Thèse doctorale. UQAM. Mars 2019. https://archipel.uqam.ca/12668/

ENGLISH, L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July 2015, Hobart, Australia.

ENGLISH, L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*. Open acces: DOI 10.1186/s40594-016-0036-1.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

FURNER, J.M. et KUMAR, D. D. (2007) The Mathematics and Science Integration Argument: A Stand for Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3, 185-189.

GEOGEBRA. software libre : http://www.geogebra.org/cms/.

GOLDBERG, F. et ANDERSON, J. (1989). Student difficulties with graphical representations of negative values of velocity. *The Physics Teacher, 27*, 254-260. doi: 10.1119/1.2342748

HAMEL, J. et AMYOTTE, L. (2007). *Calcul différentiel*; Éditions du renouveau pédagogique: Canada; ISBN 978-2-7613-2404-5.

HANDHIKA, J., ISTIANTARA, D.T. et ASTUTI, S.W. (2019). Using Graphical Presentation to Reveals the Student's Conception of Kinematics. In Proceedings of the Journal of Physics: Conference Series; IOP Publishing, 2019; Vol. 1321, p. 032064.

HITT, F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 10-20.

HITT, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

HITT, F. et DUFOUR, S. (2021). Introduction to Calculus through an Open-Ended Task in the Context of Speed: Representations and Actions by Students in Action. *ZDM – Math. Educ. 53*, 635–647.

HITT, F. et GONZALEZ-MARTIN, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

HITT, F. et QUIROZ, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers d'un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

HITT, F. et QUIROZ, S. (2025, accepted for publication). Non-institutional representations' evolution in a modeling process of teaching (ACODESA). *Advances in Research in Mathematics Education*.

HITT, F., QUIROZ, S., SABOYA, M. et LUPIÁÑES, J-L. (2023). Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines. *Educación Matemática*, 35(3), 112-150.

HITT, F. SOTO-MUNGUIA, J-L, ROMERO-FELIX, C-F et DAVILA-ARAIZA, M-T. (2022). Reflection on the STEM integration between concepts of kinematics and calculus. *Far East Journal of Mathematical Education*, 23, 57-96.

HUGHES-HELLETT, D., GLEASON, D., A-M., *et al*. (1999). Fonctions d'une variable. Traducción de: Calculus: Single variable, 2nd edition. Montréal: Chenelière/McGraw-Hill.

KELLEY, T.R. et KNOWLES, J.G. (2016). A Conceptual Framework for Integrated STEM Education. *Int. J. STEM Educ. 3*, 11,

LASA, A., ABAURREA, J. et IRIBAS, H. (2020). Mathematical content on STEM activities. *Journal on Mathematics Education*, 11(3), 333-346.

MAAßß, K., REITZ-KONCEBOVSKI, K. (2013). Primas (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe). Inquiry-Based Learning in Maths and Science.

MAAßß, K., GEIGER, V., ROMERO-ARIZA, M., et GOOS, M. (2016). *ZDM-Mathematics Education*, 51, 869-884.

MASON, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

MCDERMONTT, L.C., ROSENQUIST, M.L. et VAN ZEE, E.H. (1987). Student Difficulties in Connecting Graphs and Physics: Examples from Kinematics. *Am. J. Phys. 55*, 503–513.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2007). Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. Gouvernement du Québec.

NISS, M., BLUM, W. et GALBRAITH, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, et M. Niss (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education (10th ed., pp. 2-32). New York, NY : Springer.

NOUVEL, P. (2002). Enquête sur le concept de modèle. Paris : PUF.

SANDERS, M. (2009). Integrative STEM Education: Primer. *Technol. Teach. 68*, 20–26.

TRACKER. Logiciel libre. *Video analysis and modeling tool.* http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/

WIEGAND, S. et BORROMEO-FERRI, R. (2023). Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. *ZDM-Mathematics Education*, 55, 1269-1282.

WENGER, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ZANDIETH, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. *CBMS Issues Math. Educ. 8*, 103–127.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

STIM et la généralisation arithmético-algébrique dans une approche par compétences à l'école québécoise et mexicaine

Fernando Hitt[27]

Université du Québec à Montréal, Québec

Samantha Quiroz Rivera

Universidad Autónoma de Coahuila, México

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal, Québec

Résumé – Dans le programme STIM qui a débuté à la fin du siècle dernier, il apparaît que l'intégration des sciences n'est pas souvent aisée. Du point de vue de la didactique des mathématiques, cette intégration devrait considérer la modélisation mathématique comme son noyau. Sous cet angle, la généralisation en mathématiques est un élément essentiel de ce noyau, qui doit d'ailleurs être considérée dès le plus jeune âge dans le système scolaire. Dans cet article, nous nous intéressons aux processus de généralisation dans des situations en contexte avec des élèves 11-12 ans (6e année du primaire), en concentrant notre attention sur la construction socioculturelle d'une pensée arithmético-algébrique. Le projet a été développé au Québec et au Mexique et s'inscrit dans la transition primaire-secondaire. Nous nous intéressons au développement d'une structure cognitive liée aux processus de prédiction, de conjecture et de validation dans la résolution de situations d'investigation où, une mathématisation horizontale est développée suivie d'une mathématisation verticale. Notre projet n'est pas centré sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre, mais sur une articulation entre l'arithmétique et l'algèbre à travers l'expression d'une pensée arithmético-algébrique.

I. INTRODUCTION

La dernière décennie du XXe siècle a, de tout évidence, préparé le terrain au nouveau siècle. Ainsi, on a vu s'épanouir des théories sur les représentations (e.g., Duval, 1995) ; des théories sur la visualisation mathématique (e.g., Zimmermann & Cunningham 1991) ; la genèse instrumentale (Rabardel, 1995) et le projet STIM (Science, Technologie, Ingénierie et Mathématiques, STEM en Anglais). Ce dernier programme repose sur « Des approches qui explorent l'enseignement et l'apprentissage entre deux ou plusieurs matières STIM, et/ou entre un contenu STIM et un ou plusieurs contenus scolaires » (Sanders, 2009, p. 21). Toutefois cette intégration est complexe (e.g.,

---

[27] Hitt, F., Quiroz Rivera, S. et Saboya, M. (2024). STIM et la généralisation arithmético-algébrique dans une approche par compétences à l'école québécoise et mexicaine. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT3, pp. 126-138.

Chalmers et al., 2017; Keller & Knowles, 2016), ce qui a conduit à l'envisager de façon progressive. L'Europe, avec son projet PRIMAS (Promote Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe) (Maaßß et Reitz-Koncebovski, 2013), se centrait plutôt sur l'importance de la modélisation mathématique comme élément essentiel dans l'intégration des différentes didactiques et de la science. Actuellement, dans la perspective d'intégration STIM, Maaßß, Geiger, Romero-Ariza et Goos (2016), et aussi Wiegand et Borromeo-Ferri (2023), proposent encore la modélisation mathématique au cœur de cette intégration.

Notre contribution se concentre sur le développement des habiletés fondamentales soutenant les compétences essentielles à l'intégration des sciences. S'inscrivant dans les tendances précédemment mentionnées, un projet mené par des chercheurs du Québec et du Mexique a émergé, combinant modélisation mathématique, contextualisation et usage de la technologie.

II. LA REFORME ET L'APPROCHE PAR COMPÉTENCES AU QUÉBEC ET AU MEXIQUE

Les ministères de divers pays européens ont décidé de débuter le XXIe siècle avec une réforme par compétences (e.g. la Belgique avec le programme Décret Missions). Ainsi, après une approche par la résolution de problèmes, le ministère de l'Éducation du Québec entre 2001 et 2004 et celui du Mexique en 2011, ont décidé de s'inscrire dans une approche par compétences. Le ministère du Québec a priorisé un cadre théorique socioconstructiviste tout en gardant un lien avec le constructivisme et le cognitivisme et le Mexique avec le constructivisme.

Le Québec a mis l'accent sur la 1re compétence, *Résoudre une situation-problème* et le Mexique sur la résolution d'un enchainement de situations mathématiques. Le ministère de l'Éducation du Québec (MELS 2007), a donné une caractérisation de cette 1re compétence qui est liée à la créativité : a) la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage ; b) l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage ; c) le produit, ou sa forme attendue n'a pas été présenté antérieurement. (p. 19)

Dans ces deux pays, les enseignant.e.s ont été préoccupé.e.s par la mise en place de cette nouvelle approche. En effet, le problème principal provient de la construction de situations d'exploration ou de découverte pour la classe de mathématiques sous une approche par compétences où la 1re compétence est associée à la créativité, cette dernière étant liée à l'émergence d'idées intuitives et de représentations spontanées. Mais qu'entend-on par créativité ?

La créativité, comme sujet d'étude, a été étudiée par plusieurs psychologues (e.g., Bear, 1993; Guilford, 1950; Wallas, 1926), mathématiciens (e.g., Hadamard, 1945), et didacticiens de mathématiques (e.g. Brousseau, 1998) dans le XXe siècle. Cela a donné lieu à la notion de *pensée divergente* (associée à la créativité) et de *pensée convergente* (associée à la solution au problème posé). Si nous empruntons l'approche théorique de Guilford (1967) reprise par Razumnikova (2013), les pensées divergente et convergente peuvent se résumer ainsi :

La pensée divergente est définie comme la production d'un assortiment diversifié de réponses appropriées à une question ouverte ou à une tâche dans laquelle le produit n'est pas complètement déterminé par l'information fournie. Cette pensée se concentre sur la génération d'un grand nombre de réponses alternatives, y compris des idées originales, inattendues ou inhabituelles. Ainsi, la pensée divergente est associée à la créativité. La pensée convergente consiste à ne trouver que la seule bonne réponse, conventionnelle à un problème bien défini. (p. 1)

Cette idée de Guilford d'« *assortiment diversifié de réponses* » est liée à la production de représentations spontanées qui ne sont pas nécessairement institutionnelles. Hitt & Quiroz (2019) proposent de s'intéresser aux représentations fonctionnelles spontanées (RF-S) composées d'une partie mentale à travers les représentations spontanées externes à la personne :

> **Définition.** Une RF-S est une représentation qui émerge chez les individus dans la pratique, face à une activité non routinière : les actions liées à l'interaction avec la situation ont des caractéristiques fonctionnelles (mentales, orales, kinesthésiques, schématiques) et sont liées à une représentation spontanée (externe). La représentation est fonctionnelle dans le sens où l'élève a besoin de donner un sens à la situation et elle est spontanée, car elle s'exprime naturellement dans l'action quand on essaye de comprendre et de résoudre la situation non routinière. (p. 79)

Donc, la question est de savoir, comment construire des situations d'exploration complexes dans la classe de mathématiques qui vont promouvoir une pensée divergente (liée à l'émergence des RF-S) suivie d'une pensée convergente ? De notre point de vue théorico-pratique, en considérant à la fois les idées de Freudenthal (1991) sur la découverte guidée, les processus de mathématisation horizontale et verticale, et celles de Mason (1996) sur l'apprentissage en spirale et la notion de situations a-didactiques de Brousseau (1998).

Freudenthal (1991) définit la *mathématisation horizontale* comme le processus de transition d'une situation du monde réel vers une formulation mathématique. Une fois cette situation exprimée en termes mathématiques, la *mathématisation verticale* intervient, impliquant la manipulation d'expressions, la formalisation, la généralisation et l'établissement de connexions avec d'autres concepts mathématiques.

Nous nous sommes appuyés sur ces idées pour préciser le processus de mathématisation horizontale des élèves, en lien avec l'anticipation, la prédiction et la validation empirique lors du travail individuel selon la méthode ACODESA (voir plus bas), où les représentations spontanées jouent un rôle essentiel. Ensuite, à travers le travail en équipe et l'évolution des représentations, notre intérêt s'est porté sur les processus de mathématisation verticale.

Dans cette perspective, nous considérons une situation d'exploration complexe comme une situation d'investigation (SI), où une série de questions essayent de promouvoir une découverte guidée. Ces questions sont enchaînées de manière à favoriser les processus de mathématisation horizontale et verticale, et avec la méthode d'enseignement ACODESA, un apprentissage en spirale. Cette approche se distingue de la simple résolution d'un problème, qui pourrait être présenté sous la forme d'une question unique avec un objectif précis. Ainsi, nous privilégions un travail d'exploration et de découverte en classe de mathématiques en structurant les activités selon quatre catégories : 1. Situations d'investigation (SI) : pour encourager une pensée divergente ; 2. Problèmes (P) : pour favoriser une pensée à la fois divergente et convergente ; 3. Exercices (E) : pour soutenir la pensée convergente ; 4. Situations d'apprentissage et d'évaluation (SAÉ) : pour l'évaluation des acquis.

III. MÉTHODE D'ENSEIGNEMENT POUR PROMOUVOIR LA CRÉATIVITÉ DANS LA CLASSE

Dans un projet conjoint entre le Québec et le Mexique, nous avons développé une méthode d'enseignement liée à la créativité et sous une approche par compétences. La modélisation mathématique est au cœur de notre proposition. Il s'agit d'une méthode d'enseignement, que nous avons appelée ACODESA (**A**pprentissage en **CO**llaboration, **DÉ**bat **S**cientifique, **A**utoréflexion) en 5 étapes (Hitt 2007 ; Hitt & González-Martín 2015 ; Hitt, Saboya & Cortés 2017 ; Hitt, Quiroz, Saboya & Lupiáñez, 2023) : *1re étape : le travail individuel* ; *2e étape : le travail en équipe* ; *3e étape : la discussion en grand groupe* ; *4e étape : l'autoréflexion (retour au travail individuel)* ; *5e étape : processus d'institutionnalisation des connaissances*. Tout au long du processus, les idées intuitives initiales des élèves (dans une mathématique horizontale) sont guidées avec des questions enchainées. Les élèves ont la possibilité de présenter des représentations non institutionnelles, ces RF-S qui émergent sont liées à la pensée divergente et sont soutenues par la communication en classe. Dans chaque étape de la méthode ACODESA, les RF-S sont raffinées dans un processus de pensée convergente et par la promotion d'une mathématisation verticale. L'enseignant ayant le rôle d'un guide dans les premières étapes (voir figures 1 et 2). Notre proposition a une base théorico-pratique liée à une approche socioculturelle de l'apprentissage (voir Hitt & Quiroz 2019).

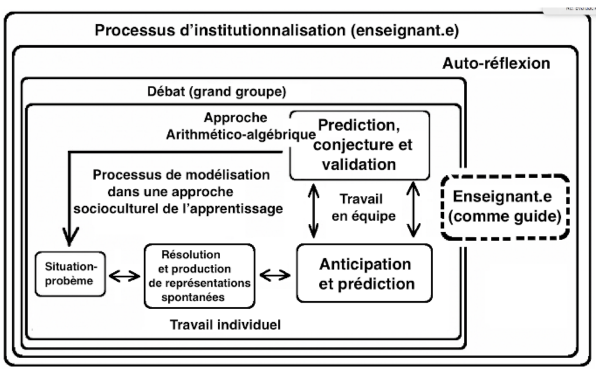


Figure 1 *– Étapes d'ACODESA dans la classe de mathématiques (Hitt et al., 2023, p. 123)*

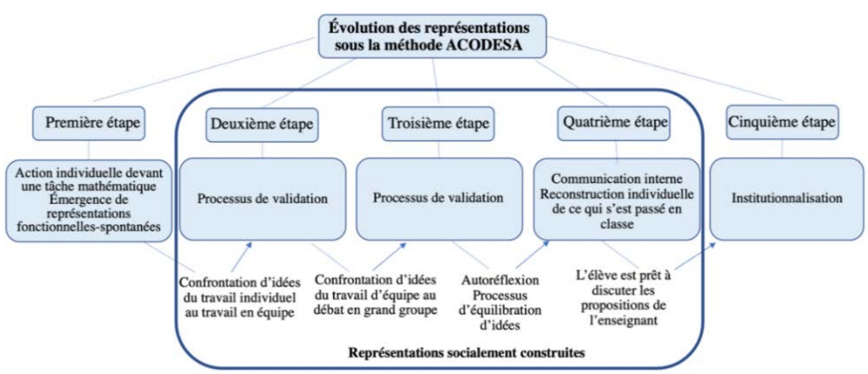


Figure 2 *– Évolution des RF-S selon la méthode d'enseignement ACODESA (Hitt & Quiroz, 2019, p. 83)*

Dans le cadre de notre projet de recherche, nous avons conçu six situations d'investigation (SI) mises en œuvre selon la méthode ACODESA. La sixième SI, portant sur les nombres polygonaux, a été expérimentée au Québec auprès d'élèves de 12-13 ans (début du secondaire) et au Mexique avec des élèves de 14-15 ans. Les cinq premières SI, quant à elles, ont été mises en œuvre exclusivement au Mexique auprès d'élèves de 11-12 ans (fin du primaire). Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'expression d'une pensée divergente chez les élèves, à travers l'émergence de RF-S.

IV. Expérimentation dans une approche stim

L'expérimentation conjointe (Québec-Mexique) a débuté à l'école secondaire (12-13 ans) avec une situation sur les nombres polygonaux (voir figure 3, la sixième SI). Les résultats prometteurs obtenus autour de l'émergence de RF-S (et qui vont être présentés à la section 4.1), nous ont poussé à poursuivre notre projet à l'école primaire (élèves de 11-12 ans, voir figure 3, SI de 1 à 5). Il est à noter que les SI présentent une suite de motifs figurés et qu'elles sont accompagnées d'un applet qui permet aux élèves de vérifier leurs conjectures. Nous avons a priori organisé les SI en ordre de difficulté.

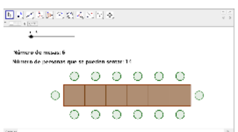
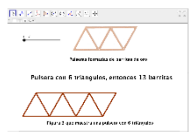
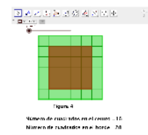
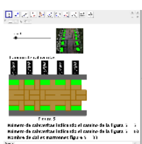
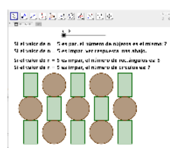
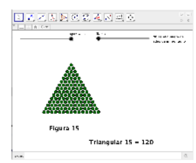
1. Le restaurant de Marcel 	**0.** Bijouterie « El Dorado » 	**0.** Les fenêtres 
0. Jardin des citrouilles (Québec) et « calaveritas » (Mexique) 	**0.** Rectangles et cercles 	**0.** Nombres polygonaux 

Figure 3 *– Séquence des SI et applets, les 5 premières étant expérimentées à l'école primaire au Mexique et la 6e au secondaire au Québec et au Mexique*

Les quatre premières SI s'appuient sur un contexte de la vie réelle, et les deux autres sur un contexte mathématique. Toutes les SI ont été élaborées en misant au départ sur le fait que les idées intuitives initiales (visualisation mathématique, prédiction, anticipation, processus de dévolution) vont émerger dans une approche liée à la mathématisation horizontale. Par la suite, la sensibilité à la contradiction, la conjecture et la validation vont prendre le relais dans une approche liée à une mathématisation verticale.

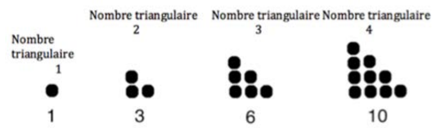
L'objectif des deux SI présentées ci-dessous est d'analyser l'évolution des représentations spontanées des élèves dans un processus de généralisation, s'inscrivant ainsi dans une démarche de modélisation.

IV. RÉSULTATS DES EXPÉRIMENTATIONS

1. Résultats de l'expérimentation menée au Québec sur les nombres polygonaux

La figure 4 présente la SI sur les nombres triangulaires.

Il y a très très longtemps (vers l'an 520 avant C.), un mathématicien du nom Pythagore fonda une école dans une île dans la Grèce antique. Ses élèves étaient fascinés à la fois par les nombres et par la géométrie. Une de leur découverte consistait à représenter les nombres par des figures géométriques. Par exemple, 1, 3, 6 y 10 sont les quatre premiers nombres triangulaires parce qu'on peut les représenter par des points :



1re Q. (individuel) Observe bien ces nombres. Quel est le cinquième nombre triangulaire ? Représente-le. Explique la façon dont tu as procédé.

2e Q. **(individuel)** D'après toi comment sont construits ces nombres triangulaires ? Qu'observes-tu ?

3e Q. **(individuel)** Quel est le 11ième nombre triangulaire ? Explique comment tu fais pour le trouver.

4e Q. (individuel) Tu dois écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83. Décris ce que tu lui écrirais. TU N'AS PAS À FAIRE LES CALCULS!

5e Q. (individuel) Et pour calculer n'importe quel nombre triangulaire, comment ferait-on (on veut encore ici un message COURT).

6e Q. (en équipe) Travail avec Excel avec les questions précédentes.

7e Q. (en équipe) Vous devez écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83.

8e Q. (en équipe) Fournissez une procédure la plus courte possible qui permettrait de calculer n'importe quel nombre triangulaire.

9e Q. (en équipe) Avec votre formule, pouvez-vous calculer le nombre triangulaire 120 ?

Figure 4 – SI « Nombres triangulaires »

13 élèves ont participé à cette expérimentation. Comme premières questions, il leur est proposé de trouver le nombre triangulaire 11 (T_{11}). Lors des deux premières étapes de la méthode ACODESA (travail individuel suivi d'un travail en équipe), différentes propositions des élèves montrent leurs idées sur la généralisation (Hitt, Saboya & Cortés 2017) :

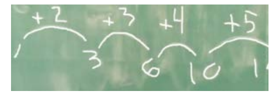
- Généralisation arithmético-visuelle géométrique locale. Par exemple, pour T_{11}, les élèves se sont appuyés sur la régularité « un de plus que le précédent ».

1+2+3+…+11

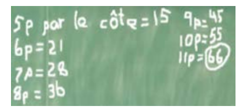
- Généralisation arithmético-visuelle géométrique mentale. Une transformation mentale a été faite de la représentation présentée initialement dans la SI, et va donner lieu à une nouvelle représentation arithmétique pour $T_{11.}$

11+10+9+…+1

- Généralisation diagrammatico-itérative. Les relations en jeu entre les différents nombres triangulaires sont présentées par des flèches et la valeur des bonds.



- Généralisation itérative.



La figure 5 illustre les étapes qui ont suivi une équipe au tableau dans la discussion en grand groupe pour la construction d'une expression algébrique. On peut noter, le passage de l'utilisation d'Excel (encadré 1) à une approche papier crayon (encadrés 2 et 3) (ce travail s'inscrit dans une mathématisation horizontale lors du travail en équipe). Par la suite, après l'élaboration d'une conjecture (encadré 3), et l'utilisation d'un applet (encadré 4), l'équipe aboutit à une généralisation symbolique lors du débat (encadré 5) (les encadrés 4, 5 et 6 sont liés à une mathématisation verticale). Leur expression algébrique leur permet de calculer n'importe quel nombre triangulaire en deux étapes (encadré 6). Un seul ordinateur été utilisé par équipe.

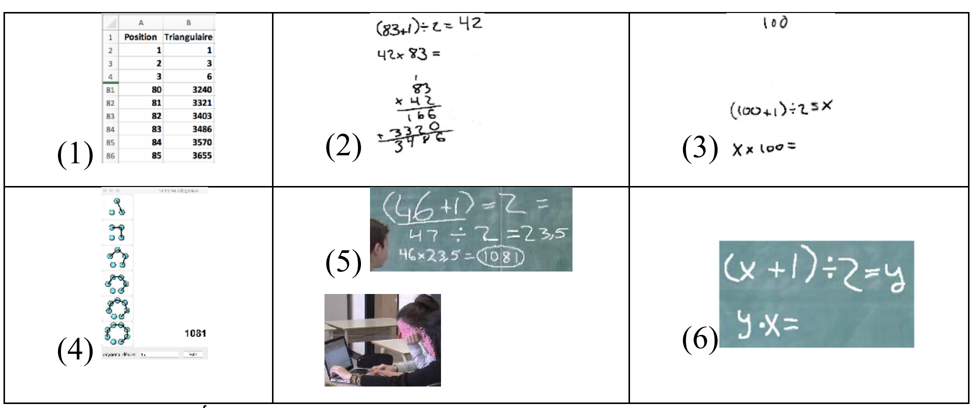


Figure 5 *– Étapes lors de la résolution de la SI sur les nombres triangulaires (en équipe et débat en groupe)*

L'étape d'auto-réflexion (un retour au travail individuel après les discussions en grand groupe) est importante puisque dans le travail en équipe et en grand groupe, nous avions l'impression qu'un consensus était éphémère (Thompson, 2002). Cette étape a pris place 45 jours après l'expérimentation en classe. Fait intéressant, celle-ci a donné lieu à d'autres représentations. Dans la figure 6, nous montrons le travail produit par un élève pour les nombres triangulaires (1ère ligne) et par un autre élève pour les pentagonaux (2e ligne). Comme défi, nous avons proposé à un élève de trouver une façon de calculer les nombres pentagonaux.

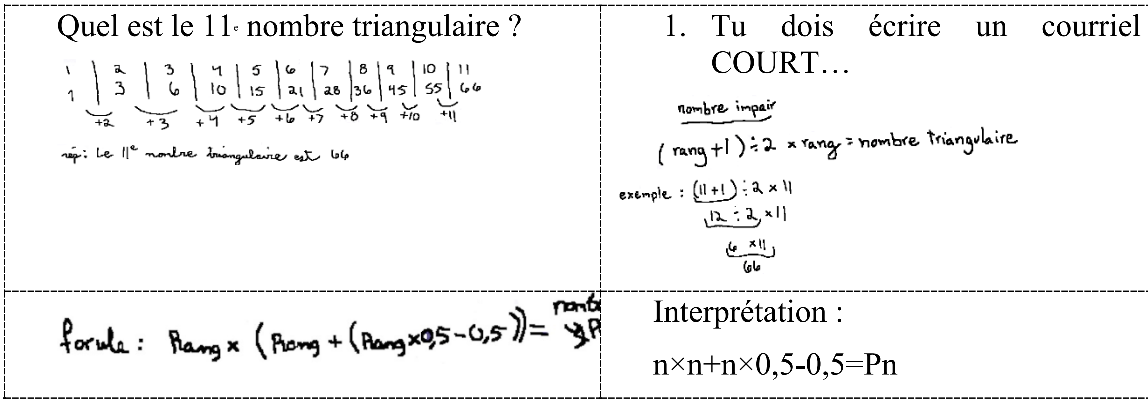
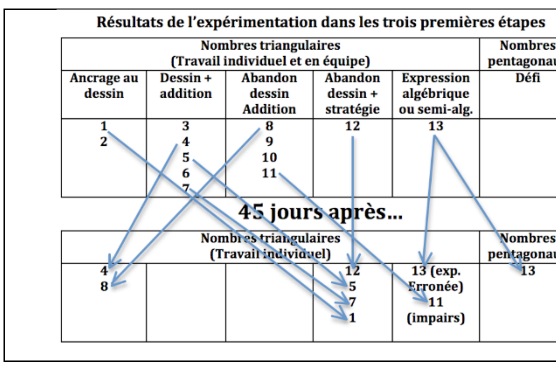


Figure 6 *– Différentes représentations ressorties pour le calcul des nombres triangulaires et pentagonaux*

Ainsi, nous pouvons affirmer que les RF-S ont évolué pour certains élèves, lors des quatre premières étapes d'ACODESA et ce, avant l'institutionnalisation. La figure 7 présente un portrait global des résultats des 13 élèves.



Remarque : Les flèches indiquent le changement de la stratégie de chaque élève (numéroté de 1 à 13) après 45 jours. Ce changement de stratégie peut refléter soit une régression, soit une progression.

Figure *7 – Aperçu global des 13 élèves lors de l'expérimentation des nombres triangulaires et pentagonaux*

2. Résultats de l'expérimentation menée au Mexique sur la séquence de SI

Dans l'expérimentation au Mexique qui a eu lieu un peu avant la pandémie, une des chercheuses a choisi une population composée de 12 élèves du primaire classée comme groupe faible tant au niveau intellectuel qu'au niveau socio-économique. La séquence de SI a été animée en suivant la méthode ACODESA. Ainsi, après un travail individuel, les 12 élèves ont travaillé en équipe de trois, puis en grand groupe. La figure 8 présente une équipe travaillant avec une tablette.

Figure 8 – *Travail en équipe (3 élèves par équipe)*

Nous avons pu remarquer que les processus de modélisation mathématique ont été présents dans les SI expérimentées. À titre d’exemple, nous présentons quelques productions d’élèves pour la cinquième SI qui s’appuie sur un contexte mathématique et qui est la SI la plus complexe présentée aux élèves du primaire. Dans cette SI, il était demandé de trouver une façon de calculer les figures paires et les figures impaires (voir figure 9).

Nous avons une série de motifs composés de rectangles et de cercles disposés comme dans l’illustration ci-dessous. Les deux premiers motifs et le cinquième sont présentés.

1re Q. (individuel) Calcule le nombre de rectangles et de cercles qui composent le motif 3 (par la suite, la même question est posée pour les motifs 4 et 5).

2e Q. (individuel) As-tu besoin d’un dessin pour calculer les rectangles et les cercles la 4e figure ? Explique.

3e Q. (individuel) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de rectangles et cercles de la 5e figure, sans compter ni les rectangles ni les cercles un à un ?

4e Q. (en équipe) Mettez en commun les différentes stratégies qui vous permettent de calculer le nombre de rectangles et de cercles de la 6e figure. Écrivez chacune de ces stratégies et expliquez si elles sont valides.

5e Q. (en équipe) Une fois que vous avez vos stratégies, et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, calculez avec chacune d'elles le nombre de rectangles et de cercles pour la 12e figure. Quel sont les résultats obtenus avec chacune des stratégies que vous avez trouvées ? Est-ce que chacune des stratégies vous donne le même résultat ? Pourquoi ?

6e Q. (en équipe) Maintenant calculez avec vos stratégies le nombre de rectangles et de cercles pour la 13e figure.

7e Q. (en équipe) Utilisez l'application *GeoGebra* pour vérifier si vos stratégies correspondent aux résultats. Si les résultats ne correspondent pas, cherchez une explication.

8e Q. (en équipe) Une fois que vous avez terminé l'étape précédente, fournissez une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de rectangles ou de cercles pour n’importe quelle figure.

Figure 9 –*5e SI sur le nombre de rectangles et de cercles*

Ainsi, dans cette dernière SI présentée aux élèves du primaire, le contexte de la vie réelle disparait, et un calcul plus complexe s'impose où il faut distinguer si le nombre de la figure est pair ou impair selon le calcul des rectangles ou de cercles. Il a été demandé aux élèves d'utiliser le rouge pour repérer le travail en équipe et d'écrire en vert ce qu'ils trouvent important de changer ou d'ajouter lors du débat en grand groupe. La figure 10 montre le passage de la langue naturelle à des expressions algébriques non conventionnelles, et la figure 11 illustre l'interprétation des expressions algébriques spontanées des élèves (production d'une équipe en rouge) et de la même équipe lors de la discussion en grand groupe (en vert). Dans leurs productions, on peut constater le développement de la pensée divergente.

Nous avons une série de rectangles et de cercles disposés comme indiqué dans la figure ci-dessous [voir figure 8]

8. Écrivez un message dans lequel vous expliquez comment vous pourriez calculer le nombre de rectangles et de cercles pour n'importe quelle figure selon la même forme que vous avez faite auparavant.

E1: dividir la figura por la mitad y multiplicar x3

E2: restarle a la figura 1 multiplicar x3 y sumarle 2 rectangulos y 1 circulo

9. Les messages sont très longs. Rédiger le même message, mais simplifié, en indiquant les opérations que vous devez effectuer.

-1F

2|F x3 +2r +1c=c y r (impar)   2|F x3=c y r (par)   1x3÷2=c y r

Remarque. Les flèches indiquent le passage de la représentation verbale à la notation algébrique.

Figure 10 *– Production d'une équipe d'élèves pour la 5e SI portant sur le nombre de rectangles et de cercles*

Par la suite (pour les questions 9 et 10), la chercheuse a demandé aux élèves d'exprimer leurs résultats *SANS UTILISER DE MOTS* et de vérifier leurs conjectures (voir figures 10 et 11).

2|F x3=c y r	Interprétation : Pour une figure paire, il faut calculer n/2 × 3 (cercles et rectangles).
-1F 2|F x3 +2r +1c=c	Interprétation : Pour une figure impaire, il faut calculer (n-1)/2 × 3 + 1, pour les cercles et (n-1)/2 × 3 + 2, pour les rectangles.

Figure 11 *– Production de représentations arithmético-algébriques par une équipe d'élèves dans la SI sur les rectangles et les cercles et interprétation des productions*

Cette production illustre la portée de la méthode ACODESA pour promouvoir des RF-S liées à une pensée divergente (les représentations spontanées des élèves ne sont pas institutionnelles) et les RF-S se développent de façon naturelle, dans une approche socioculturelle, en prenant appui sur une pensée arithmético-algébrique. Il ressort que l'élaboration de la séquence de SI est porteuse pour promouvoir en premier une mathématisation horizontale puis une mathématisation verticale (Freudenthal, 1991) et un apprentissage en spirale (Mason, 1996) dans le processus de modélisation mathématique. De plus, dans ce processus la technologie (*Excel*, *GeoGebra*, un *applet*) a joué un rôle d'appui lors de la validation des conjectures par les élèves.

V. CONCLUSION

Des recherches s'attardent à la pensée arithmétique (Verschaffel & De Corte 1996), à la pensée algébrique (e.g. Kieran 2018) et d'autres s'intéressent à l'approche « Early Algebra » (e.g. Carraher et al., 2006). Nous proposons quant à nous d'axer sur l'importance de promouvoir une articulation entre l'arithmétique et l'algèbre ce qui conduit à considérer ce que nous avons appelé la pensée arithmético-algébrique. Les résultats obtenus avec les nombres polygonaux à l'école secondaire au Québec ou ceux avec la séquence des SI au Mexique, montrent l'importance de prendre en considération les RF-S des élèves et leur évolution dans un milieu socioculturel. De plus, la méthode ACODESA mise sur l'émergence des RF-S en suivant des étapes bien différenciées, celles-ci favorisent l'émergence des idées personnelles des élèves pour leur permettre de participer plus activement lors de la discussion en équipe et en grand groupe. La 4e étape est singulière, elle vise une reconstruction par l'élève de façon individuelle de tout ce qui a été discuté en classe. Cette étape prend place idéalement avant le processus d'institutionnalisation. Soulignons que dans notre approche d'enseignement ACODESA, il est important de promouvoir l'anticipation et la prédiction (dans un processus de mathématisation horizontale), celles-ci vont déclencher l'élaboration de conjectures par l'élève qui devront être validées (mathématisation verticale). Étant donné que les élèves du primaire n'ont pas une connaissance profonde de la preuve, dans notre approche STIM (avec les composantes, mathématiques et technologie, selon Sanders, 2009), la technologie apparaît comme un outil central permettant aux élèves d'avoir recours à l'évaluation de leurs conjectures.

Nous estimons cependant que la technologie, dans une approche STIM intégré, devrait occuper une place plus importante dans l'apprentissage. Dans cette optique, une nouvelle expérimentation est en cours, intégrant l'utilisation de *Scratch* afin de favoriser l'acquisition du concept de variable et la compréhension de la covariation entre variables. Cette approche repose sur les mêmes activités que celles utilisées dans les expérimentations précédemment présentées.

REFERENCES

BEAR, J. (1993). Creativity and divergent Thinking. A Task-Specific Approach. Lawrence Erlbaum Associates, publishers. Hillsdale, New Jersey; Hove and London.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D., BRIZUELA, B. M., & EARNEST, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

CHALMERS, CH., CARTER, M-L., COOPER, T. & NASON R. (2017). Implementing big ideas to advance the teaching and learning of science, technology, engineering and mathematics (STEM). *International Journal of STEM Education*.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Neuchâtel: Peter Lang.

ENGLISH, L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July 2015, Hobart, Australia.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht : Kluwer.

GUILFORD, J.P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, 5, 444-454.

GUILFORD, J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.

HADAMARD, J. (1945/1975). Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Paris: Gauthier-Villars.

HITT, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

HITT, F. & GONZALEZ-MARTIN, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

HITT, F. et QUIROZ, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

HITT, F., SABOYA, M. & CORTÉS, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & Gellert U. (Eds.), *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 57-74). Cham : Springer.

HITT, F. QUIROZ, S., SABOYA, M. & LUPIÁÑEZ, J-L. (2023). Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines. *Educación Matemática*. 35(3), 112-150.

KELLER, T.R. & KNOWLES, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3, 1-11.

KIERAN, C. (Ed.) (2018). Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds. Cham: Springer.

MAAßß, K. & REITZ-KONCEBOVSKI, (Eds). (2013). PRIMAS. Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe. Freiburg : EU and Seventh Framework Programme.

MAAßß, K., GEIGER, V., ROMERO-ARIZA, M., et GOOS, M. (2016). *ZDM-Mathematics Education*, 51, 869-884.

MASON, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU LOISIR ET DU SPORT. (2007). Programme de Formation, Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. Gouvernement du Québec.

RABARDEL, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains. Armand Colin.

RAZUMNIKOVA, O. (2013). Divergent versus convergent thinking. In E-G. Carayannis (Ed.), *Encyclopedia of creativity, invention, innovation and entrepreneurship* (Section D, pp. 1–7). New York : Springer.

SANDERS, M. (2009). STEM, STEM Education, STEMAnia. *Technology Teacher*, 68(4), 20-27.

THOMPSON, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematical education* (p. 99-137). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

WALLAS, G. (1926). *The art of thought*. New York : Harcourt, Brace and Company.

ZIMMERMANN, W. & CUNNINGHAM, S. (Eds). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. *19*, USA : MAA Series.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Modèle théorique pour l'étude de l'évolution des connaissances professionnelles de l'enseignant en lien avec les premières utilisations d'une ressource technologique

Faten Khalloufi-Mouha[28]

Université de Carthage, Tunisie.

Résumé – L'approche documentaire de la didactique propose le concept de la genèse documentaire comme outil pour étudier l'apprentissage professionnel des enseignants en termes de développement de documents à travers l'interaction avec les ressources dans et hors classe. Néanmoins, l'approche documentaire ne fournit pas d'outils analytiques pour expliquer comment un document évolue à différents stades du processus d'enseignement. Dans cette intervention, je propose un outil analytique permettant d'analyser le développement et l'évolution d'un document basé sur l'évolution conjointe du schème d'utilisation et des situations associées. Le modèle théorique est appliqué à une étude de cas impliquant un enseignant d'une école primaire tunisienne qui utilise pour la première fois la ressource technologique GeoGebra pour présenter les propriétés des parallélogrammes à des élèves de 6ème année (11-12 ans). Les résultats suggèrent la pertinence du modèle proposé, permettant de suivre l'évolution de l'apprentissage professionnel de l'enseignant à travers la genèse de documents attachés à ses objectifs professionnels dans le contexte de l'utilisation de GeoGebra. Ce modèle peut être considéré comme une contribution théorique et méthodologique, permettant d'approfondir la compréhension de l'apprentissage professionnel des enseignants lors de l'utilisation d'une ressource technologique.

I. INTRODUCTION

Le développement des connaissances et l'apprentissage professionnel dans le cas de l'utilisation des nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. L'importance des développements technologiques et la multiplication des différents types de ressources numériques et technologiques ainsi que les modes de communication dans le domaine de l'enseignement des mathématiques a suscité l'émergence de la problématique de leurs usage et appropriation par les enseignants (Trgalova & Rousson, 2017, Khalloufi-Mouha, 2022, Khalloufi-Mouha & Brini, 2022). Le terme «ressource» est utilisé en accord avec la définition proposée par Adler (2000) qui le définit comme étant tout ce qui peut ressourcer les pratiques du professeur. Les recherches portant sur les pratiques et l'apprentissage professionnel des enseignants en lien avec l'utilisation des ressources curriculaires et en particulier des ressources technologiques ont contribué à l'élaboration d'un corpus d'études récentes reliant le développement professionnel

---

[28] Khalloufi-Mouha, F. (2024). Modèle théorique pour l'étude de l'évolution des connaissances professionnelles de l'enseignant en lien avec les premières utilisations d'une ressource technologique. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT1, pp. 139-149.

et l’apprentissage des enseignants à leur interaction avec ces ressources (Remillard, 2005 ; Remillard & Heck, 2014 ; Choppin, 2019 ; Gueudet & Trouche, 2009, Gueudet, 2019 ; Khalloufi-Mouha, 2024). Cependant, malgré le nombre croissant de ces études, plusieurs questions restent sous-explorées, en particulier celles relatives aux types de connaissances construites lorsqu'un enseignant utilise une ressource technologique en classe, ainsi que les questions qui abordent la façon dont ces connaissances évoluent à travers les différentes étapes du processus d'enseignement.

Dans la perspective d’explorer le processus de l’apprentissage professionnel en lien avec l’utilisation de différents types de ressources, l’approche documentaire du didactique (ADD) propose le concept de la genèse documentaire permettant d’étudier les documents développés par l’enseignant à partir de son interaction avec les ressources en classe et en dehors de la classe. Cependant l’ADD, ne fait pas de distinction entre les différents états d'un document à chaque niveau du travail de documentation de l'enseignant (Rezat et al., 2019) et ne fournit pas d'outils analytiques pour expliquer comment un document évolue à travers les différents contextes tout au long du processus d'enseignement. Par conséquent, il est difficile de suivre l'évolution des connaissances professionnelles et l'apprentissage de l'enseignant liés à l'utilisation d'une ressource particulière en particulier dans le cas de ressource technologique. Dans cette communication j’aborde cette problématique dans le cas des premières utilisations d'une ressource technologique dans l'enseignement des mathématiques, en proposant de caractériser l'évolution des connaissances et des pratiques professionnelles de l’enseignant à travers la description et la confrontation de différents états des documents élaborés en lien avec ses intentions professionnelles relatives à l'utilisation de cette ressource. En m'inspirant du modèle d'évolution des schèmes (Gueudet et al., 2022), je propose un modèle conceptuel pour analyser l'évolution d'un document à partir de l’évolution conjointe du schème d’utilisation et des situations associées. Le modèle offre la possibilité de caractériser les connaissances et l'apprentissage professionnel de l'enseignant au début de l'utilisation d'une nouvelle ressource technologique avec les élèves, à travers l'analyse d'un nombre réduit de séances d'enseignement sur une courte période d'observations et d'interviews (Khalloufi-Mouha, 2024).

II. L’APPROCHE DOCUMENTAIRE DU DIDACTIQUE

L'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2009 ; Gueudet, 2019) est une approche qui étudie le travail de l’enseignant en focalisant son attention sur le développement et l'apprentissage professionnel des enseignants de point de vue de leur utilisation professionnelle des ressources. S'appuyant sur la distinction entre artefact et instrument proposée par l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), la DAD a introduit la distinction entre ressource et document. Les ressources comprennent tous les types de ressources : matérielles, socioculturelles et humaines. L'homme lui-même n'est pas considéré comme une ressource. Alors que, comme le précise Gueudet (2019), une discussion avec un collègue, en présentiel ou par courriel, une production d'un élève ou même une expression perplexe sur le visage d'un élève sont des ressources. Le document est décrit comme un ensemble de ressources recombinées et un schème d'utilisation pour gérer une classe particulière de situations. La notion de schème est caractérisée selon Vergnaud (1998) par quatre composantes : le but de l'activité, les règles d'action, les invariants opératoires ainsi que les possibilités d'inférence dans d'autres situations ayant le même but. Les règles d'actions sont des manières régulières d'agir pour un même but. Les invariants opératoires sont associés à deux types de composants : les théorèmes en acte (propositions considérées comme vraies par le sujet) et les concepts en acte (concepts considérés comme pertinents pour le sujet). Le processus d'élaboration d'un document est appelé genèse documentaire (Gueudet & Trouche, 2009). Il est décrit comme un mouvement dialectique dans lequel la ressource agit et façonne l'activité de l'enseignant (instrumentation), tandis que l'enseignant, à son tour adopte et adapte cette ressource au contexte en fonction de son projet didactique (instrumentalisation).

III. UN MODÈLE D'ANALYSE DE L'ÉVOLUTION D'UN DOCUMENT.

Dans Gueudet et al. (2022), les auteurs ont proposé un modèle d'évolution des schèmes pour étudier l'apprentissage des élèves à utiliser la programmation pour des projets d'investigation en mathématiques pures et appliquées au niveau universitaire. Le travail s'appuie sur le modèle d'analyse dynamique pour décrire et évaluer les compétences, proposé par Coulet (2019). Dans ce modèle, l'évolution du schème est analysée à travers trois boucles de régulation (Coulet, 2019) : (1) une régulation en boucle courte impliquant des changements dans les règles d'action pour mieux réaliser la même activité productive, (2) une régulation en boucle longue impliquant un changement dans les invariants opératoires pour concevoir l'activité différemment, et une régulation de type " changement de schème " concernant la réorganisation du système d'activité dans lequel l'activité mobilisée est incluse. (Coulet, 2019). Bien que le modèle de Gueudet et al. (2022) fournisse des outils pour étudier l'évolution de la partie schème d'un document élaboré par l'enseignant, il reste insuffisant pour étudier l'évolution du document, qui ne peut pas être réduit à l'évolution du schème d'utilisation correspondant. Étant définie comme un ensemble de ressources combinées, et un schème d'utilisation d'un ensemble de ressources dans une classe de situations donnée, à travers différents contextes (Gueudet, 2019), l'évolution d'un document est liée à l'évolution conjointe du schème d'utilisation et de la classe de situations associée. Cette relation dialectique entre schème et situation est conceptualisée comme une condition cruciale de chaque processus cognitif (Vergnaud, 2009).

Pour suivre l'évolution d'un document élaboré par un enseignant en lien avec l'utilisation d'une ressource technologique, il est difficile de saisir les modifications ponctuelles lorsqu'on étudie l'évolution conjointe du schème et de la classe de situations associée. Pour cela je propose un modèle d'analyse basé sur une confrontation entre les états successifs du document à chaque étape du processus d'enseignement. Pour ce faire, un même objectif professionnel « O » de l'enseignant lié à l'utilisation de la ressource technologique, permet de définir un document « D_o » élaboré par l'enseignant. Pour l'étude de l'évolution du document « D_o », je fais appel aux deux concepts : document de préparation « D_oPr » et de document de mise en œuvre « D_oMe », introduits dans (Khalloufi-Mouha & Brini, 2022). Ces deux concepts tiennent compte des variables de la situation et de l'évolution du schème d'utilisation ainsi que les différents types de ressources utilisées par l'enseignant.

(1) Le document de préparation « D_oPr » est l'état du document « D_o » lors de la phase de préparation. Les caractéristiques d'un document de préparation sont déduites des déclarations de l'enseignant lors des entretiens de pré-implémentation et du journal de classe dans lequel l'enseignant note toutes les activités élaborées, les ressources utilisées et les scénarios de mise en œuvre de la leçon. Le « D_oPr » ne se réduit pas à sa composante matérielle (les ressources élaborées par l'enseignant et les artefacts que l'enseignant prévoit d'utiliser en classe.). En fait, pendant la préparation de la leçon, les différentes ressources utilisées se trouvent transformées en accord avec l'objectif du document analysé « D_o ». La composante schème du « D_oPr » est relative aux différentes décisions sur l'utilisation des ressources en lien avec l'objectif « O ». La description du scénario prévu par l'enseignant ainsi que ses différentes déclarations lors des interviews, permettent

notamment d'identifier les règles d'actions ainsi que les invariants opératoires caractérisant le schème d'utilisation du document étudié.

(2) Le document de mise en œuvre « D_oMe » constitue un nouvel état du document « D_o » développé à la suite d'une modification du contexte de travail et des caractéristiques de la classe de situations lors du passage de la préparation à la mise en œuvre en classe. Les caractéristiques du « D_oMe » sont déduites des pratiques de l'enseignant en classe, des ressources utilisées et de ses déclarations lors des entretiens postérieurs à la mise en œuvre.

Le modèle proposé pour suivre l'évolution d'un document « D_o » est basé sur la confrontation à chaque niveau du travail documentaire, du document de préparation « D_oPr » avec le document de mise en œuvre « D_oMe ». Cette confrontation entre deux états du document, permet d'identifier les modifications apportées aux différentes composantes du document étudié (les ressources utilisées, les schèmes d'utilisation) en lien avec les variations dans la classe de situations correspondantes. Cela permet ainsi d'explorer le processus évolutif d'ajustements et de contrôles mobilisés par l'enseignant et de caractériser l'évolution de ses connaissances. Le modèle propose trois niveaux d'évolution à travers les mises en œuvre successives en classe. Le premier niveau (adaptation en action) se caractérise par l'adaptation de l'action de l'enseignant aux différents aspects de la classe de situations dans le but d'accomplir son objectif professionnel. Alors que les deux niveaux suivants sont basés sur une réflexion sur les situations afin de les adapter selon son objectif « O » (et ses sous-objectifs « O_i »)

(1) **Adaptations en action** : ce niveau est relatif aux adaptations apportées par l'enseignant à ses actions planifiées en réponse aux caractéristiques des situations émergentes lors de la transition de la phase de préparation à la phase de mise en œuvre en classe. Ces adaptations concernent la composante « règles d'action » du schème d'utilisation et concernent la dimension pragmatique du travail de l'enseignant.

(2) **Adaptations des connaissances professionnelles :** Ce deuxième niveau relève de la dimension épistémique. L'enseignant adapte la classe de situations à son projet d'enseignement en agissant sur les variables des situations. Ainsi, le document « D_o » évolue vers un nouveau document de préparation « D_oPr » et, plus tard, vers un nouveau « D_oMe » lorsque l'enseignant met en place une nouvelle mise en œuvre de la leçon. Ces adaptations se traduisent par des changements au niveau des invariants opératoires visant à concevoir l'activité différemment et se manifestent à travers un renforcement de la pertinence d'un invariant opératoire ou en faisant appel à un nouvel invariant opératoire. Ces adaptations interviennent lorsque l'enseignant évalue ses pratiques suite à la mise en œuvre en classe et saisit les raisons expliquant les résultats identifiés. Cela atteste une évolution au niveau des connaissances professionnelles de l'enseignant.

(3) **Changement de document :** Le troisième niveau intervient lorsque l'enseignant se rend compte, après avoir évalué ses pratiques, de l'inadéquation entre le schème d'utilisation et l'objectif « O » caractérisant les classes de situations initialement envisagées. L'enseignant passe alors à un nouvel objectif « O* », ce qui mène à l'émergence d'un nouveau document.

Afin d'opérationnaliser le modèle d'évolution d'un document, je propose le concept de « tableau d'état d'un document » comme un outil analytique permettant de caractériser l'état du document « D_o » à chaque niveau du processus d'enseignement (la phase de préparation, la phase de mise en œuvre en classe et la phase d’évaluation). Le tableau d’état d’un document est attaché à une session d’enseignement basée sur l’intégration d’une ressource technologique en classe. Le tableau est élaboré à partir de la confrontation entre le « D_oPr » et le « D_oMe » relatifs au même objectif professionnel de l’enseignant « O ». Le tableau comporte :

- Les sous-objectifs « Oi » associés à l’objectif « O » caractérisant le document « D_o ».

- les ressources de type matériel et humain associées au document. Le travail documentaire de l’enseignant est basé sur différents types de ressources en plus de la ressource technologique intégrée et la liste des ressources proposées dans nos analyses et au niveau des tableaux d’état, sont loin d’être exhaustives. Dans le tableau, je précise les ressources utilisées et élaborées lors de la phase de préparation et les ressources programmées par l’enseignant ainsi que les ressources émergentes en classe (les productions des élèves, l’interaction entre l’enseignant et les élèves en classe, etc.)

- les règles d’actions : les règles relatives à la phase de préparation ainsi que les règles d’actions associées à l’utilisation des ressources en classe.

- les connaissances professionnelles justifiant les règles d’actions (les invariants opératoires)

Ainsi, pour une session relative à la préparation et à l’implémentation d’une séance d’enseignement intégrant une ressource technologique, le tableau d’état d’un document « Do » permet d’identifier les adaptations en action (niveau 1) en faisant apparaitre si l’enseignant procède à un affinement ou un renforcement d’une ou plusieurs règles d’action ou en permettant de voir s’il fait appel à de nouvelles règles d’actions en classe. Le deuxième niveau du modèle proposé est identifiable à travers la comparaison de deux tableaux d’états (ou plusieurs) du même document « Do », correspondants à deux (ou plusieurs) sessions de mise en œuvre en classe. Cette comparaison permet d’identifier les modifications au niveau des invariants opératoires soit à travers un affinement ou renforcement d’une connaissance intérieure soit la manifestation d’une nouvelle connaissance.

Dans la section suivante, Le modèle proposé est appliqué pour étudier l’évolution de la genèse documentaire d'un enseignant des écoles primaires, lors des premières utilisations de la ressource technologique GeoGebra en classe de mathématiques de 6ème année. L’étude a pour but de déterminer dans quelle mesure le modèle d'évolution des documents rend compte de l'évolution de l'apprentissage professionnel de l'enseignant en lien avec l'utilisation GeoGebra. Les questions de recherche qui guident l'analyse sont les suivantes : (1) Quelles sont les caractéristiques des documents élaborés par un enseignant du primaire lors des premières utilisations de la ressource technologique GeoGebra pour l'enseignement des mathématiques ? (2) Comment l'évolution conjointe du schème d'utilisation et de la classe de situations, à travers les mises en œuvre successives en classes, caractérise-t-elle l’évolution de l'apprentissage professionnel de l'enseignant ?

IV. MÉTHODOLOGIE

1.Le profil de l’enseignant

L’enseignant participant à l’expérimentation est un professeur des écoles primaires ayant 31 ans de service. L'enseignant est considéré comme ayant des connaissances solides pour l’enseignement des mathématiques. Cependant, comme il s’agit de ses premières utilisations de GeoGebra en classes, il est supposé avoir des connaissances limitées relatives à l'enseignement des mathématiques avec la technologie. Cela est susceptible de faciliter l'étude de l'évolution de ses connaissances professionnelles liées à l'utilisation de GeoGebra.

2.Méthodologie de recueille et les données recueillies

Cette recherche adopte la méthodologie de l'investigation réflexive (Trouche, Rocha, Gueudet et Pepin, 2020), proposée par l'Approche documentaire de la didactique. Cette méthodologie repose sur les cinq principes suivants : " (1) une large collecte des ressources matérielles utilisées et produites par l'enseignant ; (2) un suivi sur le long terme ; (3) un suivi en classe et hors classe ; (4) un suivi réflexif du travail de documentation de l'enseignant ; et (5) une confrontation permanente du regard de l'enseignant sur son travail de documentation avec la matérialité de ce travail. " (Trouche, Rocha, Gueudet & Pepin, 2020, p. 1247)

A l'exception du second principe concernant un suivi à long terme, les principes de la méthodologie réflexive ont été appliqués pour suivre l'apprentissage professionnel de l'enseignant. La spécificité de ce travail consiste à la possibilité d'obtenir des informations sur les connaissances et le développement professionnel des enseignants par l'analyse d'un ensemble réduit de séances en classe (seulement deux dans le cas étudié) sur une courte période d'observations et d'entretiens (5 semaines, 4 entretiens). Dans cette perspective, la méthodologie de collecte de données a impliqué le visionnement des vidéos des séances en classe lors des interviews post-mise en œuvre ce qui a permis de révéler les intentions et les théorèmes en acte de l'enseignant et a ainsi, permis d'élaborer les différents tableaux d'états des documents étudiés et de suivre l'évolution des connaissances de l'enseignant.

V. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Lors du premier entretien préalable à la mise en œuvre, l'enseignant a indiqué qu'il prévoyait une phase de travail par binômes pour permettre aux élèves d'explorer l'activité proposée en utilisant GeoGebra. Cette phase de travail par binômes sera suivie d'une phase de travail collectif au cours de laquelle toute la classe sera impliquée dans l'élaboration d'une solution collective basée sur la solution proposée par un élève. Selon l'enseignant, ces méthodes de travail en classe constituent une pratique courante de son enseignement lorsqu'il propose des activités de résolution de problèmes en mathématiques. Cela permet d'inférer la stabilité de cette pratique et la volonté de l'enseignant à l'étendre dans le cas de l'utilisation de GeoGebra. Pour cette raison, les documents étudiés ont été rattachés à des objectifs généraux tels que "Préparer et mettre en œuvre une phase d'investigation où les élèves travaillent en binôme" ou " Préparer et mettre en œuvre une phase de travail collectif". Ce choix est conforme à l'objectif d'étudier l'évolution d'un document à travers les différentes étapes du processus d'enseignement, puisque le document attaché à un tel objectif peut être identifié dans différentes mises en œuvre de la classe. Dans cet article, je retrace l'évolution du document lié à l'objectif « O » :"préparer et mettre en œuvre une phase d'investigation où les élèves travaillent en binôme".

1.Caractérisation du document étudié

L'étude de la genèse du document relatif à l'objectif « O » fait apparaitre qu'il est associé à des sous-objectifs « Oi » liés aux contenus mathématiques en jeu tels que "amener les élèves à identifier les propriétés des côtés d'un parallélogramme (parallèles et isométriques) lors d'un travail en binôme". Certains de ces sous-objectifs sont identifiables dans les tâches proposées dans l'activité conçue par l'enseignant. Alors que d'autres ont émergé à travers les déclarations de l'enseignant lors des interviews, tels que "amener les élèves à conceptualiser le rectangle comme un parallélogramme particulier" ou "amener les élèves à généraliser les propriétés identifiées dans l’activité à tous les parallélogrammes".

L'activité conçue (Fig.1) pour la première session a été adaptée par l'enseignant à partir d'une activité proposée dans le manuel de mathématiques dans l’objectif d'exploiter les potentialités de GeoGebra. L'activité propose une figure géométrique représentant un parallélogramme dont les diagonales sont les diamètres de deux cercles concentriques C et C'. Le parallélogramme peut être modifié en déplaçant le point A appartenant au cercle C et le point B appartenant au cercle C'. Ainsi, l'utilisation de l'outil déplacement de GeoGebra devrait permettre aux élèves de généraliser les propriétés identifiées pour un quadrilatère donné à tous les quadrilatères du même type. En revanche, l'utilisation de l'outil déplacement, permet de présenter le rectangle comme un parallélogramme ayant des diagonales isométriques.

2.Adaptations en action

Dans sa description du scénario qu’il a prévu pour la première séance avec GeoGebra, l'enseignant précise lors de l'entretien, qu'il proposera aux élèves de travailler par deux et qu'il interviendra lorsqu'une difficulté apparaîtra chez l'un des binômes. L'enseignant justifie son choix par le fait que le travail par binôme favorise l’autonomie des élèves et renforce leurs progressions dans l’apprentissage. Cependant, il insiste sur la nécessité d'intervenir en cas de difficulté pour permettre aux élèves d'avancer au niveau de l’accomplissement des tâches proposées et de comprendre les propriétés mathématiques visées. L’enseignant s’appuie donc sur des propositions qu’il considère comme vraies (théorèmes en acte) et que l’on pourrait énoncer de la manière suivante : "*le travail par binôme permet de développer l'autonomie des élèves et favorise leur apprentissage*" et "lorsque les élèves travaillent par binôme, une intervention est nécessaire lorsqu'ils rencontrent des difficultés instrumentales ou conceptuelles. ». Ainsi que le théorème en acte « *Tous les élèves doivent être en mesure d'accomplir les tâches et d'identifier les contenus mathématiques en jeu.*"

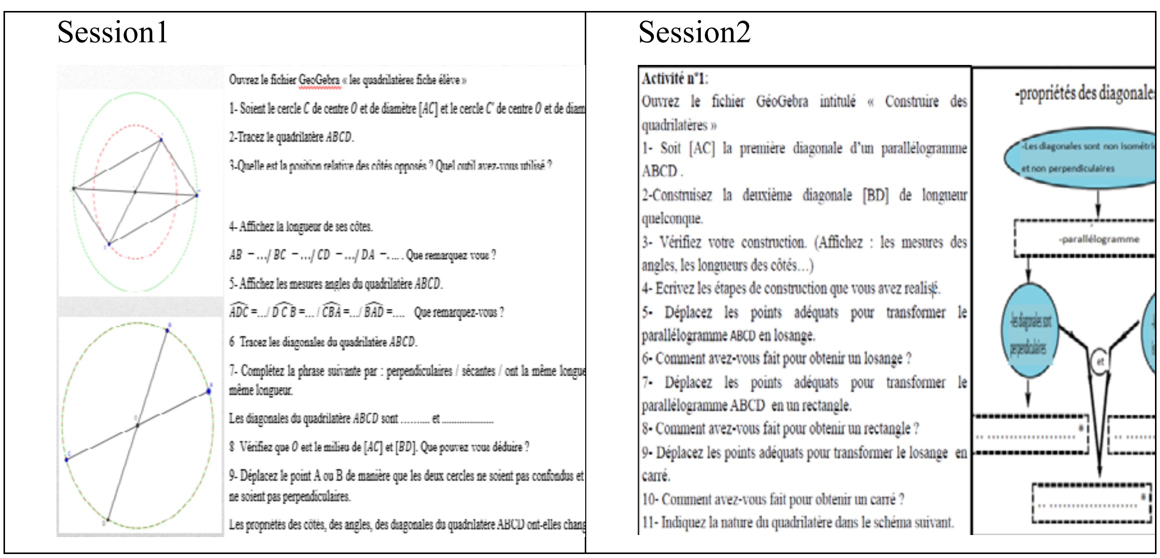


***Figure 1**: Activités proposées aux élèves lors de la première et la deuxième sessions d’intégration de GeoGebra.*

La confrontation entre le « DoPr » et « DoMe » relatifs à la première session (fig2) a révélé l'importance des modifications et des adaptations apportées par l'enseignant lors de la mise en œuvre en classe. Ces adaptations sont principalement liées aux types d'orchestrations instrumentales, ce qui correspondent à des changements de règles d'action. En effet, le scénario élaboré par l'enseignant a explosé en scénarios locaux liés à un contenu mathématique très spécifique, déterminé par une tâche de l'activité et associé à l'un des sous objectifs « O_i ». Lors de l'implantation, l'enseignant a étroitement guidé le travail des élèves et a fourni un support technique et conceptuel important. Cela reflète sa volonté à contrôler la progression du travail en classe. L'analyse des pratiques de l'enseignant révèle l'utilisation d'une orchestration émergente à caractère hybride, combinant travail collectif et travail par binômes. Cela permet d'avancer que l'enseignant adapte ses actions en fonction du travail et des interventions des élèves. Ces adaptations génèrent des modifications de la règle d'action qui attestent que l'interaction enseignant/élève fonctionne comme une ressource pour le travail de l'enseignant (Khalloufi-Mouha & Brini, 2022). En effet, l'enseignant circule parmi les élèves travaillant par binôme et lorsqu'il remarque une difficulté, il intervient publiquement et donne la stratégie appropriée à tous les binômes. Lorsqu'un binôme rencontre des difficultés d'ordre instrumental, l'enseignant exécute la tâche à la place des élèves. Cela révèle que l'enseignant cherche à éviter l'émergence de situations inattendues. L'analyse de l'enregistrement vidéo de la séance et l'interview post-implémentation ont permis de retrouver les mêmes invariants opératoires identifiés dans l'entretien pré-implémentation. Un seul théorème-en-acte a été reformulé pour justifier le type d'orchestration émergent et la fragmentation du scénario initial : "*Tous les élèves doivent être en mesure d'accomplir les tâches et d'identifier les contenus mathématiques en jeu*, **sans trop tarder. Il est nécessaire d'imposer un même rythme de progression à tous les élèves**". Ce théorème en acte n'est pas considéré comme un invariant opératoire émergent, mais il ne fait que donner plus de précisions au même invariant identifié dans la phase de préparation (fig2).

Objectif de l'enseignant **Préparer et mettre en oeuvre une phase d'investigation pendant laquelle les élèves travaillent par b**	
Ressources planifiées et utilisées • La ressource GeoGebra. • L'activité mathématique élaborée et proposée aux élèves. • Le fichier GeoGebra préparé. • Les prérequis des élèves.	**Ressources émergentes en c** • Les stratégies développées par les différents bin • Les interactions élèves/élèves et élèves/enseigna
Règles d'action Règles d' action relatives à la phase de preparation • Utilisation de la configuration "walk and work" • Les élèves sont invités à travailler en binôme en utilisant le fichier GeoGebra sur le PC. • Pendant la phase d'investigation, les élèves doivent résoudre les tâches conçues en utilisant les outils GeoGebra. • L'enseignant interviendra lorsqu'un binôme rencontre des difficultés instrumentales ou conceptuelles. Règles d'actions mises en oeuvre en classe • Découpage du scénario original en scénarios locaux liés à un contenu mathématique très spécifique, déterminé par une question de l'activité proposée. • Utilisation d'une orchestration émergente à caractère hybride qui combine collectif et travail en binôme. • L'enseignant lit les instructions et les explique dans chaque sous-tâche. • Si une difficulté survient dans l'un des binômes, l'enseignant intervient publiquement pour prévenir les autres binômes et donner la stratégie appropriée.	**Invariants opératoires** • Le travail en binôme permet de développe élèves et favorise l'apprentissage. • Les élèves doivent donner une interprétation leur activité avec GeoGebra pour identifier parallélogrammes. • Lorsque les élèves travaillent en binômes, u nécessaire lorsqu'ils rencontrent des difficultés conceptuelles. • Tous les élèves doivent réaliser l'activité se appropriée et identifier le contenu mathéma trop de décalage. Il est nécessaire d'imposer l progression à tous les élèves."

Figure 2 *:Tableau d'état du document « Do » relatif à la première session.*

Objectif de l'enseignant **Préparer et mettre en oeuvre une phase d'investigation pendant laquelle les élèves travaillent par b**	
Ressources planifiées et utilisées • La ressource technologique GeoGebra. • L'activité mathématique élaborée et proposée aux élèves. • Le fichier GeoGebra préparé. • Les connaissances professionnelles et instrumentales de l'enseignant.	**Ressources émergentes en c** • Les stratégies développées par les différents bi • Les interactions élèves/élèves et élèves/enseign
Règles d'action Règles d' action relatives à la phase de preparation • Utilisation de la configuration " walk and work ". • J'interviendrai juste pour apporter l'aide nécessaire aux binômes en difficulté sans leur donner la solution. Règles d'actions mises en place en classe • L'enseignant lit les consignes et les explique dans chaque sous-tâche. • Pendant les phases de travail en binôme, les élèves travaillent de manière autonome. • L'enseignant intervient si une difficulté instrumentale ou conceptuelle survient dans le travail d'un des binômes. Son intervention est limitée au binôme concerné.	**Invariants opératoires** • Le travail en binôme permet de développer l'a et favorise l'apprentissage. • Tous les élèves doivent pouvoir réaliser l'acti procédure appropriée et en identifiant mathématiques en jeu, sans trop de retard da nécessaire d'imposer un même rythme de p travail des élèves. • Pour favoriser l'autonomie des élèves, l'enseignant doivent être réduites pendant la binôme. " • Les élèves doivent être capables de mobilise parallélogrammes et les outils de GeoGebra po

Figure 3 *:Tableau d'état du document « Do » relatif à la deuxième session.*

3.Evolution des connaissances professionnelles de l'enseignant

Après avoir visionné la vidéo de la première session de mise en œuvre en classe, et lors de l'entretien post-implémentation, l'enseignant a évalué et réfléchi sur ses pratiques en classe. Il a admis qu'il avait trop guidé le travail des élèves lors de cette phase d'investigation. Il a justifié ses pratiques par l'hétérogénéité dans l'évolution du travail des élèves avec GeoGebra. L'analyse du « DoPr » relatif à la phase de préparation de la deuxième séance révèle de nouvelles adaptations. Les nouvelles ressources élaborées (la nouvelle activité (fig1) et le nouveau scénario prévu), manifestent l'évolution du rôle de l'enseignant en tant que concepteur qui adapte les ressources (manuel scolaire, guide de l'enseignant, etc.) en fonction de ses objectifs pour son projet d'enseignement. L'analyse des phases de préparation et de mise en œuvre de cette deuxième séance a permis de confronter le « DoPr » et le « DoMe » caractérisant l'évolution du document « Do » (fig3). L'enseignant a ajouté plus de détails dans la formulation de son objectif « O », il précise dans l'entretien pré-mise en œuvre qu'il prévoit d'alterner phase de travail par binôme et travail collectif pour chaque sous tâche. Cela révèle la continuité dans ses pratiques. Il justifie cela par sa volonté à rendre plus proche le rythme de travail des élèves en traitant chaque sous-tâche séparément. L'enseignant considère que cette décomposition permet aux élèves en difficulté de réguler leurs stratégies de travail et de suivre l'évolution de l'ensemble de la classe. Le tableau d'état de « Do » révèle l'émergence de nouveaux invariants opératoires. Par exemple, lors de l'entretien pré-mise en œuvre, l'enseignant déclare que pendant les phases de travail par binôme, les élèves doivent travailler de manière autonome sans être guidés par l'enseignant. Il indique qu'il interviendra uniquement en cas de besoin, pour aider le binôme en difficulté sans lui donner la solution. Ces pratiques sont justifiées par les théorèmes-en-acte "*le travail en binôme permet de développer* ***l'autonomie des élèves*** *et favorise l'apprentissage*." ; le terme "autonomie" a été mis en avant par l'enseignant pour souligner les changements par rapport à la première session de mise en œuvre où il avait guidé étroitement le travail des élèves. Les analyses révèlent également la disparition des orchestrations combinant le travail par binôme et le travail collectif. L'enseignant justifie ses nouvelles actions par le théorème-en-acte "*pour favoriser l'autonomie des élèves, les consignes de l'enseignant doivent être réduites pendant la phase de travail par binôme*". Ces modifications permettent de conclure que la réutilisation de la ressource pour préparer et mettre en œuvre la nouvelle séance, a favorisé l'évolution des connaissances professionnelles de l'enseignant relatives à l'utilisation de GeoGebra (fig3). Parmi les connaissances identifiées, celles susceptibles d'être exprimées sous la forme des théorèmes en acte "*Les élèves doivent apprendre à utiliser l'outil déplacement de GeoGebra pour valider leur construction géométrique*" et "*L'écriture des différentes étapes de la construction géométrique permet aux élèves de faire le lien entre le travail dans l'environnement informatique et le travail dans l'environnement papier/crayon*". Ces résultats attestent que les connaissances de l'enseignant liées à l'utilisation de GeoGebra se sont manifestées à travers l'évolution des adaptations générant l'évolution de la structure du schème d'utilisation en fonction de l'évolution des différents aspects de la classe de situations.

VI. CONCLUSION

Le modèle proposé constitue une contribution théorique et méthodologique pour l'ADD, permettant une analyse fine et dynamique de l'évolution des connaissances professionnelles des enseignants lorsqu'ils intègrent une ressource technologique. Il permet notamment une analyse à court terme de la genèse documentaire, en particulier lors des premières utilisations d'une ressource technologique. Cette capacité à suivre l'évolution des documents pédagogiques sur une période réduite est un apport à l'ADD, qui se concentre traditionnellement sur des processus à plus long terme. Cela permet de mieux comprendre comment les enseignants adaptent leurs pratiques et leurs connaissances dès les premières interactions avec une nouvelle ressource. De plus, le modèle met en avant l'articulation entre l'évolution du schème d'utilisation et celle des situations (relatives à une même classe), offrant ainsi une vision dynamique des ajustements opérés par les enseignants. Sur le plan méthodologique, les outils analytiques développés, notamment la grille de critères d'analyse et le tableau d'état du document, facilitent le suivi de cette évolution. Ces outils permettent de caractériser les différents états d'un document à chaque niveau du travail documentaire de l'enseignant, tout en rendant compte des ajustements opérés aux niveaux des règles d'action et des invariants opératoires.

REFERENCES

ADLER, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205–224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

CHOPPIN, J. (2019). Reflections on the documentational approach to didactics. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to Mathematics Education* (pp. 491–502). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_14

COULET, J.- C. (2019). The organization activity: A foresight approach of theoretical knowledge evolution in management science. *Technological Forecasting and Social Change, 140*, 160–168. https:// doi.org/10.1016/j.techfore.2018.04.009

GUEUDET, G., BUTEAU, C., MULLER, E., MGOMBELO, J., SACRISTÁN, A. I., & RODRIGUEZ, M. S. (2022). Development and evolution of instrumented schemes: a case study of learning programming for mathematical investigations. *Educational Studies in Mathematics*, *110*(2), 353-377. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10133-1

GUEUDET G. (2019). Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In: Trouche L., Gueudet G., Pepin B. (eds) *The 'Resource' Approach to Mathematics Education. Advances in Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_2

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* **71**, 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

KHALLOUFI-MOUHA, F. (2024). Evolution of teachers' professional learning when using a technological resource: a case study of a Tunisian primary school teacher. *Educ Stud Math* **116**, 281–306 (2024). https://doi.org/10.1007/s10649-024-10320-w

KHALLOUFI-MOUHA, F. (2022). Une stratégie de réseautage pour une analyse sémiotique et discursive des pratiques langagières de l'enseignant lors d'une discussion collective dans une séance intégrant un environnement informatique. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ*. **22**, 150–169. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00201-w

KHALLOUFI-MOUHA, F., & BRINI, M. (2022). Rôles des interactions enseignant-élèves dans l'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique : le cas d'un enseignant du primaire en Tunisie. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education* **22**, 835–855. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00257-8

RABARDEL, P. (1995). Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

REMILLARD, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' use of Mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

REMILLARD, J., & HECK, D. J. (2014). Conceptualising the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 46(5), 705–718. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4

REZAT, S., HÉNAFF, C. L., VISNOVSKA, J., KIM, O. K., LEROYER, L., SABRA, H., ... & WANG, C. (2019). Documentation work, design capacity, and teachers' expertise in designing instruction. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to Mathematics Education* (pp. 323-388). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_11

TRGALOVÁ, J., & ROUSSON, L. (2017). Model of appropriation of a curricular resource: A case of a digital game for the teaching of enumeration skills in kindergarten. *ZDM*, *49*(5), 769-784. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0877-1

TROUCHE, L., ROCHA, K., GUEUDET, G., & PEPIN, B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: the case of Anna's documentation work. *ZDM Mathematics Education* 52, 1243–1257. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01164-8

VERGNAUD, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. In: Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (eds) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. New ICMI Studies Series*, vol 4. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5194-8_15

VERGNAUD, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Situations fonctionnelles dans les manuels scolaires marocains : Contextes et activités Cas de la deuxième année du baccalauréat scientifique et technique

Mouhsine Khallouqi[29]
Université Hassan II - Casablanca – Maroc
Said Abouhanifa
CRMEF CS – Settat – Maroc
Naceur Achtaich
Université Hassan II - Casablanca - Maroc

RÉSUMÉ - Le développement des pensées mathématiques chez les apprenants dans leurs cursus scolaires à tous les niveaux revêt une importance croissante. En outre, eu égard au caractère incontournable du concept de fonction et sa place centrale dans l'enseignement des mathématiques, la pensée fonctionnelle (désignée ci-après par PF) occupe progressivement une place parmi toutes ces pensées. Or, le développement de cette pensée est lié aux traitements des situations dites fonctionnelles (SF). Or de telles situations devront être caractérisées par des types d'activités et une variété de contextes connexes au développement de la PF. En outre, une diversification des représentations sémiotiques devra caractérisant les traitements de ces SF. Le présent article est une étude exploratoire de ces trois composantes dans les SF de deux manuels scolaires de mathématiques de la deuxième année du baccalauréat scientifique et technique. Cette étude s'inscrit dans une recherche doctorale sur le développement de la PF au sein du secondaire qualifiant marocain. Les résultats de la présente étude révèlent une tendance très poussée des deux manuels à l'absence de diversification des composantes susmentionnées.

I. INTRODUCTION

Il est à noter tout d'abord que l'enseignement du concept de fonction oscillait depuis les premières réformes de l'éducation au Maroc entre une approche dominé par la rigueur et l'excès du formalisme, et une autre attirée vers la mise en évidence du statut-outil de ce concept (Mawfik et al., 2003 ; Gouvernement du Maroc, 2007). Cette dernière tendance est exprimée par la valorisation des rôles des problèmes et des activités à travers divers contextes, ainsi que l'usage de différentes représentations sémiotiques.

En outre, les programmes et les orientations pédagogiques des mathématiques, notamment de la branche sciences expérimentales et ses filières mises en vigueur actuellement, insistent sur la seconde tendance, que cela soit pour introduire le concept de fonction ou pour le réinvestir

---

[29] Khallouqi, M., Abouhanifa, S. et Achtaich , N. (2024). Situations fonctionnelles dans les manuels scolaires marocains : Contextes et activités - Cas de la deuxième année du baccalauréat scientifique et technique. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 150-159.

(Gouvernement du Maroc, 2007). Néanmoins, ils n’explicitent pas certaines caractéristiques essentielles de la PF qui seront abordées dans la suite de cette étude.

Quant aux examens du baccalauréat, depuis la dernière réforme, les épreuves de mathématiques présentent des situations sur les fonctions numériques, inscrites le plus souvent dans des contextes purement mathématiques, et dont le traitement des tâches n’exige pas une diversification des représentations sémiotiques au sens de Duval (1993). Or, ces dernières années, certains problèmes d’analyse présentent des tâches sur les fonctions numériques, liées à des conversions inhabituelles entre registres.

De surcroît, la PF fortement liée aux phénomènes dynamiques et à la dépendance entre quantités variables, revêt une importance croissante dans un monde évolutif. Or, ni cette forme de pensée ni les concepts qui la caractérisent tels que les SF et les activités fonctionnelles ne se trouvent pas encore introduites de manière explicite et systématique dans les programmes scolaires de mathématiques.

Pour autant, aborder une étude sur le potentiel de développement d’une telle pensée n’impose pas nécessairement que les orientations pédagogiques et les programmes de formation l’évoquent explicitement. Certaines recherches récentes en didactique des mathématiques considèrent que ce potentiel peut être étudié à partir des analyses praxéologiques des SF proposées dans les manuels scolaires (Robert et al., 2018).

À cet égard, la place des activités fonctionnelles et contextes comme composantes caractérisant les SF s’avère une priorité. Dans la même veine, la place des activités de modélisation fonctionnelle et les contextes en rapport avec le réel s’avèrent d’une grande importance. Ceci étant donné que de telles activités visent à établir une représentation simplifiée d’une « relation fonctionnelle complexe du monde réel » (Robert, 2018, p. 49). D’ailleurs, le développement historique du concept de fonction comme concept central dans le développement de la PF s’avère fortement lié aux phénomènes dynamiques. Sur le plan opératoire, la manipulation et l’accessibilité du concept de fonction exigent sont traitement dans les diverses représentations connexes (Yavuz, 2010)

D’autre part, il convient de signaler que les études exploratoires du potentiel de développement de la PF au cycle primaire par exemple, englobent toutes les activités enseignées (numériques, géométriques, graphiques et statistiques) (Blanton et Kaput, 2011 ; Robert et al., 2018) . Ceci résulte au fait qu’a ce stade la notion de fonction peut être aborder implicitement c’est-à-dire comme notion protomathématique (Chevallard, 1985).

De plus, tous les travaux consultés sur la PF s’intéressent au développement de cette forme de pensée aux niveaux inférieurs au cycle du baccalauréat. Or, au cycle secondaire, l’étude des fonctions numériques à variable réelle devient une entité à part entière avec un enrichissement au niveau d’activités de contextes et registres sémiotiques accompagnant cette transition.

Ainsi, l’objectif principal de ce texte vise à établir un éclairage sur les SF dans les manuels scolaires du baccalauréat scientifique et technique marocain. Plus précisément, cette étude vise à caractériser les SF présentées dans ces manuels suivant les trois caractéristiques principales susmentionnées.

La question clé de cette étude s’énonce donc ainsi :

Quelle place occupent les différents types d’activités fonctionnelles et de contextes, en rapport avec les SF proposées dans les manuels scolaires marocains de mathématiques du baccalauréat, ainsi que les différentes représentations sémiotiques utilisées dans les solutions proposées par leurs auteurs ?

II. CADRE CONCEPTUEL

1.Pensée mathématique et activité

Selon sa même dimension réflexive, la pensée mathématique renvoie à toutes les actions tangibles que les élèves produisent lors d'une activité mathématique particulière (Radford, 2015). De ce fait, nous adoptons l'idée que la pensée mathématique se déploie et se développe à travers l'activité des apprenants.

2.Activité fonctionnelle

Selon Cotnoir (2010) l'activité est « non pas l'activité cognitive de l'élève, ses stratégies ou son raisonnement, mais bien ce qui va mettre l'élève en action. » (p. 69). Néanmoins une distinction fondamentale s'impose entre les concepts activité et tâche : tâche et activité indiquent respectivement le travail prescrit, et le travail exécuté réellement (Nonnon, 1998).

Selon Robert (2018) une activité fonctionnelle (AF) est une activité qui est caractérisée par l'usage de la notion de fonction d'une manière implicite ou explicite. La même chercheure classe les AF en trois types comme suit:

- La modélisation fonctionnelle (Mod) : c'est « un processus à travers lequel une situation réelle est étudiée afin d'établir le modèle fonctionnel le plus approprié possible qui traduit la relation fonctionnelle en jeu.» (p. 64).
- La généralisation fonctionnelle (Gén) : il s'agit de pressentir une régularité entre quelques couples de variables, d'établir la relation fonctionnelle en jeu dans la SF, puis de justifier la généralisation établie.
- L'étude d'une relation fonctionnelle (Et) : c'est une AF qui consiste à étudier une relation fonctionnelle déjà donné par l'une de ses représentations sémiotiques.

3.Contexte d'une situation

En reliant le contexte tantôt au problème tantôt à l'activité ou à la tâche, Cotnoir (2010) le définit comme « la façon de présenter l'énonce (symbolique, verbale, imagée ou avec manipulations) » (p. 5)

Pour la présente étude un contexte est un énoncé d'exercice ou de problème, dont nous proposons la typologie suivante :

- Le contexte purement mathématique (P.Math) : Qui ne fait recours qu'à des objets mathématiques.
- Le contexte extra-mathématique : Il comprend trois sous types notamment le contexte réel, le contexte réaliste et le contexte imaginaire.
    - Le contexte réel (Ex.Réel) : en rapport directe avec la réalité, et où l'élève et les activités en question en sont des éléments.
    - Le contexte réaliste (Ex.Réaliste) : pouvant se produire réellement, il s'agit d'une imitation de la réalité ou d'une partie de la réalité.
    - Le contexte imaginaire (Ex.Imaginaire) : Qui n'est ni purement mathématiques, ni en rapport avec la réalité.

4.Situation fonctionnelle

Il faut noter que d'après Robert (2018) tout activité d'apprentissage se déroule et se développe lors du traitement d'une situation d'apprentissage qui se compose d'un contexte et au moins d'une activité d'apprentissage. Ainsi, une situation fonctionnelle (SF) comporte au moins une activité fonctionnelle.

5.Définitions de la pensée fonctionnelle

Selon Stölting (2008), cette pensée désigne :

« La manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles. Elle se traduit entre autres par les compétences suivantes :

1) Les relations fonctionnelles entre des grandeurs peuvent être détectées, décrites, produites et reproduites dans toutes les représentations usuelles.

2) Des hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est. » (Stölting, 2008, p. 12).

D'après Robert (2018), la pensé fonctionnelle s'agit d'une manière d'agir et de réfléchir dans les activités fonctionnelle.

Ainsi nous remarquons que les expressions « dépendances fonctionnelles » « grandeurs », dans la première définition de la PF et « explicite ou implicite » dans sa seconde définition, précisent que la pensée fonctionnelle est requise même au-delà du domaine purement mathématique.

Donc en guise de synthèse, la PF se déploie en activité fonctionnelle (AF) comme l'une des composantes principales d'une situation fonctionnelle (SF).

6.Opérationnalisation de la PF

La PF s'opérationnalise comme : 1) Un ensemble de raisonnements particuliers dans les AF 2) Un rapport particulier aux concepts en jeu dans ce type d'activité et 3) Une manière de communiquer et de représenter (Robert, 2018, p. 48). Sans revenir en détail sur la notion des registres sémiotiques développée par Duval (1993), nous soulignons l'importance du recours aux différentes représentations sémiotiques pour communiquer dans les contextes des différents AF. Ainsi nous adoptons la typologie de représentations suivantes :

- Cinq représentations institutionnelles notamment Numérique (y compris les tableaux de valeurs), Tabulaire (tableau de variations, de signe, de concavité et de position relative), Graphique, Symbolique (y compris les représentations algébriques) et Verbale.
- Une représentation non institutionnelle : figurale (y compris les figures géométriques, les dessins les schémas, les images, établis pour illustrer ou raisonner).

III. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

L'objectif de notre travail est de réaliser une analyse exploratoire concernant les différents types d'activités fonctionnelles et de contextes dans les SF proposées dans deux manuels scolaires de mathématiques de la 2ème année du cycle de Baccalauréat au Maroc. Les différents types de représentations sémiotiques utilisées par les auteurs de ces manuels dans les solutions proposées sont aussi objet de cette exploration.

Deux branches sont choisies pour accomplir ce travail : sciences expérimentales et sciences économiques de la 2ème année du Baccalauréat. En fait leurs programmes d'enseignement notamment celui des mathématiques représentent des champs très favorables pour le traitement de diverses SF. Ainsi les deux manuels scolaires accrédités par le ministère de l'éducation nationale mis en exploration dans ce travail de recherche sont:

- « Etincelle MATHS », édition 2023 : destiné aux élèves de la deuxième année du Baccalauréat Sciences Economiques, ce manuel est choisi par sa nouveauté, et par le fait que ses auteurs déclarent -dans l'avant-propos- accorder une place importante à la résolution de problèmes dans des situations à divers contextes (Khalkallah,H. et al., 2023).

- « Al Moufid en Maths », édition 2021 (Hakkani,A., et al. 2021) : destiné aux élèves de la deuxième année du cycle de Baccalauréat Sciences Expérimentales. Outre les raisons évoquées pour le choix du 1er manuel, le choix de ce 2ème manuel est conforté par sa large diffusion constatée et ce, d'après l'expérience professionnelle dans le domaine de l'enseignement.

Concernant la grille conçue pour la collecte des données :

- Une « SFI » désigne toute SF présentée pour introduire un nouveau savoir relatif à l'étude des fonctions numériques.

- Une « SFE » désigne toute SF d'évaluation visant l'application, le renforcement, ou le réinvestissement des apprentissages sur les fonctions numériques.

D'une part, il convient de noter l'absence de guides d'enseignant visant à expliciter entre autres les propos des auteurs, concernant l'usage et les conversions des registres sémiotiques, que les élèves devront reconnaître et investir. C'est ainsi que le type « SFE » est classé en deux sous-types :

- Une « SFE-AS », est une SFE accompagnée d'une solution ou d'une indication de solution.

- Une « SFE-SS », est celle qui n'est accompagnée d'aucune solution.

D'autre part vu que cette étude s'intéresse au domaine d'étude des fonctions numériques dans toute sa globalité, les données sur les chapitres concernés sont recueillies et analysées d'une manière exhaustive. Ainsi, pour chacun des deux manuels, les chapitres en question et les différents types d'exercices et problèmes retenus pour chaque type de SF sont précisés dans le Tableau 1 en annexe.

Notons aussi que contrairement aux types de contextes, les SF peuvent imposer plus qu'un type d'AF. Ainsi, en vue d'avoir des résultats plus précis, toutes les combinaisons possibles de types d'AF sont intégrées dans la grille de dépouillement (Voir Grille 1 en annexe).

Après le choix du manuel, l'analyse consiste à spécifier chaque type de SF en combinant entre les types qui viennent d'être présenté et les données du tableau 1 en annexe. Ensuite sur la base de l'énoncé en question l'AF associée à cette SF est déterminée en s'appuyant également sur les définitions des trois types d'AF susmentionnés. Sur la même base, le contexte de la SF est spécifié tout en faisant appel aux différents contextes adoptés dans cet article.

Les types de représentations sémiotiques déployés dans les solutions aux SFE-AS sont également concernés par cette analyse (voir Grille 1 en annexe).

IV. PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Le traitement des données sur Excel a abouti aux résultats suivants :

Concernant le manuel « Étincelle MATHS », sur 24 SFI analysées 23 ne comprennent que des activités fonctionnelles « étude d'une relation fonctionnelle » (Et) et ayant un contexte « purement mathématique » (P.Math). La seule autre situation engendre une AF du type Mod-Et et a un contexte Ex. Réaliste (voir Exemple 1 en Figure 1).

Les mêmes résultats ont été obtenus concernant SFE-SS, en effet parmi 250 situations analysées, 239 (95,6 %) se composent d'activités Et et de contexte P.Math; tandis que les SF restantes se composent comme le cas précédent d'activités Mod-Et et de contextes Ex.Réaliste avec un pourcentage de 4,4%.

Concernant les SFE-AS des résultats encore plus extrêmes ont été obtenus, toutes les 40 situations fonctionnelles analysées se composent d'activités Et et de contextes P.Math. Quant aux types de représentations sémiotiques dans les solutions proposées, une omniprésence des représentations symboliques et verbales caractérise toutes les solutions proposées. Les représentations tabulaires viennent en deuxième position avec 45% des situations concernées; elles sont réparties dans la plupart des cas entre les tableaux de variations et de signes. Ensuite arrivent les représentations numériques et graphiques avec respectivement 15% et 7,5%.

A propos du manuel « Al Moufid en Maths » les résultats sont assez similaires. Concernant le type SFI, parmi 75 situations analysées, 71 demandent des activités type Et et ont un contexte P.Math (voir Exemple 2 en Figure 2), tandis que 4 seulement sollicitent l'usage de modèles fonctionnels et leurs études (Mod-Et), et ont pour contexte Ex.Réaliste. Les 339 SF d'évaluation sans solutions (SFE-SS) examinées comportent environ 98% de situations ne faisant appel qu'à des activités fonctionnelles Et, le reste est classé dans le type d'activité Mod-Et.

L'analyse des contextes de ces situations révèle une légère différence par rapport au premier manuel, en fait 98,8% des SFE-SS sont de contexte P.Math et seulement 1,18% sont de contexte Ex.Réaliste. Ce décalage est dû au fait que parmi les 7 situations ayant pour activité Mod-Et, 3 sont de contexte P.Math. L'exemple 3 présente l'un de ces cas (voir Figure 3).

A propos des SFE-AS, encore une fois chacune des 32 situations étudiées se compose d'activité Et et d'un contexte P.Math. Toutes les solutions présentées sont caractérisées par une dominance des représentations symboliques et verbales. À noter que parmi ces solutions, 6 seulement comprennent en plus des tableaux, le plus souvent des tableaux de variations, et 5 comprennent en plus des représentations graphiques.

Globalement à l'exception de la présence des représentations tableaux en Sc. économiques avec 45% des solutions examinées, les deux représentations tableaux et graphique réunies, ne sont présentes dans les deux manuels qu'avec des pourcentages oscillant entre 7,5% et 18,8% .

Il est à noter aussi que l'analyse des deux manuels a révélé certaines SFE-SS du type d'activité ET et du contexte P.Math, qui présentent tout de même des tâches relevant de l'étude qualitative des fonctions numériques. Il s'agit plus précisément de tâches similaires aux tâches non routinières caractérisant quelques sujets du Baccalauréat des dernières années (voir Exemple 4 en Figure 4).

Exemple 1 : SFI d'activité Mod-Et et de contexte Ex. Réaliste

On considère la fonction f définie sur [0;8] par: $f(x) = (20x + 10)e^{-0,5x}$
1. Montrer que $f'(x) = (-10x + 15)e^{-0,5x}$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0;8].

3. Application :

Le bénéfice en milliers de dirhams, réalisé par une entreprise lorsqu'elle produit et vend x tonnes de farines ; $0 \leq x \leq 8$ est donné par: $B(x) = (20x + 10)e^{-0,5x} - 10$

Déterminer la masse de farine à produire et à vendre à partir de laquelle le bénéfice commence à décroître de moins en moins vite.

Figure 1 *: « Etincelle MATHS », ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE, 3 page 146*

Il ne s'agit pas d'une AF qui présente une pure modélisation puisque le modèle fonctionnel est donné, néanmoins l'application fournira surement à l'élève un exemple réaliste mettant en évidence l'utilité du concept de fonction dans la vie concrète. C'est l'un des rares cas classés dans ce type de SFI, en plus il ne s'agit pas d'une pure introduction d'un concept, mais c'est plutôt une application de la fonction exponentielle népérienne.

Exemple 2 : SFI d'activité Et et de contexte P.Math

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Vérifier que g est bien définie sur]-1;1[.

b) Soit x_0]-1;1[. Montrer que g est continue en x_0.

On dit alors que la fonction g est continue sur l'intervalle]-1;1[

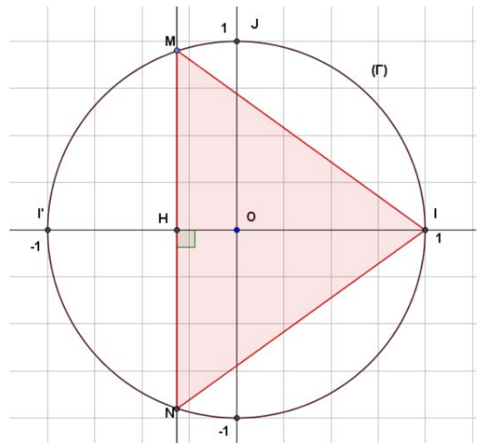
Figure 2 *: « Al Moufid en Maths », ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES, 3 « Continuité sur un intervalle », 2 page 19*

Il s'agit de l'étude de certaines caractéristiques d'une relation fonctionnelle donnée par son expression algébrique, pour introduire le savoir attendu. Ce qui justifie le type d'AF et de contexte susmentionnés. Néanmoins une SF avec une fonction qui modélise un phénomène dynamique mettant en relief la notion de continuité sur un intervalle serait certainement plus efficace pour cette une telle introduction.

Exemple 3 : SFE-SS d'activité Mod-Et et ayant pour contexte P.Math

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, soit le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 et le point I'(-1;0.)

La perpendiculaire à la droite (II') passant par un point H sur (II'), distinct de I et de I' coupe (Γ) aux points M et N. (Voir figure ci-contre)



Soit f la fonction numérique définie sur

[-1;1] par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$

1) Exprimer l'aire du triangle MIN en fonction de l'abscisse x du point H.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et -1.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x∈]-1;1[et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Montrer que le triangle MIN d'aire maximale

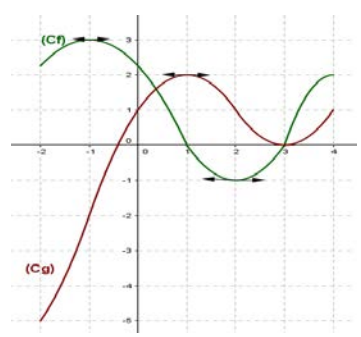
est équilatéral.

Figure 3 *: « Al Moufid en Maths », EXERCICES ET PROBLÈMES, 67, page 138*

En comparaison avec l'exemple 1, le modèle fonctionnel est à redécouvrir par l'élève ; ce dernier devra ensuite l'étudier, puis interpréter les résultats pour une question d'optimisation. Il s'agit donc d'une tendance plus nette vers le processus de modélisation, néanmoins l'AF est inscrite dans un contexte P.Math. En plus, ce type d'activité (Mod-Et) est rare dans les deux manuels examinés.

Exemple 4 : SFE-SS concernant l'étude qualitative des fonctions numériques

Dans le repère ci-contre, une fonction f et une fonction g sont représentées graphiquement par (Cf) et (Cg) dans l'intervalle : I = [-2, 4].



On suppose que l'une est primitive de l'autre.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur I

2. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur I.

3. Etudier le lien entre le signe de f et le tableau de variation de g.

4. Prouver que g est une primitive de f sur I.

Il est à signaler tout d'abord que trois modifications ont été apportées à l'énoncé et à la figure originale de cette situation, vu les quelques anomalies que ceux-ci présentent. Il s'agit d'un cas de SF ne débordant pas le type d'activité Et et le contexte P.Math. Pourtant cette SF se penche sur une composante que nous qualifions de primordiale dans ce domaine, à savoir l'étude qualitative des fonctions numériques. Cette étude qui est caractérisée par l'usage des représentations tabulaires, graphiques, et verbales.

V. CONCLUSION

Cette étude vise à révéler l'importance des types d'activités, des contextes et des représentations sémiotiques dans les SF proposées par deux manuels scolaires de mathématiques. Ces manuels sont destinés aux élèves et aux enseignants des classes de Baccalauréat sciences expérimentales et sciences économiques.

Il ressort de l'étude une prédominance des activités de type Et, et du contexte P.Math. Plus précisément, la grande majorité des SF examinées dans les deux branches – environs 97% - réunissent le type d'activité et le contexte susmentionnés à la fois. Il convient de rappeler que les textes officiels des deux niveaux étudiés ne mentionnent pas explicitement les différents types d'AF et de contextes empruntés à Robert (2018) pour cette recherche. Toutefois, ces textes soulignent l'importance d'appliquer le concept de fonction dans divers contextes notamment le contexte réel, ainsi que les concepts de modèle et de modélisation y apparaissent d'une manière sporadique (Gouvernement du Maroc, 2007).

Ceci pousse à se questionner sur le fait de savoir si les auteurs de ces manuels aspirent à répondre aux exigences des examens du Baccalauréat qui, depuis la dernière réforme, incluent uniquement des activités Et et des contextes P.Math. Toutefois, les concepteurs des manuels scolaires possèdent théoriquement une marge de liberté pour diversifier les types d'activités et de problèmes indépendamment de ces exigences-là, d'où une deuxième question : Est-ce la rareté des situations de modélisation et de généralisation fonctionnelle ou la complexité de leur élaboration qui expliquent leur faible recours dans les manuels pour ces deux niveaux scolaires ?

D'autre part, les solutions proposées par les auteurs, sont marquées par une faible présence faible des deux représentations tabulaire et graphique. Or ces deux types de représentations sont indispensables pour analyser et interpréter les phénomènes dynamiques modélisables par des fonctions numériques (Robert, 2018). De surcroît, si les examens du Baccalauréat des dernières années proposent des SF se limitant aux activités Et et aux contextes P.Maths, il n'en est pas de même en ce qui concerne l'usage des représentations sémiotiques. Ainsi en est-il de la présence dans les épreuves des dernières années de SF sollicitant d'inhabituelles AF pour les élèves, telles que par exemple l'exploitation du tableau de variation d'une fonction dérivée f', pour déduire des résultats sur les fonctions f et f'' . L'analyse des deux manuels a montré la rareté de telles SF, et la surabondance des SF caractérisées par des AF de l'étude d'une relation fonctionnelle et des contextes P.Math, tout en ne dépassant pas le cadre des SFE-SS. Or, les élèves ont besoin de développer une PF à travers les divers types d'AF et de contextes.

Eu égard à ces éléments, et à la nouveauté des manuels examinés, une troisième question s'impose : N'est-il pas opportun de procéder à une nouvelle conception pour aborder l'enseignement des fonctions numériques au sein du baccalauréat scientifique sous l'angle de la PF ? Une telle vision mettrait en considération toutes les composantes relatives à cet enseignement, ainsi que toutes les articulations qui en sont connexes.

REFERENCES

BLANTON, M., et KAPUT, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (p. 5-23). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble (1991 : 2ème édition).

COTNOIR, G. (2010). Evolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours. Mémoire en vue de l'obtention de maîtrise en sciences de l'éducation). Université de Sherbrooke, Faculté d'éducation, Canada.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, (5)*, 37-65.

HAKKANI, A. et al. (2021). Al Moufid En Maths, Manuel de l'élève, 2ème Année du cycle de Baccalauréat Sciences Expérimentales et ses filières Sciences et Technologies Industrielles et ses filières, Mathématiques. Casablanca : Dar Attakafa.

KHALKALLAH, H. et al. (2023). Etincelle MATHS, Manuel de l'élève, 2ème Année Baccalauréat Sciences Economiques, Mathématiques. Casablanca : Apostrophe.

MAWFIK, N., HIJAZI, R., LAKRAMTI, A., & MENSOURI, L. (2003). Réformes et tendances de l'enseignement des mathématiques au Maroc. 6. Retrieved from http://emf.unige.ch/files/4814/5459/5222/EMF2003_GT4_Mawfik.pdf.

NONNON, E. (1998). L'apprentissage des conduites de questionnement : situations et tâches langagières. In : Repères, recherches en didactique du français langue maternelle, n°17, 55-85.

GUVERNEMENT DU MAROC. (2007). Programmes et orientations pédagogiques de l'enseignement des mathématiques, en cycle secondaire qualifiant, Maroc (2007).

RADFORD, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans les actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum. Alger.

ROBERT, V. (2018). Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique. Mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke, Québec.

ROBERT, V., SQUALLI, H. ET BRONNER, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique du potentiel de son développement précoce. Dans M. Abboud (dir.), Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF 2018 (p. 51-63). Université de Paris.

STÖLTING, P. (2008). La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans - Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Universität Regenseburg.

YAVUZ, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching ? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 468-485.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

University Mohammed VI Polytechnic

Gestion didactique de la résolution de problèmes mathématiques en contexte de classe en sureffectif, une étude de cas au Bénin

Jeanne Koudogbo[30]

Université de Sherbrooke, Québec, Canada

Henri Dandjinou, Gervais Marc A. Affognon, Pierre Dossou Dossa

IMSP- Institut de mathématiques et de sciences physiques, Bénin

Résumé – Dans ce texte, nous présentons les résultats préliminaires d'un pan d'une recherche plus large réalisée au Bénin à propos de l'enseignement des mathématiques dans un contexte de classes en sureffectif. Enseigner dans un tel contexte semble comporter des défis pouvant nécessiter des adaptations pour que les élèves, surtout ceux à besoins particuliers, apprennent en résolvant des problèmes. La recension des écrits (Koffi & al., 2021 ; Conombo & al., 1996) montre un certain vide en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques autour de la résolution de problèmes en Afrique subsaharienne. Dans notre étude, nous nous intéressons spécifiquement à la gestion didactique de la résolution de problèmes, une tâche dite complexe (Jackson & al., 2013), dans une classe de CM1 (5e année du primaire, élèves de 9-10 ans). Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur plusieurs travaux portant sur la résolution de problème, la gestion d'un point de vue didactique (Stein & al., 2008 ; Jackson & al., 2012 & 2013 ; Demonty & Fagnant, 2012 ; Brousseau, 1998 ; Koudogbo, 2021 & 2013). Nous avons réalisé des analyses à partir du programme d'études béninois à propos de l'enseignement de la mesure (INFRE, 2021), mais également sur les plans mathématiques et didactiques à propos de la tâche à résoudre, de la gestion des phases de résolution, dont l'entrée dans la tâche, sa résolution par les élèves et la discussion conclusive. Les résultats nous renseignent sur les possibles impacts d'une classe en sureffectif dans la gestion de la résolution de problèmes lors des interactions. Le contexte des classes en sureffectif semble rendre difficile le travail de l'enseignant.e et, par conséquent, ne favorise pas assez l'engagement dans la tâche ni l'activité mathématique des élèves, notamment ceux à besoins particuliers. Des adaptations et modifications ont été apportées in situ, nonobstant une séance bien planifiée, révélant ainsi une certaine marge de manœuvres dans la gestion didactique. Les résultats permettent de mieux comprendre les conditions favorables à l'accès aux mathématiques des élèves, notamment ceux et celles qui rencontrent des difficultés et de renouveler la formation initiale et continue des enseignant.e.s.

I. INTRODUCTION

Notre proposition concerne un pan d'une recherche plus large réalisée en collaboration avec des enseignant.e.s du primaire et du secondaire au Bénin autour des pratiques enseignantes en mathématiques en contexte de classes en sureffectif. Dans ce contexte, les effectifs des classes sont

[30] Koudogbo, J., Dandjinou, H., Affognon, G. M. A. et Dossou Dossa, P. (2024). Gestion didactique de la résolution de problèmes mathématiques en contexte de classe en sureffectif, une étude de cas au Bénin. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT4, pp.160-173.

pléthoriques, s'élevant à 50 et atteignant parfois 120, voire 150, comparativement aux pays occidentaux (Canada, France ou Suisse) où l'on compte 25 ou 30 élèves au maximum. De plus, ce contexte est empreint d'une hétérogénéité liée aux caractéristiques socioculturelles et linguistiques des élèves. Ces élèves sont ainsi scolarisés en français, une langue autre que celle maternelle, et apprennent les mathématiques en résolvant des problèmes. Cela peut causer des difficultés langagières et subséquemment jouer sur le processus d'enseignement-apprentissage, à l'instar de la réalité des classes d'accueil au Québec ou en France (Koudogbo & al., 2016 ; Millon-Fauré, 2011). Or, Chaudet et Galasso-Chaudet (2015) soulignent que la formation initiale ne prépare pas assez les enseignant.e.s à gérer une telle hétérogénéité. En outre, on observe une certaine pénurie de dispositifs didactiques auxquels les enseignant.e.s peuvent se référer (Lemoyne & Gervais, 2014). Ils interviennent par tâtonnements en fonction de leurs expériences ou grâce à des approches plutôt traditionnelles visant le groupe-classe.

Dans ce texte, au sein du *GT4 : Enseignement des mathématiques dans des contextes spécifiques*, notre propos ne portera pas sur les pratiques enseignantes, mais nous allons plutôt nous centrer dans ce contexte de classe en sureffectif sur une étude de cas liée à la résolution de problèmes mathématiques. Rappelons que l'enseignant.e intervenant dans un tel contexte est censé parvenir à engager les élèves dans le processus d'enseignement-apprentissage, par l'entremise de problèmes à résoudre en vue de leur faire construire des connaissances et développer les compétences requises. Notre étude s'intéresse alors à la manière dont une enseignante d'une classe du primaire, CM1 (3e niveau, 5e année, élèves âgés de 9-10 ans) gère la situation de résolution de problèmes dans ce contexte de l'enseignement des mathématiques. Pour ce faire, nous allons documenter les moyens mis en œuvre par l'enseignante en considérant la résolution de problèmes d'une part et ce qui se joue dans les interactions didactiques (Koudogbo, 2013), en classe, pour faire entrer les élèves dans la tâche ainsi que ce que font les acteurs concernés (enseignante et élèves) autour de la résolution, d'autre part.

II. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : DÉFIS ET GESTION DIDACTIQUE

Résoudre des problèmes ou tâches complexes, en général, s'avère être, comme le soulignent Jackson et al. (2013), un défi pour les élèves, lesquels rencontrent des difficultés de compréhension lors de l'entrée dans la tâche (Jackson & al. 2013) et par conséquent des difficultés à la résoudre. Il va sans dire que ce défi est encore plus grand pour les élèves scolarisés dans une langue seconde (Barwell, 2003), ou pour ceux à besoins particuliers (Koudogbo & al., 2016) tels ceux impliqués dans notre étude. De surcroit, résoudre des problèmes mathématiques est une des compétences au cœur de plusieurs programmes de mathématiques des pays du Nord (Canada, France, Suisse...) ou des pays dits en émergence, dont le Bénin. C'est pourquoi, la résolution de problèmes semble indispensable au processus d'enseignement et d'apprentissage. Elle joue différents rôles en étant un objet d'apprentissage et un moyen pédagogique. En tant qu'objet d'apprentissage, elle s'enseigne en référant à une démarche de résolution à apprendre en vue d'acquérir, selon Demonty & Fagnant (2012, p. 1759), « des connaissances plus méthodologiques ». S'il en existe plusieurs, celle introduite par Polya (1945), par exemple, comprend plusieurs étapes interreliées : la compréhension du problème ; la conception d'un plan ; l'exécution du plan conçu ; l'obtention de la solution et la vérification/validation de l'exactitude de la solution obtenue. En tant que moyen pédagogique, elle est utilisée pour amener les élèves à apprendre les mathématiques, leur donnant un sens, et leur permettant de construire de nouvelles connaissances. Résoudre un problème va ainsi au-delà de l'apprentissage d'une simple démarche de résolution, à appliquer linéairement par l'élève, à partir de techniques. Par conséquent, il importe de noter que l'enseignement par la résolution de problèmes vise aussi bien le développement de l'apprentissage des mathématiques que l'apprentissage de la démarche de résolution des problèmes (Demonty & Fagnant, 2012). Par ailleurs, en vue d'amener les élèves à résoudre ces types de tâches, outre la maîtrise des concepts mathématiques en jeu, plusieurs défis (mathématiques, didactiques et pédagogiques) sont à relever du côté de l'enseignant.e dans le choix des tâches et dans leur pilotage in situ.

En matière de gestion didactique, il s'avère pertinent de se référer aux travaux de plusieurs auteurs (Stein & al., 2008 ; Smith & al., 2009 et Jackson & al., 2012 & 2013) qui s'y sont penchés. Précisément, la gestion didactique concerne les actions de l'enseignant.e lorsqu'il ou elle pilote la situation, en interagissant avec les élèves autour des contenus en jeu. Selon ces auteurs, l'enseignant.e peut recourir à une gestion particulière de la situation de résolution qui implique trois phases. Ce sont, l'introduction de la tâche, la résolution par les élèves ainsi que la discussion finale menée dans la phase dite conclusive. La gestion de chacune de ces phases par l'enseignant.e est incontournable, car la manière de donner l'accès d'une tâche aux élèves influe sur l'engagement dans la tâche et sa résolution, et donc, sur les apprentissages. En fait, il se pose dans la phase introductive le problème de l'entrée dans la tâche, et ce, dans un contexte d'enseignement ou la langue de scolarisation des élèves n'est pas celle maternelle. Par conséquent, l'accès à la consigne peut être délicat si l'énoncé du problème comprend des mots moins usuels. En effet, les élèves pourraient avoir de la difficulté liée à la compréhension du texte du problème. Mais ils ou elles pourraient également avoir de la difficulté pour saisir le problème mathématique en tant que tel, ce qui pourrait les empêcher d'établir le calcul relationnel approprié pour bien se représenter l'enjeu de la tâche pour la résoudre. De plus, l'élève a besoin de prérequis notionnels pour accéder à la consigne, entrer dans la tâche et s'y engager. Ainsi, pour favoriser l'accès au problème, Jackson et al (2012) insistent sur le rappel des connaissances mathématiques. Quant à la phase de résolution, différents observables peuvent apparaître dans les interactions, entre l'enseignant.e et les élèves. Celui-ci peut chercher à accéder aux productions des élèves, à ce qu'ils font, disent. Ce faisant, il sera possible à l'enseignant.e d'anticiper les actions à mener dans la phase suivante. D'ailleurs, selon Jackson et al. (2013), il sera possible à l'enseignant.e de planifier et d'orchestrer pertinemment dans la phase conclusive la discussion. Ainsi, elle pourra faire verbaliser les élèves, en recourant à un langage commun. De telles interactions permettent aux élèves de développer et de justifier leurs raisonnements par rapport aux différentes solutions. Ils peuvent enfin faire des liens mathématiques et construire des concepts signifiants (Jackson & al. 2013 ; Smith & al. 2009). Par ailleurs, le langage permet de soutenir les discussions et joue ainsi un rôle important dans les interactions menées dans les différentes phases. Il est nécessaire dans l'exercice d'une médiation entre les élèves et la tâche à résoudre proposée par l'enseignant.e (Rogalski, 2008).

Somme toute, cette gestion par l'enseignant.e de chacune des trois phases est de nature didactique, car elle s'insère dans le processus d'enseignement-apprentissage. Elle conditionne l'engagement et l'apprentissage des élèves, voire leur activité mathématique. En ce sens, nous pensons utile d'introduire les notions développées dans la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), notamment la dévolution et l'institutionnalisation. La dévolution consiste en un processus au cours duquel l'enseignant.e. propose aux élèves une situation mathématique (ou un problème), à résoudre et, les élèves la prennent en charge, pour interagir avec la situation en s'y engageant pour la résoudre. Pour Koudogbo (2013, p. 91) : « La dévolution fait ainsi appel à l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation, non seulement pour en accepter la résolution, mais aussi pour accepter qu'il soit responsable de la validité de la solution réalisée. » Elle implique pour ainsi dire, autant l'enseignant.e, la situation que les élèves. Par ailleurs, l'enseignant.e par le processus d'institutionnalisation, aide les élèves à « donner un statut de savoir utile et réutilisable à certaines des connaissances utilisées pour résoudre le problème » (Brousseau, p. 221). Par ce processus « les interactions didactiques entre les élèves et leur enseignant[e] occupent une place de choix dans le passage du rapport privé au rapport public en ce qui a trait aux connaissances et savoirs » (Koudogbo, 2013, p. 94). La dévolution du problème, i.e., de la tâche complexe, pourrait d'une certaine manière perdre son sens quant à la prise en charge du problème par l'élève, appauvrissant ainsi la recherche de stratégie gagnante, de solution. De même, étant donné les rôles pouvant être joués par la résolution de problème (objet ou outil), l'enseignant.e pourrait lors de l'institutionnalisation statuer en se limitant à la démarche de résolution au détriment de donner un statut officiel aux connaissances mobilisées pour les convertir en savoir qui est visé institutionnellement.

III. PERTINENCE DE L'ÉTUDE ET VISÉES

Enseigner les mathématiques dans un contexte de classe en sureffectif semble avoir des défis, voire des contraintes pouvant nécessiter des adaptations, notamment en matière de gestion didactique de la situation. D'ailleurs dans la recension des écrits, des travaux concernant l'enseignement des mathématiques en Afrique subsaharienne autour de la résolution de problèmes sont quasi inexistants. Des rapports de recherche (Koffi & al., 2021) ou des travaux en pédagogie des grands groupes (Conombo & al., 1996) sont accessibles. Nous réalisons donc cette étude, dans le contexte béninois d'enseignement au primaire, laquelle revêt, nous semble-t-il, un réel intérêt en éducation, vu la portée des mathématiques et de la résolution de problèmes dans la réussite scolaire (UNESCO, 2017). Les résultats aideront à combler l'absence d'études et à renouveler les contenus en formation initiale ou continue, sans compter les incidences sur l'apprentissage des élèves dont ceux à besoins particuliers ou en difficulté.

Pour ce faire, nous examinerons comment se fait l'enseignement des mathématiques autour de la résolution de problèmes dans un contexte de classe en sureffectif au primaire. Dit autrement, comment l'enseignante gère-t-elle l'entrée dans la tâche et sa résolution pour que les élèves s'y engagent et la résolvent. Nous nous intéresserons alors aux tâches proposées à résoudre et à leur mise en œuvre in situ. Précisément, il s'agira de décrire ces tâches et d'analyser la gestion didactique de l'enseignante dans l'entrée dans la tâche et sa résolution lors de la mise en œuvre ainsi que les effets possibles sur l'activité mathématique des élèves. Par une analyse des interactions didactiques, il sera possible de formuler des hypothèses liées à ce qui relèverait de la spécificité de l'enseignement dans un contexte de classe en sureffectif ou d'une généricité et donc, peu importe les contextes. Dans ce qui suit, nous présenterons les éléments méthodologiques, les résultats, les discussions et la conclusion.

IV. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

D'emblée, les données ont été collectées dans le cadre d'une recherche collaborative plus large impliquant six enseignant.e.s (primaire et secondaire). Mais nous en avons utilisé un pan pour documenter l'enseignement des mathématiques dans un contexte de classes en sureffectif au primaire. Exploratoire et qualitative (Paillé & Mucchielli, 2021), avec une visée herméneutique, l'étude vise à comprendre l'objet, le rendre intelligible par l'observation et à s'imprégner de la mise en œuvre effective d'une situation d'enseignement. Celle-ci s'insère dans un contexte particulier, celui d'effectif pléthorique et d'hétérogénéité. En ce qui concerne le processus de la recherche, nous avons eu une première rencontre avec l'enseignante Léa (un pseudonyme pour garantir l'anonymat) pour initier l'étude, présenter les étapes, les attentes réciproques et les considérations d'ordre éthique (participation volontaire, libre et éclairée, bénéfices, anonymat, conservation et utilisation des données et diffusion). Puis nous avons séjourné dans sa classe, pour observer une séance sans la filmer pour nous familiariser avec le milieu d'étude. Enfin, nous avons, à un autre moment, procédé à la collecte des données, i.e., en mars-avril 2023 dans la classe de Léa. Léa a 16 années d'expérience en enseignement et a reçu une formation initiale et des formations continues. Sa classe de 5e année du primaire, cours moyen – CM1, compte 56 élèves, âgés de 10-11ans dont 31 filles et 25 garçons, scolarisés en français, une langue autre que celle maternelle. Diverses hétérogénéités les caractérisent : origines sociaux culturelles, linguistiques et niveaux en mathématiques.

Il nous semble pertinent de dresser un panorama de la salle de classe, vu le contexte particulier lié au sureffectif, où la variable de l'effectif pléthorique joue sur l'organisation spatiale de la classe, laquelle diffère sensiblement de celle propre à d'autres contextes d'enseignement en effectif réduit. Conformément aux normes institutionnelles, la classe s'étend sur une soixantaine de mètres carrés (9mx7m). Le bureau de Léa est à l'entrée et un grand tableau noir s'étend sur chacun des deux murs opposés en largeur. Des tables-bancs (grandes tables avec de longs bancs y sont fixés) des élèves sont juxtaposés, organisés en trois rangées. Par table-banc, le nombre d'élèves varie ($n \leq 6$) selon sa grandeur. Outre les deux allées entre les rangées, il n'y a pas d'espace entre les bancs pour aisément circuler et pouvoir saisir ce que font et disent les élèves lors de la résolution du problème soumis.

Le choix du corpus des données s'aligne sur la visée herméneutique de l'étude. Ainsi, nous avons réalisé l'observation d'une séance (enregistrement vidéo/ audio) portant sur la résolution d'un problème additif autour de la mesure d'aire, la visée principale étant la démarche sous-jacente. Nous visons à saisir **l'activité effective en classe, dans la phase interactive**. Nous avons utilisé de la documentation : fiche pédagogique de Léa, photos des traces écrites sur l'ardoise des élèves et au tableau noir, captures d'écran d'extraits de vidéo et notes du journal de bord. Nous avons ainsi pu capter les informations pouvant éclairer les interactions didactiques, les actions des acteurs concernés (Léa/élèves). Nous avons aussi réalisé des entretiens pré et post-séance auprès de Léa pour saisir le rationnel guidant le choix des tâches proposées aux élèves, la mise en œuvre et le bilan. Nous avons transcrit en verbatim et traité ces données. Enfin, nous avons réalisé des analyses en nous référant aux travaux largement développés dans la section II (nous y revenons plus loin), à la fois mathématiques pour mettre en exergue les contenus mathématiques en jeu ainsi que didactiques, selon les notions qui s'y appliquent. En fait, nous avons précisément circonscrit la tâche prévue dans la fiche pédagogique au travers du programme d'études en mathématique du Bénin (INFRE, 2021 ; 2002), puis des savoirs et stratégies en jeu. Nous avons réalisé des analyses de la gestion didactique, suivant les travaux déjà introduits en amont (Stein & al., 2008 ; Smith & al., 2009 et Jackson & al., 2012 & 2013) lors de la mise en œuvre de la séance grâce aux interactions entre Léa et les élèves autour de la résolution. Ce qui nous a permis d'analyser les moments d'entrée dans la tâche (dévolution), d'ajustements et d'interventions lors du processus d'enseignement (régulation) et d'institutionnalisation, grâce aux observables (actions, verbalisations, écrits). En somme, toutes les analyses ont été fondées sur les éléments retenus dans les travaux développés sur le concept de mesure dans le programme d'étude béninois (INFRE, 2021 ; 2002), les unités métriques et leurs liens avec la numération de position décimale, du point de vue des ordres de grandeurs liés à la structure hiérarchique en base dix (Koudogbo, 2021 ; Chambris, 2012), la résolution de problèmes et sa gestion (Demonty et Fagnant, 2012 ; Jackson & al., 2012 ; 2013), des notions dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Il a été possible de trianguler les données, grâce aux discours de Léa sur la séance dans les entretiens pré et post, révélant le rationnel sous-jacent aux tâches, à leur mise en œuvre et les défis posés dans le contexte de classe à sureffectif.

V. PRÉSENTATIONS DES RÉSULTATS

1. Présentation et analyse de la tâche proposée

L'énoncé du problème proposé aux élèves est le suivant : « Une concession a une surface de 9,25 dam². La maison occupe 110 m² et la cour 635m². Quelle est la surface occupée par les dépendances et le jardin ? » L'intention de Léa en proposant ce problème est l'apprentissage de la démarche de résolution de problèmes autour de la mesure d'aire, étudiée la veille. Au Bénin, une place importante est accordée à la résolution de problèmes, vue comme une des valeurs d'ordre intellectuel, dans les programmes d'études du primaire (Institut National pour la formation et la recherche en éducation - INFRE, 2021, 2002). Et pour cause, l'une des trois compétences disciplinaires porte sur la résolution de problèmes. De plus, l'enseignement de la démarche de résolution de problèmes est recommandé en début d'année pour que les élèves s'exercent à la résolution de problèmes durant l'année scolaire en mathématiques et dans les autres disciplines enseignées. En outre, au CM1, les savoirs sur lesquels les problèmes doivent porter concernent l'arithmétique, la mesure, les figures et les solides géométriques et les transformations.

Sur le plan mathématique, il est attendu que les élèves identifient les données et l'inconnue, qu'ils convertissent par exemple 9,25 dam² en m², qu'ils calculent l'aire de la surface occupée par la maison et la cour réunies et qu'ils retranchent cette aire des 925 m² pour trouver l'aire occupée par les dépendances et le jardin. De ce point de vue, la tâche que constitue le problème est une tâche complexe. Notons qu'une résolution experte de la part de certains élèves est possible. Pour cela, il y a lieu d'établir, selon nous, de manière appropriée les calculs relationnel (compréhension du sens du problème pour se le représenter) et numérique (opérations sur les données numériques). De plus, l'unité de mesure d'aire, le m², est importante pour quantifier l'aire des dépendances et du jardin et ainsi donner du sens à la réponse au problème de façon conventionnelle et contextuelle ; même si mathématiquement, on pourrait l'exprimer en dam².

Enfin, des difficultés peuvent apparaître si l'élève ne maîtrise pas la structure hiérarchique multiplicative sous-jacente au concept de mesure d'aire (multiples et sous-multiples) : 100 fois plus/100 fois moins. Cette même structure multiplicative caractérise le concept de numération de position décimale, d'où le lien intrinsèque entre ces concepts. Une maîtrise de cette structure aide à résoudre des activités de conversion. L'utilisation du tableau de conversion peut alors conduire certains élèves à organiser ce tableau en une colonne (10 fois plus/dix fois moins, une confusion avec la mesure de longueur), à confondre les multiples/sous-multiples de l'unité de mesure d'aire ou ajouter des zéros. Ils peuvent aussi appliquer des trucs mathématiques (Adihou & Marchand, 2019) en organisant ce tableau en deux colonnes (100 fois plus/100 fois moins), sans le saisir. Enfin, si les calculs relationnels ou numériques sont inadéquats, des difficultés entraveront la résolution du problème. Par exemple, une réussite dans la conversion des unités/sous-unités de mesure ne suffit pas à elle seule à solutionner le problème. Par ailleurs, en référence à la fiche pédagogique conçue par Léa et à l'entretien préséance, rien n'indique comment prendre en compte la résolution de problème dans le contexte spécifique des classes à effectifs pléthoriques. En effet, en dehors de la modalité de travail en groupe, qui pourrait être exploitée pour la gestion des classes à sureffectif, aucune autre indication pédagogique ne fait allusion à ce contexte.

2.Réalisation en classe de la tâche

Dans une séance d'une durée totale de 73 minutes, Léa a consacré 55min 50s à la réalisation de la tâche. Dans notre analyse, nous allons décrire les moyens mis en œuvre par Léa pour gérer l'entrée dans la tâche, la résolution de la tâche par les élèves et la discussion conclusive.

2.1. Entrée dans la tâche

L'entrée dans la tâche comprend la présentation de l'objectif d'apprentissage, la vérification de la compréhension du problème et sa dévolution.

D'abord, Léa a introduit le problème en annonçant aux élèves son intention liée à la démarche de résolution de problème portant sur la mesure d'aire, étudiée la veille. Elle précise ainsi l'objectif de la séance. Cela étant, elle présente le problème au tableau, mais en le cachant, grâce à du papier ciment comme illustré dans ci-dessous (Figure 1).

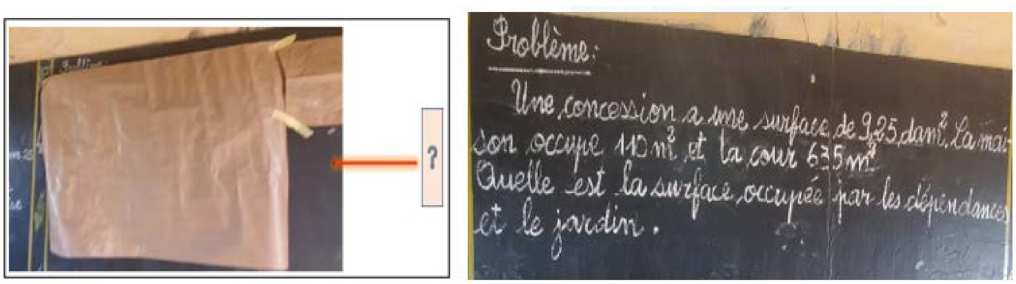


Figure 1 *– Problème caché, puis dévoilé au tableau noir*

Puis elle interagit avec trois élèves e1, e2 et e3.

Léa (lire E) : Aujourd'hui, **nous allons apprendre à résoudre un problème** [...] qui porte sur les mesures de surface. Qui va me dire ce qu'il veut apprendre.

e1 : Aujourd'hui, je veux apprendre les mesures de la surface.

E : Et qu'est-ce qu'on veut apprendre concrètement sur les mesures de surface.

e2 : On va résoudre des problèmes.

E : Un problème sur les mesures de surface.... Qui va me dire ce qu'on fait quand on veut résoudre un problème ? ... Comment on peut résoudre un problème ?

e1 : En réfléchissant.

E : Avant de réfléchir qu'est-ce que tu dois d'abord faire? Il faut d'abord chercher à connaître quoi ?

e2 : La surface

E : Attention je n'ai pas encore parlé de surface. J'ai posé une question.

e3 : Les nombres.

E : Quels nombres ?

e3 : Les données.

E : Les données, d'accord, nous allons voir ça tout à l'heure.

Après avoir dévoilé au tableau noir l'énoncé du problème, en enlevant le papier ciment (voir Figure 1), Léa s'est intéressée pendant 21min 16s à **la compréhension de l'énoncé** par les élèves, en leur faisant lire silencieusement puis à haute voix le problème et en leur demandant de relever les données et l'inconnue du problème. Nous rapportons certaines interactions autour des composantes contextuelles et numériques du problème à résoudre.

Léa (E) : Lisez maintenant en silence ; chacun lit ... On nous parle de quoi ... dans le problème?

e1: On nous parle d'une maison.

e4 : On parle de la surface.

E : On parle de la surface de quoi ?

e5 : On parle du jardin.

E : Écoutez la lecture du texte. Vous me suivez attentivement. Tout le monde suit au tableau, attention derrière (Elle lit la consigne). Qui va lire exactement comme moi ? (Elle fait lire la consigne par trois élèves successivement, les amenant à bien prononcer certains mots.)

E : Maintenant on me suit correctement. Quelle est la surface de la concession ?

e1: 9,25 dam²

E: La maison occupe quelle surface ?

e2: la maison occupe 110 dam²

E: Maintenant la cour occupe quoi ?

e3: La cour occupe 635 m².

E: La cour occupe 635 m²; et on nous demande quoi ?

e2: quelle est la surface occupée par les dépendances et le jardin?

En somme, si Léa s'est donnée pour rôle de vérifier la compréhension du problème par les élèves, contrairement à sa prévision (lisible dans sa fiche pédagogique et en entretien pré), elle n'a pas cherché à clarifier les mots difficiles (i.e., concession, dépendances...) pour leur permettre d'entrer dans la tâche avant de la résoudre, d'autant plus que le français n'est pas la langue maternelle des élèves. Enfin, cette dernière a commencé par un rappel de la démarche de résolution de problème, qui a duré 6 min 23s. Léa a amené les élèves à réaliser sur leur ardoise un tableau de trois colonnes (Solution-Résultats-Opérations) qui sert de cadre pour résoudre le problème. Elle leur précise alors : « Maintenant tu as lu le problème, je t'ai posé des questions, tu m'as donné des réponses. Tu es maintenant prêt pour résoudre le problème ».

2.2. Résolution de la tâche et discussion conclusive

D'abord, durant la phase de résolution, les élèves ont travaillé individuellement pendant 6min 23s pour amorcer la résolution du problème, en écrivant sur leur ardoise les données numériques, contextuelles ou relationnelles (voir Figure 2).

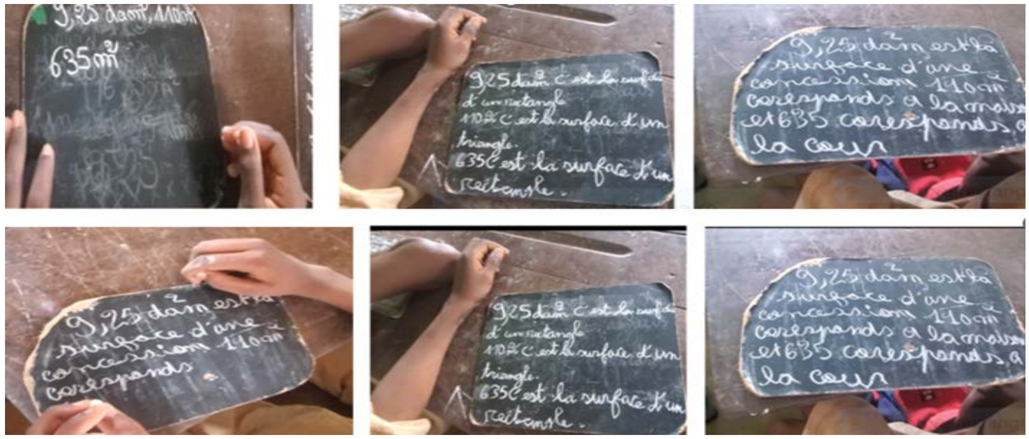


Figure 2 *– Traces écrites sur l'ardoise d'élèves lors de l'entrée dans la tâche*

C'est un moment où les élèves sont restés concentrés sur le travail. Léa a circulé dans les allées au début pour vérifier si les élèves font ce qui leur est demandé et pour relancer ceux d'entre eux qui trainent les pas. Cependant, elle a du mal à accéder aisément aux traces écrites de plusieurs élèves, car la configuration spatiale de la salle semble restreindre sa mobilité. Cela pourrait être lié au contexte de classes en sureffectif déjà décrit et qui semble jouer sur les interactions, les relances de Léa et sur l'activité des élèves en difficulté. Le propos de Léa lors de l'entretien post-séance est très édifiant :

> Ah, il y a aussi la difficulté liée à l'espace. Il manque d'espace dans la classe et on ne parvient pas à aider un élève ; tu es obligé de rester au loin et de lui dire, fais ceci, fais-cela... Ce sont des difficultés que nous rencontrons, surtout en mathématiques tu as besoin d'approcher l'enfant, de voir ses difficultés et de l'aider.

Au cours de la correction collective, correspondant à la discussion conclusive, Léa se sert du tableau noir pour enseigner la démarche de résolution, en alternant le travail individuel et celui collectif (21 min 42s). Ainsi, elle aide une élève à construire les éléments constitutifs de la démarche au tableau noir, comme illustré par les interactions suivantes.

Léa (E) : Qu'est-ce que je vais écrire au tableau pour commencer le travail ? Qu'est-ce que je dois écrire pour trouver la solution ? Et on passe à l'opération, on écrit l'équation...

é1: Solution, j'écris solution, résultat, réponse.

E: Un autre pour reprendre ça de façon plus claire au tableau ? (Elle invite é2 au tableau).

é2: J'écris solution, résultat, opérations au tableau. (Il construit 3 colonnes et y inscrit chaque mot).

E: [...] donc nous avons déjà Solution, Résultat, Opérations; et nous allons commencer. (Elle demande aux élèves d'effacer les données écrites sur leur ardoise.) Tu trouves maintenant la solution et l'opération qui doit suivre. C'est ce que nous devons faire pour calculer, fais, en même temps !

En gros, la démarche de résolution est organisée en trois colonnes nommées : « Solution-Résultats-Opérations ». Nous l'illustrons, ci-dessous, dans la Figure 3.

Figure 3 *– Construction de la démarche de résolution au tableau*

La colonne « Solution » sert à l'écriture des données numériques et contextuelles ; la colonne « Résultat », à inscrire la réponse ou la solution au problème et « Opérations », à poser et effectuer les opérations (calculs ou algorithmes).

Si la durée du travail individuel n'a pas permis à bon nombre d'élèves d'achever leur résolution, il nous semble cependant opportun d'y revenir sur ce que les élèves ont fait, à partir des traces écrites sur leur ardoise et leurs explications orales. Pour résoudre la tâche, ils ont utilisé trois stratégies : « Conversion-Somme-Soustraction (CSS) », « Conversion somme ou produit (CSP) » et « Somme ou produit (SP) ». Ainsi, la CSS consiste à convertir 9,25 dam² en m², à calculer la somme des aires de la maison et de la cour, puis à soustraire cette somme de l'aire convertie de la concession. C'est la résolution experte observée lors du temps de travail collectif. La CSP consiste à convertir 9,25 dam² en m² et à utiliser le résultat trouvé pour faire la somme ou le produit d'au moins deux des données numériques du problème. Quant à la SP, elle consiste à effectuer la somme ou le produit de deux au moins des trois données numériques.

En outre nous avons observé que l'ardoise posait différents problèmes. Son usage semble peu propice à la résolution de tâches complexes, car sa surface est trop petite pour contenir la quantité d'écrits que cela impose. De plus, certains élèves effacent ce qu'ils ont écrit sur leur ardoise et y recopient ce qu'ont écrit leur camarade. Ce comportement pourrait être expliqué par la proximité des élèves et le recours à l'ardoise, mais également par la gêne liée au statut de l'erreur. En effet, dans la classe, les élèves montrent leur ardoise, à Léa, lorsqu'elle veut voir leur production écrite et ceux et celles qui ne trouvent pas la réponse attendue doivent l'effacer, y inscrire celle écrite au tableau, puis se mettre debout à leur place et remontrer leur ardoise. Par ailleurs, le travail individuel est consacré à la résolution individuelle, sur l'ardoise des élèves. Contrairement à sa prévision (fiche et entretien pré), Léa n'a pas pu faire travailler les élèves en petits groupes. Quant au travail collectif, il a permis à Léa d'aider les élèves à construire la démarche au tableau pour enfin résoudre le problème selon les étapes attendues, à l'aide de questionnements. La phase conclusive s'est achevée par le point des tâches exécutées :

Léa : Qui va nous dire comment nous avons fait pour résoudre le problème.

e2 : En lisant la question.

Léa: En lisant la question, oui qui d'autre ?

e15 : En lisant la solution.

Léa: En lisant la solution ? Toi, puisque tu as dit non.

e2 : On a converti 9,25 dam² en m² et on a calculé la surface de la maison et la cour. Et on a encore calculé la surface occupée par les dépendances et le jardin pour trouver la réponse.

Léa: Très bien. Deux bancs pour lui (les élèves ont acclamé deux fois). Il nous a retracé comme ça comment nous avons résolu ce problème-là. C'est compris ? (Tous lui répondent, ‘’oui, maîtresse’’.)

VI. DISCUSSION DES RÉSULTATS ET CONCLUSION

À la lumière de ce qui précède, en vue de saisir la gestion didactique d'une séance de résolution de problème mathématique dans une classe de CM1 en sureffectif, nous avons présenté et analysé la tâche soumise aux élèves pour ensuite analyser la gestion didactique de l'enseignante lors des différents moments de sa résolution. Concernant la tâche soumise aux élèves, il s'agit bien d'une tâche dite complexe (Jackson & al., 2013 ; Stein & al. 2008) qui diffère des tâches de type calculatoire ou exercice papier-crayon. La tâche concerne la résolution de problème sur la mesure d'aire, un concept étudié dans le programme béninois. Ce choix relève des contraintes institutionnelles (INFRE, 2021). Cependant, en optant pour la résolution de problème, un objet d'apprentissage, à partir d'une tâche complexe, et en mettant uniquement l'accent sur une démarche, il semble que cela a pu influer sur le degré d'accessibilité au savoir en jeu, voire une conceptualisation robuste. Il n'a pas été possible d'atteindre la double finalité de la résolution de problème (Demonty & Fagnant, 2012).

Les analyses réalisées à partir des interactions entre Léa et ses élèves pour caractériser la gestion didactique du point de vue de l'entrée dans la tâche, de sa résolution par les élèves et de la discussion conclusive (Stein & al., 2008 ; Jackson & al., 2012) révèlent plusieurs constats qui méritent d'être discutés. D'abord, si l'enseignement de la démarche de résolution est l'objectif visé, il n'en demeure pas moins que la gestion didactique de Léa tout le long de la séance ne favorise pas toujours l'activité mathématique des élèves. Le potentiel de la tâche complexe n'est pas exploité suffisamment. Léa avait de la difficulté à arrimer la démarche de résolution visée à l'enjeu mathématique de la mesure d'aire. Le processus de dévolution (Brousseau, 1998) en est affecté, conséquemment, d'autant plus que la gestion didactique des différentes phases est réalisée par un guidage de Léa des actions à faire par les élèves. Ce faisant, les élèves ont été privés de l'opportunité de prendre en charge le problème et de le résoudre, sans les interventions de l'enseignante. Par ailleurs, l'institutionnalisation (Brousseau, 1998) semble porter sur la démarche de résolution de problème, avec de micro-institutionnalisations sur des procédures exposées au tableau noir. Certains moments d'institutionnalisation se sont transformés également en une synthèse de tâches intermédiaires accomplies pour résoudre le problème. En effet, c'est par le point des tâches simples accomplies pour résoudre le problème que s'est achevée la discussion conclusive.

Des deux fonctions de la résolution de problèmes (Chanudet, 2019 ; Demonty & Fagnant, 2012), seule celle lui conférant un caractère d'objet est perçue explicitement dans la séance. De plus, le statut de l'erreur sur l'ardoise pose un problème qui peut jouer sur l'engagement de l'élève dans la tâche. Il y a, sans contredit, une certaine tension entre une logique de la bonne réponse et celle des apprentissages conceptuellement robustes ; cette logique ne rime pas avec la réussite en mathématiques. Il serait possible de recourir à une gestion didactique aidant à orchestrer des phases interactives promouvant un statut positif de l'erreur, l'engagement et l'activité mathématique des élèves, ainsi que le débat. Ainsi, il aurait été possible de partir de ce que font les élèves, lors de la conversion des unités de mesure, par exemple, pour expliquer et statuer sur les savoirs en jeu liés à la structure hiérarchique multiplicative numération de position décimale (Koudogbo, 2021, 2013) et aux unités de mesure.

Les résultats nous renseignent sur les possibles incidences d'une classe en sureffectif dans la gestion de la résolution des tâches lors des interactions en classe. En ce sens, nonobstant que Léa avait prévu un travail en groupe, plusieurs adaptations et modifications ont été apportées in situ (comme l'absence de travail en groupe), ce qui témoigne de certaines marges de manœuvres de l'enseignant.e. Il est aussi possible d'envisager que ce contexte semble jouer sur la gestion didactique en matière d'aides à apporter aux élèves ayant des besoins spécifiques ou ceux en difficulté pour plusieurs raisons. D'abord, la configuration spatiale de la salle de classe (nombreux bancs/tables des élèves) n'aide pas l'enseignante à mieux circuler dans la salle et à avoir accès à l'activité mathématique de l'élève pour mieux intervenir. À cela s'ajoute, l'ardoise - la petite ardoise - à cause de sa grandeur inadaptée aux tâches complexes : l'enseignante ne peut accéder aisément à la pensée mathématique de l'élève sur l'ardoise. Pour conclure, à l'évidence, beaucoup reste à faire dans les recherches dans le contexte d'enseignement en classe en sureffectif. La présente étude donne de nouvelles pistes de recherche pour étudier par exemple les adaptations réalisées par d'autres enseignant.e.s pour relever les défis qui se posent et mieux aider les élèves dans leurs apprentissages et pour la réussite en mathématiques. En matière de perspectives, nous envisageons poursuivre l'analyse de plusieurs autres données collectées dans le cadre de la recherche plus large, pour documenter d'autres objets, comme les dispositifs d'aide novateurs auprès d'élèves à besoins particuliers des écoles primaire et secondaire au Bénin, mais aussi les pratiques enseignantes. Les résultats permettront de mieux comprendre les conditions favorables à l'accès aux mathématiques des élèves à besoins particuliers et de renouveler la formation initiale et continue des enseignant.e.s.

REFERENCES

ADIHOU, A. et MARCHAND, P. (2019). Les trucs mathématiques au primaire : Et si on leur donnait du sens ! Montréal: Les Éditions JFD.

BARWELL, R. (2003). Patterns of attention in the interaction of a primary school mathematics student with English as an additional language. Educational Studies in Mathematics, 53, 35–59.

BROUSSEAU, G. (1998). La théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.

CHAMBRIS, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? Petit x 89, 5-3.

CHANUDET M. (2019). Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques. Thèse de doctorat, Université de Genève, 489 pages.

CHAUDET, V. et GALASSO-CHAUDET, N. (2015). L'inclusion scolaire en question(s). Impacts sur les pratiques enseignantes. Vie sociale, 3(11), 127-145.

CONOMBO E.T., OUATTARA, S., TAPSOBA, K. et POTTIEZ, L (1996). La pédagogie des grands groupes au Burkina Faso. Fichier pratique. Ouagadougou, Burkina Faso.

DEMONTY I., FAGNANT, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, SPE3 (p. 1752–1760). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

INFRE (2002). Programme d'études, Enseignement primaire, Champ de formation Mathématique, Cours moyen première année (CM1), Porto-Novo : Institut National pour la Formation et la Recherche en Education, Direction de l'enseignement primaire.

INFRE (2021). Guide de l'enseignant, Cours d'initiation (CI). Institut National pour la Formation et la Recherche en Education, Direction de l'enseignement primaire. Porto-Novo: Les Editions TUNDE.

JACKSON, K., GARRISON, A., WILSON, J., GIBBONS, L. & SHAHAN, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle grades mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 44(4), 646-682.

JACKSON, K. J., SHAHAN, E. C., GIBBONS, L. K. et COBB, P. A. (2012). Launching complex tasks. Consider four important elements of setting up challenging mathematics problems to support all students' learning. Mathematics Teaching in the Middle School, 18(1), 24-29.

KOFFI, K. I., GOLLY, K. L., Aby, M'B. P., Yao, K. E., Aya, A. (2021). Analyse des pratiques enseignantes en sciences et en mathématiques dans les collèges publics et privés de Côte d'Ivoire. Documenter et éclairer les politiques éducatives en Afrique francophone. Enseignement des sciences et des mathématiques. Programme APPRENDRE, AUF, AFD, 1-237. Abidjan : École normale supérieure.

KOUDOGBO, J. (2021). La recherche en didactique des mathématiques : un levier pour l'enseignement ? Vers une approche systémique pour développer le potentiel mathématique des élèves en difficulté. In P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, J. Gauthier, J., & C. Bisson (éd.), La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ? (p. 53-80). Montréal : Éditions JFD.

KOUDOGBO, J. (2013). Portrait actuel des connaissances d'élèves de troisième année de l'ordre primaire et de situations d'enseignement sur la numération de position décimale. Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal.

KOUDOGBO, J., THEIS, L., MORIN, M.-P. (2016). Quelle gestion didactique de la résolution de tâches mathématiques en classe d'accueil ? Revue internationale de communication et socialisation, 3(2), 215-238.

LEMOYNE, G., & GERVAIS, F. (2014). Les difficultés d'enseignement/apprentissage des mathématiques en classes d'accueil. In C. Mary, Squalli, H., Theis, L., & L. Deblois (éd.), Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Regard didactique (p. 133-162). Québec : Presses de l'université du Québec.

MILLON-FAURE, K. (2011). Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants. Marseille : Université d'Aix-Marseille 1.

PAILLÉ, P., MUCCHIELLI, A. (2021). L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales (5e édition). Paris: Armand Colin.

POLYA, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. With a foreword by John H. Conway. (reissued in 2014). New Jersey: Princeton Science Library.

ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In F. Vandebrouck (éd.), La classe de mathématiques : des activités des élèves et pratiques des enseignants (23-30). Toulouse: Octarès.

SMITH, M.S., HUGHES, R.A., EAGLE, R. A., & STEIN, M.K. (2009). ''Orchestrating Discussions.'' Mathematic Teaching in the Middle School, 14(May), 548-556.

STEIN, M.K., EAGLE, R.A., SMITH, M. S. & HUGUES, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematic discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical thinking and learning, 10(4), p. 313-340.

UNESCO (2017). Des maths pour agir. Accompagner la prise de décision par la science. Paris: UNESCO.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

Evaluation des acquis en mathématiques des étudiants de la première année de la licence en éducation option enseignement primaire

Khaoula Mortaqi [31]et Mustapha Ourahay

École Normale supérieure de Marrakech, Maroc

Résumé - Cette étude analyse les erreurs en mathématiques des étudiants en première année de licence en éducation, option enseignement primaire, dans le cadre d'une évaluation sommative. Elle vise à établir une typologie des erreurs et à comprendre leurs causes en lien avec le profil des étudiants. La méthodologie repose sur l'analyse des copies d'examen. Les premiers résultats montrent une prédominance des erreurs liées au traitement des énoncés des problèmes mathématiques, ainsi que des difficultés en algèbre et en arithmétique selon la formation antérieure des étudiants. Cette étude permet d'identifier les acquis et les lacunes en mathématiques des étudiants et apporte des recommandations pour améliorer la formation des futurs enseignants du primaire et renforcer la qualité de l'enseignement des mathématiques.

I. INTRODUCTION :

L'évaluation des apprentissages constitue un élément central du système éducatif, jouant un rôle déterminant dans l'appréciation du niveau des élèves et l'orientation des politiques éducatives (Ourahay, 2021). Dans le contexte marocain, elle revêt une importance particulière en raison de son intégration dans une politique éducative axée sur les résultats, visant à améliorer la qualité de l'enseignement et à optimiser la gestion du système éducatif (Centre National d'Évaluation et d'Examen [CNEE], 2019). À travers l'évaluation, il s'agit non seulement à apprécier la réussite scolaire des apprenants, mais également de fournir des indicateurs pour l'élaboration et l'ajustement des réformes éducatives.

Cette étude examine le rôle de l'évaluation dans le système de formation des enseignants au Maroc et son efficacité à refléter avec précision le niveau réel des futurs enseignants du primaire en math, tout en prenant en compte l'importance de leurs erreurs en tant qu'indicateurs des lacunes existantes.

II. PROBLÉMATIQUE :

La filière de licence en éducation option enseignement primaire est ouverte à tous les types de baccalauréat, aux étudiants ayant obtenu un baccalauréat dans l'une des filières existantes du cycle secondaire qualifiant. La formation mathématique acquise de ces étudiants est hétérogène et c'est

---

[31] Mortaqi, K. et Ourahay, M. (2024). Evaluation des acquis en mathématiques des étudiants de la première année de la licence en éducation option enseignement primaire. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités – Actes colloque ADIMA 2024 – Affiche, pp. 174-184.

l’une des spécificités de cette filière. Selon les résultats des étudiants inscrits dans cette filière les années précédentes, les deux modules de mathématiques du programme de formation sont ceux qui posent des difficultés aux étudiants issus des filières à tendance littéraire ; ces étudiants présentent un taux d’échec élevé comparativement aux autres modules du même programme.

Les modules de mathématiques du programme de cette licence en éducation renvoient à des notions mathématiques qui sont déjà enseignées au cycles secondaire et primaire. Les activités d’enseignement sont organisées sous forme d’activités de révision et de rappels et elles sont conçues autour de la compréhension des notions mathématiques fondamentales du programme de mathématiques des cycles primaire et secondaire collégial et sur la résolution de problèmes.

Les spécificités des étudiants de cette filière de licence ainsi que celles des modules de mathématiques de son programme de formation nous ont conduit à mener une étude des acquis d’apprentissage des étudiants pour identifier les difficultés qu’ils ont en mathématiques et d’identifier leurs lacunes pour pouvoir apporter du soutien et ’améliorer la performance des étudiants à faible rendement. Nous voulons surtout identifier les facteurs explicatifs de la faible performance des étudiants en mathématiques en lien avec des notions mathématiques enseignées dans les cycles secondaire et primaire.

Ainsi, notre étude consiste à analyser les prérequis des candidats retenus pour poursuivre leur formation en licence en éducation option enseignement primaire à travers leurs résultats au premier contrôle de connaissances dans le cadre du module intitulé « mathématiques 1 ». Nous partons de l’idée que ces étudiants suivent leur formation en mathématique avec ce qu’ils ont développé comme acquis d’apprentissage dans leurs études au cycles primaire et secondaire. Il s’agit d’évaluer une forme de connaissance mathématique qu’ils ont développée durant leurs études antérieures ; ce qu’ils ont pu retenir de ce qu’ils ont déjà étudié. Nous comptons nous baser dans cette étude sur des tests de contrôle de connaissances au sein du module de mathématique1 dispensé au premier semestre de leur cursus universitaire.

III. CADRE THÉORIQUE :

1.Le statut de l’erreur dans les courants didactiques

Le statut de l’erreur en didactique a évolué selon trois modèles principaux. Le modèle transmissif considère l’erreur comme un échec résultant d’un manque de motivation ou d’intelligence (Deval Karine, 2000). Le modèle béhavioriste, inspiré par Skinner, vise à éviter l’erreur pour optimiser l’apprentissage. Dans ces deux approches, l’erreur est perçue négativement. En revanche, le modèle constructiviste, défendu par Brousseau (1983) et Meirieu (1994), valorise l’erreur comme un indicateur des processus cognitifs et un levier pour l’apprentissage. Différentes définitions (Reuter, 2009 ; Astolfi et al., 1997 ; Leplat, 2011) soulignent son rôle didactique, la décrivant comme une rupture ou une contradiction révélatrice de difficultés. Notre recherche adopte cette vision, considérant l’erreur non seulement comme un écart par rapport aux attentes disciplinaires, mais aussi comme une opportunité d’apprentissage.

2.Typologie des erreurs

L’analyse des erreurs en didactique des mathématiques permet de mieux cerner leur origine et leur nature afin d’améliorer l’apprentissage. Différentes classifications ont été proposées par les chercheurs. Movshovitz-Hadar, Zaslavsky et Inbar (1987) identifient des erreurs liées à une mauvaise interprétation, des inférences erronées, des lapsus ou l’application de règles inappropriées. Astolfi (1997) met en évidence des erreurs liées aux consignes, aux conceptions alternatives et à la surcharge cognitive. L’étude du test PISA (Wijaya et al., 2014) distingue quatre grandes catégories d’erreurs : l’incompréhension des consignes, la transformation incorrecte d’un problème contextualisé, les erreurs de traitement mathématique et les erreurs de codage. Radatz (1980) différencie quant à lui l’incompréhension, l’application incorrecte de principes et les erreurs de calcul. Ces typologies constituent des cadres de référence principaux, chacun englobant plusieurs sous-types d’erreurs.

3.Paramètres de complexité d’un item

La revue de littérature sur la complexité des items d’évaluation met en évidence plusieurs paramètres clés influençant leur difficulté (Robert & Rogalski, 2002 ; Bodin, 2009, 2016 ; Fadiasakr, 2009 ; Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Parmi ces paramètres, la taxonomie de Régis Gras et Bodin (2002) permet de classifier les niveaux cognitifs et les tâches associées selon une hiérarchie allant de la reconnaissance des faits à la créativité et au jugement. Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (Roditti & Salles, 2015 ; Bodin, 2016) distinguent les tâches conceptuelles, directes, adaptatives et intermédiaires. Les compétences, quant à elles, évoluent selon un continuum allant des procédures élémentaires aux compétences complexes (Rey et al., 2003 ; Jonnaert, 2002 ; Perrenoud, 1997). La complexité d’un item dépend aussi des habiletés cognitives mobilisées (Schulz, Lee & Mullen, 2005), du contexte et de la structure de l’énoncé (Cummins et al., 1988 ; Houdement, 2003), ainsi que de la nature des nombres et des registres de représentation utilisés (Vergnaud et al., 1988 ; Rojano, 2002). Enfin, les tests internationaux comme PISA et TIMSS s’appuient sur ces paramètres pour analyser la difficulté des items et l’évolution des compétences des élèves à travers différentes situations et contextes mathématiques.

III. MÉTHODOLOGIE :

Généralement, l'évaluation des étudiants repose sur deux principaux facteurs : leurs acquis d’apprentissage et la nature des items posées dans l’évaluation (Pelaccia,2021). Cependant, il est essentiel de prendre en compte les profils des étudiants en tant que facteur influençant leurs acquisitions et leur manière de répondre lors de l'examen, étant donné que leur formation mathématique durant les années du cycle secondaire qualifiant est hétérogène. Notons que ces étudiants ont tous suivis une même formation durant l’enseignement fondamental composé des deux cycles primaire et secondaire collégial

Pour développer notre contenu d'enseignement et d'évaluation en fonction des acquis d'apprentissage, nous nous sommes inspirés du modèle de catégories d'acquis d'apprentissage et des compétences associées de TIMSS.

Nous avons déterminé les acquis d’apprentissage visé par le module de mathématiques1 et dresser une table de spécification des acquis d’apprentissage.

Nous avons développé un test d'évaluation sommative en prenant en compte le poids de chaque catégorie d'apprentissage dans cette table, qu'il s'agisse de "connaître", "appliquer" et raisonner"

Cette approche nous a permis de mesurer de manière équilibrée les différentes dimensions d'apprentissage et d'obtenir une évaluation globale des acquis des apprenants.

Pour mesurer l'influence des items (exercices) de l'épreuve d'évaluation sur la performance des élèves lors du contrôle, nous avons identifié 13 paramètres de complexité répartis en fonction de 3 niveaux de difficulté (facile, moyen, difficile).

Pour évaluer la complexité d'un item(exercice), nous avons utilisé la méthode suivante : si l'exercice ou l'item satisfaisait les critères des paramètres du tableau en fonction des niveaux de difficulté, nous avons attribué la valeur 1 aux paramètres correspondants ; sinon, la case est restée vide.

La collecte et l'analyse des données se sont déroulées en plusieurs étapes. Le test d'évaluation, d'une durée de 1h30, comprenait quatre exercices : deux portant sur la maîtrise des techniques de calcul et deux sur la résolution de problèmes. Pour minimiser les risques de tricherie et garantir l'équité, deux versions équivalentes de l'épreuve ont été conçues et administrées alternativement aux 433 étudiants présents. Si les exercices de calcul étaient identiques dans les deux versions à l'exception de variations numériques, les exercices de résolution différaient par les contextes et les valeurs utilisées, tout en sollicitant des compétences similaires.

Les réponses brutes des étudiants ont été collectées et enregistrées, puis traitées à l'aide d'un tableur, utilisé pour l'analyse statistique et non pour la collecte. Le tableau de traitement comprenait les données d'identification des étudiants et les réponses aux exercices. L'analyse des erreurs s'est appuyée sur un cadre théorique issu d'une revue approfondie de la littérature sur les erreurs en contexte éducatif. Une typologie des erreurs a été adoptée pour regrouper celles-ci selon leur nature (conceptuelles, procédurales, de calcul, etc.), offrant ainsi une meilleure compréhension des difficultés rencontrées par les étudiants.

IV. RÉSULTATS :

1.Résultats liés aux niveaux de difficulté l'épreuve d'évaluation selon les paramètres de complexité déterminés d'après la revue de littérature :

Nous utilisons l'outil développé à partir des paramètres de complexité identifiés dans la revue de littérature afin d'évaluer la difficulté des items de l'examen. Les résultats obtenus sont les suivants :

-Pour le premier exercice c'est le plus facile avec un pourcentage de réussite de 77%

-Pour le deuxième exercice c'est moins facile avec un pourcentage de 42%

-Pour le troisième exercice c'est plus difficile avec un pourcentage de 14%

-Pour le quatrième exercice c'est le plus difficile avec un pourcentage de 21%

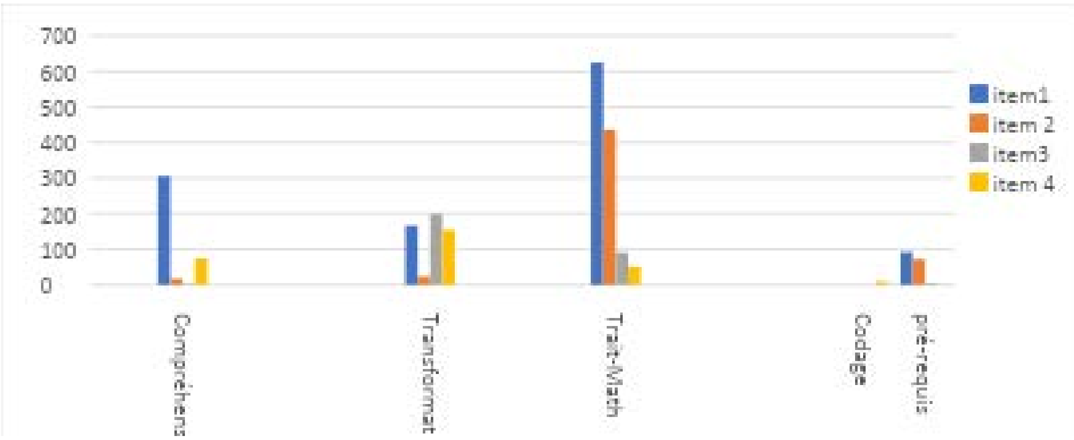
2.La typologie des erreurs approuvée d'après la revue de littérature et l'analyse les copies des étudiants :

Types des erreurs	Sous types	Explication
Compréhension	Incompréhension de la consigne	L'étudiant a mal interprété ce qu'on lui a demandé de faire.

	Mal comprendre un mot-clé	L'étudiant a mal compris un mot-clé, qui était généralement un terme mathématique.
	Erreur dans la sélection des informations	L'étudiant était incapable de faire la distinction entre les informations pertinentes et non pertinentes
Transformation : Erreur lors de la transformation d'un problème écrit contextualisé en un problème mathématique approprié	Tendance procédurale	L'étudiant avait tendance à utiliser directement une procédure mathématique (telle qu'une formule, un algorithme) sans analyser si c'était nécessaire ou non.
	Tenir excessivement compte du contexte	La réponse de l'étudiant ne faisait référence qu'au contexte / à la situation réelle sans prendre la perspective des mathématiques.
	Opération/concep t mathématique inapproprié	L'étudiant a utilisé des procédures/concepts mathématiques qui ne sont pas pertinents pour les tâches
Traitement Mathématique Erreur dans l'exécution de procédures mathématiques (Niveau technique)	Erreur algébrique	Erreur dans la résolution d'expression ou de fonction algébrique.
	Savoir-faire méthodique	Erreur au niveau des méthodes permettant la résolution de problèmes
	Réponse inachevée	L'étudiant a utilisé une formule ou une procédure correcte, mais il ne l'a pas terminée
	Erreur d'arithmétique élémentaire	Erreur de calcul.
	Symbolisme	Les symboles non pas de sens claire pour l'étudiant
Codage : Erreur au niveau D'interprétation du résultat mathématique		L'étudiant était incapable d'interpréter et de valider correctement la solution mathématique dans termes du problème du monde réel. Cette

		erreur s'est traduite par un impossible ou non réponse réaliste.
Prérequis Fondamentaux		Erreurs liées aux formules ou aux notions de cours déjà acquises au collège (ou aux cycles d'enseignement précédents en général).

3.Résultats liés aux types d'erreurs dans chaque exercice de l'épreuve d'évaluation (le terme item dans ce contexte indique exercice) :

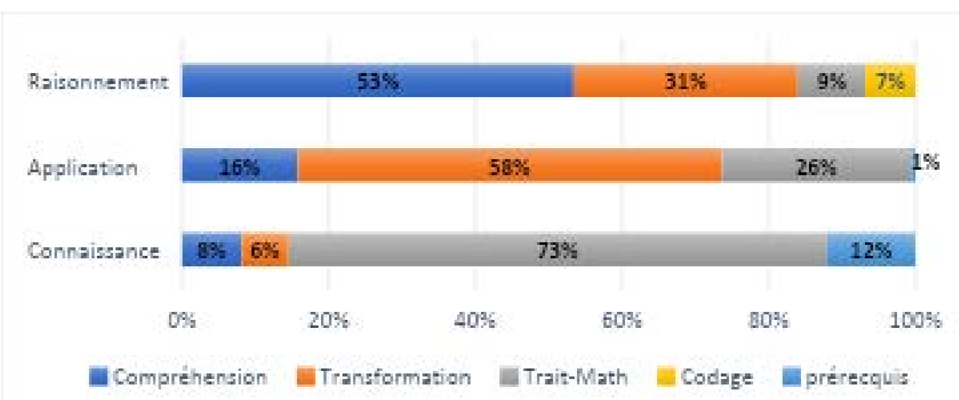


Graphique 1:Types d'erreurs dans les items

L'exercice 1(item1), considéré comme le plus facile, a suscité un grand nombre de réponses incorrectes, principalement en raison d'erreurs liées aux différents types d'erreurs mentionnés précédemment. Cela suggère que de nombreux étudiants ont des lacunes dans les concepts ou les connaissances préalables nécessaires pour répondre correctement à cet exercice.

4.Résultats liés aux types d'erreurs chez les étudiants et leurs performances cognitives :

Ce graphe résulte d'un tableau croisé associant les niveaux de performance cognitive aux types d'erreurs observées à chaque niveau.



Graphique 2: Niveaux de performances et types d'erreurs

Nous observons des erreurs de type traitement mathématique, ce qui suggère des lacunes au niveau des connaissances et des calculs de base.

Nous constatons également des erreurs de type transformation dans l'application, ce qui suggère que les étudiants ont peut-être tendance à utiliser directement les procédures mathématiques et commettent des erreurs au cours de ce processus.

Nous observons une augmentation notable des erreurs de compréhension chez les étudiants à mesure que l'on passe d'un niveau de performance lié aux connaissances vers un niveau de raisonnement en mathématiques. En revanche, une tendance à la diminution des erreurs de traitement mathématique a été remarquée à mesure que l'on s'approche du raisonnement.

5.Relation entre niveaux cognitif, complexité des items et erreurs :

Le tableau ci-dessous vise à synthétiser les résultats précédents concernant les erreurs, la complexité des items et les niveaux de performances cognitives. Il classe les items en fonction de leur niveau de complexité tout en présentant les erreurs associées à chaque item, et les croiser avec celles qui sont courantes dans les niveaux de performances cognitives.

Items selon la complexité Niveaux cognitifs	Exercic e1	Exercic e 2	Exercice 3	Exercice 4
Connaitre		Erreur de prérequis	Erreur de transformation	
Appliquer	Erreur de **traitement**	Erreur de **traitement**	Erreur de **traitement**+ transformation	Erreur de transformation
Raisonner			Erreur de transformation	Erreur de transformation + compréhension

Tableau 1: Tableau synthétique

Le troisième exercice présente un niveau de difficulté plus élevé, nécessitant un effort supplémentaire et une réflexion approfondie pour être résolu. Il implique les trois niveaux cognitifs de connaissance, d'application et de raisonnement, et les erreurs fréquentes sont liées au traitement mathématique et à la transformation.

Le quatrième exercice est considéré comme ayant le niveau de difficulté le plus élevé. Il combine les niveaux cognitifs d'application et de raisonnement, et les erreurs fréquentes sont associées à la transformation et à la compréhension.

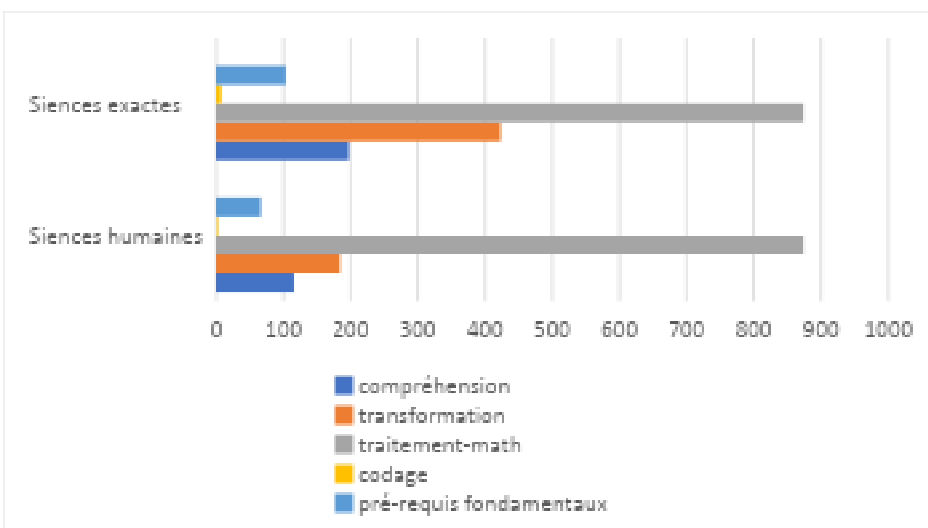
Il est important de noter que les erreurs de transformation ne sont pas spécifiques à un niveau cognitif particulier, elles sont présentes dans les différents niveaux et par suite elles ne permettent pas de déterminer le niveau de performance des étudiants en termes des habiletés cognitives. En effet, n'importe quel étudiant, quelle que soit sa performance, peut commettre ce type d'erreur.

Selon les résultats présentés, nous pouvons aussi déduire que pour faciliter un exercice, il est préférable de se concentrer sur un seul niveau cognitif plutôt que d'inclure plusieurs niveaux. Lorsqu'il y a la présence de trois niveaux cognitifs, cela complexifie l'activité mathématique pour l'étudiant, car il devient nécessaire d'utiliser les compétences associées à ces trois niveaux. De plus, la complexité peut également augmenter si l'accent est mis sur les deux derniers niveaux tout en augmentant la part du raisonnement.

6.Corrélation entre les erreurs et les profils des étudiants :

Dans le but de déterminer le type d'erreurs associé aux étudiants en fonction de leur profil de baccalauréat et afin d'améliorer la visualisation des résultats et d'affiner l'analyse, nous avons regroupé les séries de baccalauréat en deux catégories : les baccalauréats de type scientifique, sous le nom de "sciences exactes", et les baccalauréats de type sciences humaines et sociales sous le nom de "sciences humains".

- Les séries du baccalauréat de type sciences humaines et sociales sont : Lettres, Lettres option français, Sciences humaines, sciences humaines option français et sciences économiques et autres composée des baccalauréats obtenus des lycées de mission étrangère, baccalauréat inconnu.
- Les séries du baccalauréat de type scientifique sont : Sciences physiques et chimie - option arabe, Sciences physiques et chimie option français, Sciences mathématiques B option français, Sciences mathématiques A option arabe, Sciences mathématiques A option français, Sciences de la vie et de la terre option arabe, Sciences de la vie et de la terre option français, sciences agricoles.



Graphique 3 : liaison entre erreurs et profil des étudiants

Le graphique indique que les erreurs de traitement mathématique sont les plus fréquentes, tant pour les étudiants en sciences humaines que pour ceux en sciences exactes. Néanmoins, les étudiants en sciences exactes commettent davantage d'erreurs de transformation que ceux en sciences humaines. De même, on constate que les erreurs liées à la compréhension et aux prérequis fondamentaux sont plus élevées chez eux. Enfin, les erreurs de codage n'apparaissent que chez les étudiants en sciences exactes.

V. DISCUSSION :

Les résultats obtenus nous amènent à porter un regard critique sur plusieurs niveaux qui pourraient être à l'origine de ces erreurs :

Tout d'abord, malgré l'adoption de l'approche par compétences par le système d'enseignement marocain, les programmes scolaires continuent de se concentrer sur les contenus, ce qui est clairement reflété dans les orientations pédagogiques. Ces orientations mettent l'accent plus sur l'activité d'enseignement des contenus plutôt que sur le développement des acquis d'apprentissage chez les apprenants.

Les pratique d'enseignement, basées sur la mémorisation, ne permettent pas de donner un sens aux mathématiques et se résument souvent à la simple répétition de procédures à suivre. Il est donc nécessaire de changer de paradigme pour remédier à cette situation.

Un autre facteur contribuant au faible niveau en mathématiques et en sciences chez les étudiants ayant un profil en sciences humaines au lycée est la réduction du temps d'enseignement consacré à ces matières. En conséquence, ils peuvent manquer d'opportunités pour développer leurs compétences, approfondir leur compréhension et renforcer leur intérêt pour les mathématiques et les sciences en général.

Les résultats présentés soulèvent également des interrogations sur les critères de sélection, les critères de réussite et les objectifs ciblés par les évaluations…etc. Le niveau remarquablement faible des étudiants considérés dans l'étude laisse à penser que leurs résultats au baccalauréat étaient juste autour de la moyenne, ce qui montre que nos choix initiaux d'étudiants étaient loin d'être de qualité et les efforts que nous avons déployés pour attirer des étudiants qualifiés en métier d'enseignement, en allouant une somme d'argent ont également échoué.

VI. CONCLUSIONS :

Résumons les conclusions essentielles de cette étude, qui sont envisagées comme des recommandations pour atteindre les résultats escomptés :

- Pour une mise en œuvre adéquate de l'approche par compétences, il est essentiel de se concentrer sur deux aspects clés : la conception de programmes et d'orientations pédagogiques alignés sur cette approche, ainsi que la mise en place d'évaluations internes ou externes basées sur les acquis d'apprentissage. Parallèlement, il est nécessaire de former les enseignants afin qu'ils puissent accompagner cette évolution de manière efficace.

- Il est fortement recommandé de prendre des mesures pour remédier aux erreurs des élèves liées aux nombres de lettres et aux chiffres, notamment au niveau de l'enseignement primaire. Pour ce faire, il serait judicieux de mettre en place des actions de sensibilisation et de remédiation dans les programmes scolaires. Une suggestion serait de fournir aux enseignants des référentiels d'intervention ou de remédiation afin de les aider à aborder spécifiquement ce problème. Ces référentiels pourraient contenir des stratégies pédagogiques, des exercices pratiques et des ressources supplémentaires pour soutenir les élèves dans l'apprentissage de la correspondance entre les nombres de lettres et les chiffres. En mettant en œuvre de telles mesures, on peut contribuer à surmonter ces difficultés courantes et à favoriser la réussite des élèves dans ce domaine.

- Suite aux résultats de notre étude, nous avons entrepris de proposer une organisation du concours pour la section primaire. Tout d'abord, nous proposons de considérer au moins 4 matières liées aux 7 modules de formation correspondants comme sujets d'évaluation pour les étudiants convoqués après la présélection pour l'entretien oral. Nous avons également proposé une grille d'évaluation pour les pré-acquis disciplinaires basée sur les résultats de notre étude sur les erreurs

RÉFÉRENCES :

DEVAL, K. (2000). *Concours de recrutement de professeurs des écoles. L'erreur : Un obstacle à analyser*. Studylibfr.

FITRIANI, H. N., TURMUDI, T., PRABAWANTO, S., PENDIDIKANMATEMATIKA, M., PACASARJANA, S., & NO, S. (2018). Analysis of students' error in mathematical problem-solving based on Newman's error analysis. *[Paper presentation]*. https://www.semanticscholar.org/paper/Analysis-of-students-error-in-mathematical-problem-Fitriani

FLUCKIGER, A. (2006). Formation au travail de l'erreur et didactique des mathématiques. *Swiss Journal of Educational Research, 28*(1), 43–62. https://doi.org/10.24452/sjer.28.1.4718

MEGROURECHE, C. (2021). Mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en mathématiques (didactique) (p. 166).

NAJAR, R. (2012). L'obstacle du formalisme au début du supérieur. In J.-L. Dorier (Ed.), *Actes du colloque EMF 2012*. emf.unige.ch/files/6014/5320/9027/EMF2012GT7NAJAR.pdf

PELACCIA, T. (2021). *Comment enseigner dans le supérieur en 100 questions-réponses*. De Boeck Supérieur. https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807323025-comment-enseigner-dans-le-superieur-en-100-questions-reponses

RAVESTEIN, J., & SENSEVY, G. (2018). *Statuts de l'erreur dans la relation didactique. (Document inédit)* (p. 10).

REUTER, Y. (2020). La question de l'erreur – Éléments pour un débat. *Recherches en didactiques, 29*(1), 65–77. https://doi.org/10.3917/rdid.029.0065

WIJAYA, A., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., DOORMAN, M., & ROBITZSCH, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), 555–584. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317

OUKKAF, H., & DALI, Y. (2021). L'exploitation de l'erreur comme moyen d'enseignement/apprentissage de la production écrite en classe de FLE : Cas des étudiants de 3ème année moyenne.

MULLIS, I. V. S., & MARTIN, M. O. (EDS.). (2013). *TIMSS 2015 assessment frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center; International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

SAKR, F. (2009). *Identification et mise à l'épreuve des variables permettant la prédiction du niveau de difficulté de tâches d'évaluation pour des équations du premier degré en mathématiques au secondaire*. Mémoire. Montréal (Québec, Canada), Université du Québec à Montréal, Maîtrise en éducation.

DEMONTY, I., FAGNANT, A., & DUPONT, V. (2016). Analyse d'un outil d'évaluation en mathématiques : Entre une logique de compétences et une logique de contenu. *Mesure et évaluation en éducation, 38*(2), 1–29. https://doi.org/10.7202/1036761ar

DE KETELE, J.-M., & GERARD, F.-M. (2005). La validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par les compétences. *Mesure et évaluation en éducation, 28*(3), 1. https://doi.org/10.7202/1087028ar

CENTRE NATIONAL D'ÉVALUATION ET D'EXAMEN (CNEE). (2019). *Rapport national PISA 2018 : Résultats des élèves marocains dans le cadre du Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA)*. Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Disponible sur https://www.men.gov.ma

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

Apprentissage des concepts de variables et de leur interdépendance chez des élèves de 2e secondaire au Québec en contexte STEM.

Comparaison entre une séquence d'enseignement classique et une expérimentation simulée

Ridha Najar[32], Brahim El Fadil et Simon Théberge

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT)

Résumé – Cette recherche vise à déterminer dans quelle mesure un travail en contexte STEM peut favoriser la compréhension des concepts de variables et de leur interdépendance chez des élèves de deuxième année secondaire au Québec avant que ces derniers soient explicitement enseignés. Elle vise également à déterminer si l'outil numérique permet de mieux outiller les élèves pour approfondir leur compréhension de ces concepts. Pour ce faire, nous avons réalisé une activité d'enseignement qui implique la conception d'un pendule, en premier lieu dans le cadre d'un laboratoire traditionnel et en deuxième lieu par une simulation virtuelle. Durant ces deux phases, les étudiants étaient amenés à identifier les variables qui influencent l'oscillation du pendule, à collecter des données, et à analyser l'interdépendance entre ces variables. Les résultats que nous avons observés tendent à montrer qu'une majorité d'élèves était en mesure de mobiliser adéquatement les concepts de variables et de leur interdépendance dans un contexte de science et d'expérimentation, et ce, même si ces notions n'ont pas été explicitement enseignées. D'un autre côté, nous avons observé que la simulation de l'expérience à l'aide d'un logiciel a mis en évidence une relation plus claire entre la longueur du pendule et sa période d'oscillation par rapport à l'expérience en laboratoire. Cependant, la facilité de la simulation semble avoir conduit les élèves à perdre le sens de la situation, car les valeurs de ces variables étaient déterminées par le logiciel.

I. INTRODUCTION

1. Difficultés d'apprentissage de la notion de fonction

D'un point de vue historique, les fonctions, avant d'être liées à une formule, étaient associées à des courbes qui décrivent des mouvements de solides ou qui quantifient des phénomènes comme la vitesse, la chaleur, la densité, en leur prêtant des qualités pouvant varier de façon continue (à ce propos, voir les travaux d'Oresme (1325-1382), de Bacon (1214 – 1294) et de Bradwardine (1290 - 1349)). Galilée (1564-1642), s'intéressant à l'étude du mouvement des pendules et à la chute des

---

[32] Najar, R., El Fadil, B. et Théberge, S. (2024). Apprentissage des concepts de variables et de leur interdépendance chez des élèves de 2e secondaire au Québec en contexte STEM. Comparaison entre une séquence d'enseignement classique et une expérimentation simulée. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT3, pp. 185-196.

corps, et ne disposant pas de la notion de fonction, décrivait les phénomènes qu'il étudiait en faisant usage de courbes ou en s'appuyant sur la théorie des proportions d'Eudoxe (dans laquelle on ne fait que des rapports de grandeurs de même nature) pour exprimer des relations fonctionnelles entre les variables en jeu.

Dans l'enseignement, la notion de fonction représente un objet mathématique commun à différents domaines de la mathématique. Elle est présente en algèbre, en géométrie, en statistique, et constitue un des objets fondamentaux du travail dans le domaine de l'analyse mathématique. Au Québec, le *Programme de Formation de l'École québécoise* (PFEQ) pour l'enseignement secondaire considère que la notion de fonction est centrale au développement des trois compétences disciplinaires que doit développer l'élève tout au long de son parcours scolaire, à savoir : résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique. À mesure que les élèves avancent dans leur parcours scolaire, il est attendu qu'ils « améliorent leur capacité à évoquer une situation en faisant appel à plusieurs registres de représentation » et en passant d'un registre à un autre, sans restriction (MÉES, 2016, p. 13). Les savoirs associés aux fonctions permettent de naviguer à travers ces différentes représentations alors qu'elles apparaissent dans l'enseignement sous la forme de règles algébriques, sous la forme de graphiques, ou encore sous la forme de tableaux. Les fonctions permettent, en ce sens de créer des liens entre les trois sous-domaines de la mathématique définis par le PFEQ, soit 1) l'arithmétique et l'algèbre, 2) les probabilités et les statistiques et 3) la géométrie (MÉQ, 2006, p. 233).

La complexité de la notion de fonction et les difficultés qui y sont liées ont été étudiées par un grand nombre de chercheurs, au Québec et à travers le monde. Nous citons par exemple Duval (1988), Passaro (2009) et Drolet (2012). Ces recherches montrent la complexité de l'enseignement et de l'apprentissage de la notion de fonction et les difficultés qu'éprouvent un grand nombre d'élèves avec cette notion au terme de leurs études secondaires, notamment pour distinguer une fonction et une relation non fonctionnelle, pour comprendre l'interdépendance entre les variables, ou encore les liens entre les différents registres de représentation (graphique, algébrique, table de valeurs, etc.) et leur coordination. En ce qui concerne la notion de variables et de leur interdépendance, Biehler (2006) propose de considérer certaines distinctions épistémologiques lorsque vient le temps d'aborder la notion de dépendance (relations de loi naturelle, relation causale, relation construite, relation décrite, réduction de données). L'auteur nomme, à ce propos, le fait que le temps, qui est souvent la variable indépendante, n'est pas pour autant une cause du mouvement. De telles distinctions peuvent devenir importantes pour les élèves afin d'éviter les erreurs d'interprétation quand vient le temps de déterminer la nature des variables.

À l'instar de Samson et ses collaborateurs (2012) qui déplorent le fait que le potentiel des mathématiques enseignées à l'école est « trop souvent limité à [une] utilisation […] accessoire (p. 195) », nous sommes d'avis que l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques gagne à se faire dans le contexte des sciences et technologies et non seulement pour être appliquée à ces dernières. Nous considérons en ce sens que l'interdisciplinarité et particulièrement l'approche STEM dans l'enseignement pourrait favoriser, chez les élèves, la compréhension des concepts de variables et de leur interdépendance.

2. Importance de l'interdisciplinarité

L'interdisciplinarité à l'école et dans la formation citoyenne est une préoccupation majeure des systèmes et organismes s'intéressant à l'éducation. Dans son rapport de 2018 intitulé : *Le futur de l'éducation et des compétences. Projet Éducation 2030*, l'OCDE stipule que « Les apprenants devraient pouvoir établir des liens entre ce qu'ils apprennent et ce qu'ils vivent, donnant ainsi un sens à leurs acquis. Il faut pour cela conjuguer un apprentissage interdisciplinaire et collaboratif et une maîtrise des connaissances liées à chaque matière » (OCDE, 2018, p. 9).

Au Québec, le renouveau pédagogique amorcé au début des années 2000 fait de l'interdisciplinarité l'une des quatre orientations fondatrices de l'enseignement (MEQ, 2006). Dans leur recension d'écrits portant sur le sujet, Samson et ses collaborateurs (2012) relèvent un ensemble de rapports gouvernementaux qui « ont proposé l'organisation du programme [PFEQ] en domaines d'apprentissage scolaires intégrant chacun plusieurs disciplines afin de favoriser le décloisonnement de ces dernières » (Ibid., p. 195).

Par ailleurs, si plusieurs chercheurs (Samson et al., 2008) constatent qu'à l'école, les mathématiques servent souvent d'outil ou de moteur aux sciences, Samson et ses collaborateurs (2012) déplorent le fait que leur potentiel est « trop souvent limité à [une] utilisation […] accessoire » (*Ibid*., p. 195). Aussi sont-ils d'avis qu'il faudrait plutôt viser l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques dans le contexte des sciences et technologies. Pour Samson et ses collaborateurs (2008), « le problème vient du fait que les programmes n'ont pas été pensés nécessairement en fonction de l'interdisciplinarité » (p. 168). Si les enseignants au secondaire qui ont participé à leur recherche étaient « conscients du fort potentiel quant aux liens entre les mathématiques et les sciences » (Ibid., p. 159), ils ont également constaté que « les élèves [réutilisaient] peu de contenus mathématiques en sciences et qu'ils [avaient] une vision cloisonnée de l'enseignement et de l'apprentissage » (Ibid., p. 159).

En ce sens, la problématique fondamentale en lien avec la mise en place et l'implémentation de l'approche interdisciplinaire dans l'éducation serait : quelles sont les structures curriculaires les plus pertinentes ? Comment les aménager et les implémenter ?

Il importe de noter, à ce propos, qu'il existe des options opposées quant à la conception des curricula dans une approche interdisciplinaire. La première s'inscrit dans ce que Lenoir et Sauvé (1998) appellent *approche radicale*. Cette approche opte pour un curriculum intégré, qui évacue les disciplines et s'appuie sur une approche thématique dans laquelle l'apprentissage se fait à partir de problèmes et/ou de situations de la vie réelle. La deuxième option s'inscrit dans ce que les mêmes auteurs appellent *approche relationnelle*. Celle-ci opte pour une structuration curriculaire où les disciplines occupent une part conséquente. Les défenseurs de cette approche (Klein, 1990 ; Lenoir et al., 1998) estiment que le maintien des disciplines est une garantie contre des tendances à verser dans l'utilitarisme et assure une responsabilité et une autonomie aux enseignants.

L'éducation STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) pourrait être considérée comme un compromis entre les approches radicale et relationnelle. Apparue aux États-Unis au début des années 2000, l'approche STEM vise à attirer plus d'étudiants dans les filières scientifiques et à répondre au besoin croissant de compétences dans ces secteurs d'activités. Au lieu d'enseigner les quatre disciplines séparément, le programme STEM propose de les intégrer dans un paradigme d'apprentissage cohérent qui montre comment les connaissances construites se complètent et se soutiennent mutuellement. Les élèves apprennent à appliquer les connaissances apprises dans les quatre matières dans des situations qui relient la classe à son milieu. La méthodologie se fonde sur le développement de projets en lien direct avec des situations réelles. Selon Kurup, Li, Powell et Brown (2019), plusieurs études ont montré que cette approche d'enseignement doit commencer dès le début de la scolarité primaire et se poursuive à la fin du secondaire et au-delà.

Considérant, d’une part les difficultés qu’éprouvent les élèves dans la compréhension des concepts de variables et de leur interdépendance, et d’autre part le potentiel d’une approche pédagogique basée sur les STEM, cette recherche envisage de répondre aux deux questions suivantes :

1. Dans quelle mesure une activité d’enseignement dans un contexte STEM favorise-t-elle, chez les élèves, la compréhension des concepts de variables et de leur interdépendance avant qu’ils soient explicitement enseignés à l’école ?
2. L'utilisation d'outils numériques permet-elle aux élèves de mieux comprendre et explorer les concepts de variables ainsi que leur interdépendance ?

II. CADRE CONCEPTUEL

Pour répondre à nos questions de recherche, nous nous appuyons sur le cadre conceptuel élaboré par Haupt (2018) en lien avec l’éducation STEM. Ce modèle se base sur différentes approches pédagogiques du design qui ont été observées dans la pratique. De ce point de vue, la pédagogie est envisagée sous un angle pratique, autour de trois modes de transfert : le constructivisme cognitif, le socioconstructivisme et le mode technologique (Bevan et al. 2019). C’est ce dernier que nous considérons ici, et ce sous un double aspect : traditionnel et virtuel. Le mode technologique traditionnel renvoie aux laboratoires classiques de sciences dont les avantages éducatifs sont reconnus pour être importants et riches pour les élèves, notamment en ce qui concerne le développement des compétences scientifiques et la stimulation de l’intérêt pour l’apprentissage des sciences et l'investigation (Hofstein et Lunetta, 2004). Toutefois, ces laboratoires traditionnels (LT) se trouvent limités pour étudier des phénomènes inaccessibles à l'œil nu ou aux instruments d’observation et de mesure classiques, tels que les phénomènes infiniment petits ou trop rapides. D'où l'importance d’introduire le mode technologique virtuel (Hofstein et Lunetta, 2004). En outre, il est largement admis que les activités dans des laboratoires virtuels (LV) constituent une amélioration significative de l’environnement d’apprentissage et offrent souvent des expériences interactives et visuellement stimulantes, qui peuvent renforcer l'engagement des étudiants dans leur apprentissage (Dyrberg et al., 2017). Il est également possible d’associer un travail dans un LT à un autre dans un LV. De ce point de vue, plusieurs chercheurs soulignent que les LV peuvent être utilisés en amont d'une activité de laboratoire traditionnel (activités préparatoires) (Abdulwahed, 2010 ; Rossiter, 2016) pour renforcer et anticiper l'apprentissage des concepts clés. Cela dit, Rossiter (2016) affirme que les LV pourraient également être introduits après une expérience traditionnelle en laboratoire. Ainsi, les étudiants pourraient tester toute hypothèse qui n'a pas abouti ou valider leurs découvertes lors de l'expérimentation (Rossiter, 2016). Notre étude se positionne dans cette dernière perspective.

III. EXPÉRIMENTATION

L’expérimentation consiste en une activité portant sur la conception d'un pendule simple et l'analyse de son mouvement, en vue de mettre en évidence les liens d’interdépendance entre les variables longueur et période.

L’expérimentation s'est déroulée en deux phases distinctes. La première a eu lieu dans un laboratoire classique (LT), tandis que la seconde s'est déroulée dans un environnement de laboratoire virtuel (LV). Les deux phases ont été réalisées à une semaine d’intervalle sous la supervision de l’enseignant de la classe. La seule intervention de l’enseignant de la classe dans l’expérimentation consistait à présenter l’activité aux élèves et à donner un aperçu sur ce qu’est un pendule simple, ses composants, et la terminologie liée à l'expérimentation (longueur et masse du pendule, période …). Les données ont été collectées auprès de 19 élèves d'une classe de 2e année du secondaire, située dans le Nord du Québec.

Notons qu'au Québec, l'enseignement explicite des fonctions commence en classe de 4e année du secondaire. Toutefois, les élèves sont progressivement familiarisés (implicitement) depuis le primaire avec les notions en lien avec les fonctions (variables, graphique, sens de variation) lors de l'étude de thèmes en mathématiques ou en sciences. Les élèves qui ont participé à cette recherche n'avaient donc reçu, au moment de l'expérimentation, aucun enseignement explicite de la notion de fonction.

1. Phase d'enseignement classique

La phase d'enseignement classique, d'une durée d'une heure, s'est déroulée avant celle de la phase numérique. Au début, l'enseignant définit le pendule et présente aux élèves différents types de pendules (horloge, pendule de Foucault, etc.) en spécifiant leur mode de fonctionnement et leur utilité. Les différents paramètres intervenant dans le mouvement du pendule (longueur du fil, masse du pendule, amplitude, oscillation, période) sont définis, illustrés et expliqués par l'enseignant. L'enseignant propose ensuite aux élèves, placés en petits groupes, une activité qui consiste à fabriquer un pendule avec le matériel disponible (fil, et différents objets en guise de poids : trombone, poids en plomb utilisé pour la pêche, pâte à modeler). Une fois le pendule fabriqué, chaque groupe d'élèves installe son dispositif afin de l'expérimenter. La relation fonctionnelle observée implique la durée de l'oscillation (ou période) et la longueur du pendule. En fixant la masse du pendule à 100 g et l'angle à 25 degrés, les élèves choisissent 5 longueurs différentes pour le pendule (30 cm, 40 cm, 50 cm, 60 cm, 70 cm) et mesurent avec un chronomètre le temps de 10 oscillations pour chaque longueur. Ils déterminent, à l'aide d'une calculatrice, la période moyenne correspondante à chacune des longueurs et inscrivent les mesures obtenues dans un tableau de valeurs (voir annexe 1). Notons que dans cette étape de l'expérimentation les élèves étaient regroupés en équipes de 3 ou 4 élèves, et ce vu qu'il serait difficile de réaliser la fabrication et la prise des mesures de façon individuelle. Toutefois, les élèves avaient ensuite répondu individuellement dans une fiche-réponse à quatre questions portant sur l'expérimentation et les résultats obtenus. Les questions sont décrites et analysées ci-dessous.

2. Phase de simulation (numérique)

La phase d'enseignement numérique, d'une durée d'une heure également, s'appuie sur la première par le fait que les élèves sont familiarisés avec le pendule et les paramètres intervenant dans son mouvement. Les élèves travaillent individuellement avec des tablettes et utilisent un logiciel en ligne portant sur le mouvement d'un pendule simple. Le logiciel permet de faire varier la longueur du pendule et de lire directement, avec un chronomètre intégré, la période correspondante. Dans la phase numérique, les élèves doivent prendre les périodes d'un pendule pour 10 longueurs différentes variant de 10 à 100 cm, avec un pas de 10 cm (la masse et l'angle du pendule étant fixés respectivement à 100 g et 25 degrés). Les élèves remplissent un tableau avec les mesures obtenues (voir annexe 2) et répondent ensuite individuellement aux mêmes questions données dans l'expérience du laboratoire.

3. Questions de la fiche-réponse et protocole d'analyse

Pour chaque question de la fiche-réponse, nous avons considéré trois types de réponses possibles : 1) Réponse correcte (ou acceptable), 2) Réponse erronée et 3) Non-Réponse (NR).

Une réponse est considérée « correcte » (ou acceptable) si elle correspond de façon satisfaisante aux attentes que nous avions fixées. Une réponse est « erronée » si elle ne correspond pas aux attentes. Enfin, les élèves qui n'inscrivent rien dans l'espace désigné pour la réponse ou qui inscrivaient explicitement un message désignant qu'ils ne savent pas comment répondre à la question obtiennent le code NR.

Critères pour juger une réponse correcte dans les questions de la fiche-réponse et exemples de réponses correctes (ou acceptables)

Question 1: À l'aide des valeurs inscrites au tableau 1, peux-tu dire si la période d'un pendule change lorsque sa longueur change? Explique ta réponse.

Pour obtenir une réponse correcte, l'élève doit mentionner dans son explication que lorsque les valeurs de la longueur augmentent, les périodes des pendules augmentent également (ou changent de valeurs).

Exemple de réponse :

« Oui, elle change car on a observer que plus elle est longue plus ça prend du temps avant de faire un aller retour ».

Question 2 : Quelles sont les deux grandeurs variables en jeu dans la situation que tu es en train de travailler?

Pour obtenir une réponse correcte, l'élève doit identifier les deux variables en jeu dans la situation, soit la longueur du pendule et sa période. Nous avons également accepté les réponses des élèves qui indiquent que les variables sont la longueur et le temps. Notons que les réponses apportées à la question de l'identification des variables ont pu être influencées par une lecture des variables inscrites dans les tableaux.

Exemple de réponse :

« La longueur et le temps ».

Question 3 : Pour les deux grandeurs variables que tu viens d'identifier, choisis la réponse que tu penses la plus appropriée et explique pourquoi :

1. Chacune des deux variables dépend de l'autre ;
2. Une des deux variables dépend de l'autre qui est libre.

Pour obtenir une réponse correcte, l'élève doit dire que l'une des deux variables dépend de l'autre (donc, choisir l'option 2) en expliquant que c'est la longueur du pendule qui fait varier sa période. En ce sens, un élève qui n'aurait pas présenté une réponse correcte à la question 2 risquait d'éprouver de la difficulté à exprimer son explication d'une façon correcte à la question 3. Nous verrons cependant dans la partie résultats que nous n'avons pas été confrontés à cette éventualité.

Exemple de réponse :

« L'une des deux variables dépend de l'autre, qui est libre : Le temps change selon la longueur du fil ».

Question 4 : Si tu crois qu'une des deux variables dépend de l'autre, comment selon toi pourrait-on distinguer chacune de ces deux variables (celle qui est dépendante de celle qui est libre) ?

Pour cette question, si l'élève avait fourni une réponse jugée acceptable à la question 3, la réponse était jugée acceptable pour la question 4. Les élèves qui ont expliqué que la longueur du pendule fait varier sa période ont donc présenté une réponse que nous avons jugée correcte.

Exemple de réponse :

« Celle qui dépens de l'autre c'est le temps car il faut que la corde soit de la longueur parfaite pour pouvoir être sincro à l'horloge »

Dans cet exemple, l'élève explique que la période du pendule (le temps) dépend de la longueur de la corde. Il semble ensuite tenter, dans ses mots, une explication dans laquelle il affirme que chaque longueur de corde peut être associée à une période de pendule donnée. Il faut que la corde soit de la bonne longueur pour que le temps du pendule corresponde (soit synchronisé) à la période enregistrée sur l'horloge lors de la prise de mesure.

IV. RÉSULTATS

Les élèves se sont généralement révélés en mesure de répondre correctement à la question 1 dans les deux séquences d'enseignement (11/19 ou 58% pour le laboratoire traditionnel (LT); 13/19 ou 68% pour le laboratoire virutel (LV)). Ce sont 4 élèves qui ont obtenu une réponse erronée dans le LV 1 alors qu'ils et elles ont obtenu une réponse correcte au LT 1). À l'inverse 6 élèves ont obtenu une réponse erronée au LT 1, mais correcte au LV 1.

Les traces écrites des élèves pour la question 1 du LT et du LV montrent des types de réponses relativement similaires. Les réponses correctes impliquent généralement la démonstration d'un changement de période à la hausse à mesure que la longueur du pendule augmente. La majorité des erreurs, quant à elles, implique une confusion entre les variables (ex. la masse plutôt que la longueur ; la vitesse plutôt que le temps). Voici des exemples de telles erreurs :

« Oui, car le poids change don ça fait ralentir le mouvement ».

« Oui car plus le fil est long plus la vitesse était moins rapide et le fil qui était le plus court a été le plus vite ».

Cependant, presque tous les élèves arrivent à repérer une relation de croissance mutuelle entre les variables, même lorsque ces dernières sont confondues. Ainsi, autant dans le LT que dans le LV, presque tous les élèves semblent avoir reconnu l'interdépendance des variables alors qu'une majorité plus ou moins faible a réellement manifesté une compréhension claire de cette dernière.

Pour la question 2, ce sont 13 élèves (68%) qui ont présenté une réponse que nous avons jugée correcte dans le LT et 11 élèves (58%) qui ont présenté une telle réponse dans le LV. Les difficultés concernent généralement la nature des variables (ex. confondre longueur et masse ; temps et vitesse ; variable et unité de mesure). Voici un exemple de telles erreurs :

« Les centimètres et les secondes ».

L'élève ici confond les variables avec leurs unités de mesure

Néanmoins, la majorité des élèves s'est révélée en mesure d'identifier correctement les variables en jeu dans le LT et une majorité plus faible dans le LV. Nous en concluons donc que les élèves savent, avec une majorité plus ou moins grande, identifier les variables dans une relation fonctionnelle. Rappelons que ces réponses ont pu être influencées par une lecture des variables inscrites dans les tableaux.

Pour les questions 3 et 4, ce sont 10 élèves (53%) qui ont présenté une réponse jugée correcte dans le LT. Ils n'étaient que 4 (21%) à avoir fait de même dans le LV. Dans tous les cas de réponses erronées, les élèves semblent avoir éprouvé de la difficulté à cerner la relation de dépendance ou, à tout le moins, à l'expliquer, alors que tous ont nommé que les deux variables dépendaient l'une de l'autre. Le manque de clarté dans les explications et les contradictions étaient fréquents dans les réponses erronées. Voici des exemples de telles erreurs :

Réponse d'un élève à la question 3 du laboratoire :

« Chacune des deux variables dépend de l'autre : car, si exemple le temps est de 1,43 secondes, l'autre va être similaire ».

Réponse d'un élève à la question 3 de la simulation :

« Chacune des deux variables dépend de l'autre ; La longueur dépend de la période ».

Réponse d'un élève à la question 4 du laboratoire :

« Les deux variables qui dépend de l'autre c'est le temps parce que la corde faut qu'elle soit de la longueur parfaite pour que la longueur soit sincro ».

Notons, que le nom du laboratoire, placé en titre sur le document, pourrait avoir influencé les réponses des élèves à cet égard : « Influence de la longueur sur la période ». Cela dit, ce nom restait le même autant pour le LT que pour le LV et les élèves qui ont obtenu une réponse correcte n'ont pas repris cette formulation. Cela dit, les différences épistémologiques qui distinguent certaines relations entre variables identifiées par Biehler (2006) auxquelles nous faisions référence en introduction de cet article contribuent à expliquer les difficultés vécues par les élèves puisque le temps est souvent la variable indépendante. En effet, l'idée que le temps puisse être influencé par une autre variable peut apparaître contre-intuitif, surtout si l'on n'a pas vu l'expérimentation se dérouler sous nos yeux. Cela pourrait expliquer l'écart entre les résultats des élèves dans le LT et le LV. Au moment de faire l'analyse, nous avons remarqué que 5 élèves ayant présenté une réponse correcte au LT ont affirmé l'inverse dans le LV. Nous en concluons qu'une faible majorité d'élèves semble arriver à discerner la variable dépendante de la variable indépendante dans une relation fonctionnelle lorsque l'expérimentation n'est pas simulée.

V. CONCLUSIONS

Nous rappelons que notre objectif de recherche est d'étudier : 1) Dans quelle mesure une activité d'enseignement dans un contexte STEM favorise-t-elle, chez les élèves, la compréhension des concepts de variables et de leur interdépendance avant qu'ils soient explicitement enseignés à l'école ? Et 2) Si l'utilisation d'outils numériques permet aux élèves de mieux comprendre et explorer les concepts de variables ainsi que leur interdépendance.

Nous inspirant du contexte historique qui a vu émerger le concept de fonction, nous avons conçu une situation d'enseignement-apprentissage en classe de science et technologie de 2e année secondaire mettant en œuvre l'interdépendance des variables longueur et période dans le mouvement d'un pendule simple.

Deux observations ressortent des résultats de notre expérimentation :

Observation 1 : Une majorité (plus ou moins grande) d'élèves a su reconnaitre et comprendre l'interdépendance entre deux variables, et ce, dans le laboratoire traditionnel (LT)comme dans le laboratoire virtuel (LV). Le LV semble cependant avoir été légèrement mieux réussie à ce propos.

Observation 2 : Une majorité (plus ou moins grande) d'élèves semble avoir été en mesure d'identifier les variables de la situation. Environ la moitié des élèves a été en mesure d'identifier, dans une relation fonctionnelle, la variable indépendante et la variable dépendante pour le travail dans le LT. Un faible nombre a su faire de même pour la simulation. Le travail au LT a été sensiblement mieux réussi dans les questions 1, 3 et 4.

À la lecture de ces résultats, nous observons un paradoxe dans la performance des élèves dans le LT et le LV. En effet, si les élèves ont su mieux reconnaitre l'interdépendance des variables dans le LV (Q1), ces derniers ont été plus en mesure de nommer les deux variables (Q2) et de départager celle qui est dépendante de celle qui est indépendante (Q3 et Q4) dans le LT. Pour nous, de tels résultats s'expliquent d'abord par le fait qu'une partie de ces élèves éprouvent des difficultés pour comprendre les notions en jeu. Nous pensons cependant que la nature des deux expériences menées ait également pu influencer les réponses des élèves.

Nous pensons ainsi qu'il est plausible que le LV (avec un nombre de valeurs pris dans le tableau plus important que celui pris dans le laboratoire) ait mené à une relation croissante plus évidente entre la longueur et la période d'un pendule que l'expérience en laboratoire traditionnel plus sujet à l'erreur humaine. Cela pourrait expliquer pourquoi les élèves étaient plus nombreux à l'avoir repérée à la question 1. De même, nous soupçonnons que le fait d'avoir simulé la situation dans le LV pourrait avoir amené les élèves à perdre le sens de cette dernière alors que les variables se retrouvaient cachées, assujetties à la programmation d'un logiciel. Cela pourrait, selon nous, expliquer pourquoi les questions 2, 3 et 4, qui portent davantage sur l'identification des variables et leurs rôles dans la relation fonctionnelle, ont été mieux réussies lors du LT. Cette explication pourrait être appuyée par le nombre d'occurrences des confusions entre la nature des différentes variables tout au long des deux situations. À ce sujet, nous avons constaté que les élèves avaient confondu plus fréquemment la nature des variables dans la simulation que dans le laboratoire. Des erreurs impliquant une confusion entre la longueur et la masse ou entre la période et la vitesse sont, en effet, apparues 11 fois dans le LV alors qu'elles ne sont apparues que 5 fois dans le LT. Nous pensons que cette différence pourrait être due, en partie, au fait que le LV éloigne les élèves de la situation réelle, leur faisant ainsi perdre le sens des données qu'ils observent.

Revenant, finalement, à nos questions de départ, il semble que les élèves soient en mesure de reconnaitre et de comprendre l'interdépendance entre deux variables (Q1) et d'identifier ces dernières (Q2), et ce, que l'expérience soit vécue avec du matériel tangible ou qu'elle soit simulée à l'aide d'un logiciel. La question de départager la variable indépendante de la variable dépendante, toutefois, semble fortement liée à la possibilité, pour les élèves, de rattacher l'expérience à une situation réelle impliquant du matériel tangible. Ces résultats laissent penser qu'un travail dans un contexte STEM pourrait favoriser, chez des élèves, la compréhension et la mobilisation des concepts de variables et de leur interdépendance avant qu'ils soient explicitement enseignés. La recherche montre également que la pertinence d'utiliser un outil numérique dans l'apprentissage varie selon la nature des objets de savoirs. Il pourrait être intéressant, dans une prochaine recherche, de vérifier la capacité des élèves à mobiliser ces connaissances en dehors du contexte expérimental scientifique à l'aide d'un groupe témoin.

REFERENCES

ABDULWAHED, M. (2010). Towards enhancing laboratory education by the development and evaluation of the trilab concept (Doctoral dissertation, PhD Thesis, University of Loughborough).

BEVAN, B., PEPPLER, K., ROSIN, M., SCARFF, L., SOEP, E., WONG, J. (2019). Purposeful pursuits: Leveraging the epistemic practices of the arts and sciences. Converting STEM into STEAM Programs. *Methods and Examples from and for Education,* 21-38.

BIEHLERRE, R. (2006). Construction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. Dans : J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 61-81). New York: Springer.

CARRAHER D-W., ANALÚCIA D-S. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

DROLET, D. (2012). Évaluation du niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactiques et de Sciences cognitives*, n°1, 235-253.

DYRBERG N-R., TREUSCH A-H., WIEGAND C. (2017). Virtual laboratories in science education: students' motivation and experiences in two tertiary biology courses, *Journal of Biological Education*, 51:4, 358-374.

HAUPT, G. (2018). Design in technology education: Current state of affairs. *Handbook of technology education*, 643-659

HOFSTEIN, A., & LUNETTA, V. N. (2004). The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century. *Science education*, *88*(1), 28-54.

KLEIN, J-T. (1998). L'éducation primaire, secondaire et postsecondaire aux États-Unis : vers l'unification du discours sur l'interdisciplinarité. *Revue des sciences de l'éducation,* 24 (1), 51–74. https://doi.org/10.7202/031961ar

KURUP P. M., LI X., POWELL G., et BROWN M. (2019). Building Future Primary Teachers' Capacity in STEM: Based on a Platform of Beliefs, Understandings, and Intentions. *International Journal of STEM Education*, 6, p. 1-4.

LENOIR, Y. et SAUVÉ L. (1998). De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement: un état de la question (1re partie). *Revue française de pédagogie*, (124), 121-153.

MEÉS (ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (2016). Progression des apprentissages au secondaire : Mathématiques (premier et deuxième cycle). Québec : Gouvernement du Québec.

MEQ (ministère de l'Éducation du Québec) (2006). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 1er cycle. Québec : Gouvernement du Québec.

PASSARO V. (2009). Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 14, p. 61 – 77. IREM de Strasbourg.

ROSSITER, J-A., (2016). Low production cost virtual modelling and control laboratories for chemical engineering students. *IFAC-PapersOnLine*, *49*(6), 230-235.

SAMSON, G., HASNI, A. et DUCHARME-RIVARD, A. (2012). Constats et défis à relever en matière d'intégration et d'interdisciplinarité : résultats partiels d'une recension d'écrits. *McGill Journal of Education / Revue des sciences de l'éducation de McGill,* 47(2), 193-212. https://doi.org/10.7202/1013123ar

SAMSON, G., MUTIMBUTIMBU, D-B., LECLAIR, J-M. (2008). Des liens à favoriser entre les mathématiques et les sciences au secondaire. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2008. Enseignement des mathématiques et interdisciplinarité*. Université de Sherbrooke. p. 159-170.

ANNEXE 1

LABO 1 : Influence de la longueur sur la période

1. **Retranscris dans le tableau 1 les résultats que tu as inscrits dans les lignes ombragées de la fiche *LABO 1 : EFFET DE LA LONGUEUR.***

Tableau 1

Longueur réelle du pendule (cm)	30	40	50	60	70
Période (s)	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7

ANNEXE 2

Tableau 3

	Longueur du pendule (cm)									
	10 cm	20 cm	30 cm	40 cm	50 cm	60 cm	70 cm	80 cm	90 cm	100 cm
Période *T* *(s)*	0,64	0,90	1,11	1,28	1,43	1,57	1,69	1,81	1,92	2,03

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

Les effets de la prise de conscience progressive des différentes propriétés de la représentation graphique sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle

Virginie Robert[33]
Université Laval
Hassane Squalli, Patricia Marchand
Université de Sherbrooke
David Benoit
Université du Québec en Outaouais

Résumé – Cet article expose l'une des réponses au premier objectif de la thèse de Robert (2024) qui consiste à décrire les rapports dialectiques entre les différentes manières d'agir et de réfléchir relatives à la pensée fonctionnelle dans l'activité d'enseignement-apprentissage. Plus précisément, nous illustrons les effets de la prise de conscience progressive des propriétés de la représentation graphique sur les processus de conceptualisation et les raisonnements qui émergent et se déploient dans l'activité d'une équipe de quatre élèves de la première année du secondaire en contexte québécois. Pour ce faire, nous présentons d'abord le cadre de référence utilisé dans la thèse ainsi que les assises méthodologiques qui auront permis de mettre en lumière le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité de cette équipe.

I. INTRODUCTION

Dans cet article, nous proposons de mettre en lumière l'une des réponses au premier objectif de la recherche doctorale de Robert (2024), qui consistait à décrire les rapports dialectiques entre les différentes manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle dans l'activité d'enseignement-apprentissage. Plus spécifiquement, à partir d'exemples du corpus de données de la thèse, ce texte permet d'expliciter la manière dont la pensée fonctionnelle y a été abordée sous l'angle de la richesse des rapports dialectiques entre ses trois principales manières d'agir et de réfléchir : raisonner, conceptualiser et représenter. À cet effet, nous abordons plus précisément le déploiement de la pensée fonctionnelle en décrivant les effets de la prise de conscience progressive

---

[33] Robert, V.; Squalli, H.; Marchand, Patricia et Benoit, D. (2024). Les effets de la prise de conscience progressive des différentes propriétés de la représentation graphique sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 197-207.

des propriétés de la représentation graphique sur les processus de conceptualisation et sur les raisonnements qui se déploient dans l'activité d'une équipe de quatre élèves de la première année du secondaire dans une école québécoise.

Depuis quelques années, les recherches sur la pensée fonctionnelle, bien qu'encore peu nombreuses, nous permettent d'en apprendre davantage sur son importance ainsi que sur les enjeux relatifs à son développement (p. ex. Ben Nejma, 2020 ; Blanton et Kaput, 2011 ; Carraher et Schliemann, 2007 ; Robert, 2018, 2024). Elle se distingue notamment des autres formes de la pensée mathématique par la nature des activités à travers lesquelles elle émerge. Dans cette perspective, la pensée fonctionnelle est définie par Robert (2024) comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités qui impliquent une ou plusieurs relations fonctionnelles.

Dans les dernières années, plusieurs pistes d'intégration de la pensée fonctionnelle ont été proposées dans les recherches s'inscrivant dans le courant *Early Algebra* ; « courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, à une approche curriculaire et à un domaine de formation des [personnes enseignantes] » (Squalli, 2015, p. 346). Dans celles-ci, la pensée fonctionnelle est mise de l'avant pour favoriser ou introduire le développement de la pensée algébrique (p. ex. Blanton et Kaput, 2011; Blanton, Brizuela et al., 2015; Pinto et Cañadas, 2021). Ces recherches ont notamment permis de relever le potentiel de certaines tâches (comme celles de généralisation de suites de motifs géométriques croissants ou encore celles de généralisation de situations contextualisées) pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle des élèves du primaire, et ce, avant leur apprentissage formel du concept de fonction. À cet effet, certaines études récentes révèlent que dès la première année du primaire, les élèves peuvent produire des raisonnements covariationnel ou par correspondance et qu'ils arrivent à mobiliser du symbolisme pour représenter leurs généralisations (Blanton, Brizuela et al., 2015). Outre les recherches *d'Early Algebra*, d'autres recherches se sont intéressées au développement de la pensée fonctionnelle, dont celles de Heid (2003) et de Günster et Weigand (2020) qui ont étudié des pistes relatives à l'utilisation des technologies pour un travail sur les fonctions. De son côté, Robert (2018) s'est intéressée au potentiel des tâches proposées dans les manuels scolaires du primaire québécois pour le développement de la pensée fonctionnelle. Avant la recherche présentée ici, les études empiriques réalisées s'étaient concentrées sur la documentation des raisonnements des élèves et leur manière de représenter des généralisations de relations fonctionnelles, laissant de côté la conceptualisation. Or, les différents concepts impliqués dans l'étude des phénomènes fonctionnels, comme ceux de covariation, de dépendance ou encore de variable sont essentiels pour la compréhension de l'essence du concept de fonction (René de Cotret, 1988 ; Thompson et Harel, 2021; Carlson et al., 2002). Dans cette optique, la thèse avait pour volonté de documenter les rapports dialectiques entre ce que Robert (2024) définit comme étant les trois principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle : raisonner, conceptualiser et représenter. Ces dernières découlent directement des travaux de maîtrise de Robert (2018), dans lesquels elle avait caractérisé la pensée fonctionnelle sous une forme opératoire qui comprenait également 3 composantes : un ensemble de raisonnements particuliers, un rapport aux concepts et une manière de communiquer. Par l'ancrage de la thèse dans la théorie de l'objectivation (qui sera rendu explicite à la section suivante), ces composantes se sont transformées en principales manières d'agir et de réfléchir qui ont été formulées sous la forme de verbes d'action-réflexion (Robert, 2024). En documentant les rapports dialectiques entre raisonner, conceptualiser et représenter, la recherche a notamment permis de faire ressortir la manière dont les processus de conceptualisation ont influencé le raffinement des raisonnements et provoqué une évolution de la compréhension des élèves du registre graphique (Robert, 2024). Dans le cadre de cet article, nous proposons de présenter de manière plus spécifique un autre résultat qui est celui des effets de la prise de conscience progressive des différentes propriétés de la représentation graphique sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

Les fondements théoriques de la recherche présentée proviennent de la théorie de l'objectivation (TO) (Radford, 2011, 2021). Celle-ci s'inscrit ainsi dans un paradigme socioculturel de l'éducation selon lequel l'apprentissage est considéré comme un processus culturel, social et historique. Sous la loupe de la TO, la pensée mathématique est approchée comme un système complexe de manières d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées (Radford, 2021). La pensée fonctionnelle est ici traitée comme l'une des formes de la pensée mathématique pour laquelle les manières d'agir et de réfléchir qui émergent et se déploient dans des activités mettant en jeu une relation fonctionnelle. Notons aussi que la TO défend une conception non mentaliste de la pensée au sens où la pensée ne se restreint pas à la boite crânienne : « pour fonctionner, la pensée a recours à une série de [moyens sémiotiques d'objectivation] dont l'étude peut apporter de nouveaux éclairages sur la production du sens mathématique chez l'élève » (Radford, 2022, p. 248). En ce sens, les gestes, les éléments prosodiques, le discours, les traces écrites et les comportements non-verbaux ne sont pas considérés comme des expressions externes de processus mentaux ; ils font partie intégrante de la pensée.

Tel que mentionné précédemment, en combinant un cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle et la TO, la pensée fonctionnelle a pu être approchée de manière opératoire par trois principales manières d'agir et de réfléchir qui entretiennent des rapports dialectiques : raisonner, conceptualiser et représenter. Pour documenter les effets de la prise de conscience progressive des différentes propriétés de la représentation graphique sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle, nous nous pencherons plus spécifiquement sur les manières d'agir et de réfléchir faites avec et sur les représentations graphiques des relations fonctionnelles. Selon Yavuz (2010), on ne pourrait s'approcher d'une compréhension des propriétés des fonctions que par la prise en considération de ses multiples représentations. Dans le cadre de l'étude de la pensée fonctionnelle, il est donc particulièrement pertinent de s'intéresser aux signes et aux registres de représentations sémiotiques qui sont mobilisés à des fins de représentation, de conversion ou de traitement de relations fonctionnelles (Duval, 1993). Or, pour interpréter adéquatement la représentation graphique d'une fonction, il faut savoir en discerner les éléments signifiants (Passaro et al., 2023) pour ensuite leur donner un sens au regard du phénomène étudié. Les élèves doivent ainsi être en mesure de donner du sens au graphique cartésien et à la représentation graphique de la fonction qui s'y trouve, ce qui se traduit notamment par la prise de conscience des propriétés du graphique cartésien (caractéristiques des axes, graduation, coordonnées, etc.) (Robert, 2024). Les élèves doivent aussi être en mesure de s'approprier les propriétés de la représentation graphique d'une fonction dans le graphique cartésien, notamment son domaine, son codomaine, ses signes, ses extrémums, ses points d'inflexion, etc. Concrètement, un raffinement des représentations graphiques créées ou une articulation plus aisée de celles-ci peuvent nous donner des pistes quant au développement de la pensée fonctionnelle.

III. MÉTHODOLOGIE

La recherche présentée est qualitative et descriptive (Van der Maren, 2003, cité dans Lenoir et al., 2018). L'activité d'enseignement-apprentissage de laquelle découle le corpus de données exploitées a été menée auprès d'un groupe d'élèves de la première année du secondaire d'une école québécoise (13 et 14 ans). La tâche qui était au centre de l'activité, nommée la tâche *des bouteilles,* est inspirée des travaux de Charrière (1995), de Carlson (1998) et de Passaro (2015). Elle a été créée pour provoquer l'émergence et le déploiement des manières d'agir et de réfléchir qui sont liées à la modélisation fonctionnelle d'un phénomène. Plus précisément, elle visait à amener les élèves à modéliser la hauteur de l'eau (variable dépendante) en fonction du temps (variable indépendante) pour le remplissage de bouteilles de divers formats à débit constant par le biais de différentes sous-tâches. L'activité d'enseignement-apprentissage a été d'une durée de 60 minutes. Pendant celle-ci, les élèves ont travaillé en équipe de quatre à cinq élèves. La chercheure et l'enseignante circulaient dans la classe dans l'optique de participer au travail conjoint (au sens de Radford, 2021) que représente l'activité d'enseignement-apprentissage. Notons que dans leur scolarisation antérieure, les élèves n'avaient généralement pas été initiés à la modélisation fonctionnelle dans le registre de représentation graphique et leurs expériences relatives aux relations fonctionnelles dans un contexte de classe relevaient principalement de l'étude de suites numériques et de suites à motifs géométriques croissants. L'objectif de la thèse étant de documenter comment se déploie la pensée fonctionnelle d'une manière que nous pourrions qualifier de « naturelle », il n'y a pas eu de période d'enseignement préalable des concepts et des registres de représentation invoqués dans les tâches.

Pour documenter le déploiement de la pensée fonctionnelle pendant cette activité, neuf caméras ont été installées dans la classe pour filmer à la fois la personne chercheure et les équipes d'élèves. Une analyse multisémiotique de l'activité captée a ensuite été menée à partir d'un devis développé dans la thèse qui s'inspire des travaux de Powell, Francisco et Maher (2003) et de Radford et Sabena (2015). Ce devis prend en charge l'analyse de l'activité ostensible de tous les sujets de la classe (tant les élèves que la personne chercheure) par un traitement de différents moyens sémiotiques d'objectivation à travers lesquels la pensée se réalise. Les extraits de verbatims qui sont présentés dans la section *résultats* sont ainsi enrichis d'éléments contextuels, de descriptions de gestes, de traces écrites, d'éléments prosodiques et de comportements non verbaux quand ceux-ci nous renseignent sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle. Dans cet article, nous nous concentrerons sur la présentation de trois unités d'analyses (UA-B1.1, UA-B1.5 et UA-B1.7) qui se déroulent à trois moments différents de l'activité et qui correspondent respectivement au travail sur la sous-tâche 2, sur la sous-tâche 3 et sur la sous-tâche 4 de la tâche présentée ci-dessous. Les unités d'analyse sont issues de l'activité d'une équipe composée de quatre élèves : Malix, Dan, Élisabeth et Coralie.

IV. PRÉSENTATION DE LA TÂCHE DES BOUTEILLES

La tâche des bouteilles est segmentée en quatre sous-tâches. La première sous-tâche consiste en une première initiation au registre de représentation graphique. Plus spécifiquement, elle propose la production de l'allure du graphique de la hauteur de l'eau (h) en fonction du temps écoulé (t) après avoir visionné le un extrait vidéo présentant le remplissage, à débit constant, d'un bécher gradué de 400 ml. Pendant le visionnement, la production de l'allure du graphique était faite par la personne chercheure qui suivait les recommandations faites par les élèves. La deuxième sous-tâche met à l'honneur le remplissage de bouteilles coniques (voir figure 1). Les élèves devaient associer les bouteilles aux fonctions qui modélisent leur remplissage.

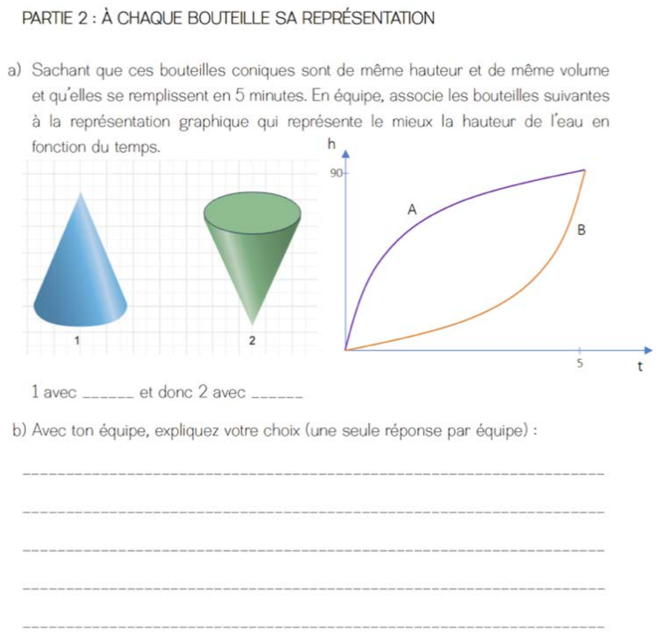


Figure 1 *– Tâche des bouteilles : sous-tâche 2 (Robert, 2024)*

La troisième sous-tâche (présentée dans la figure 2) visait la création d'une superposition de représentations graphiques des fonctions modélisant le remplissage de quatre bouteilles de formats différents. Cinq espaces de réponse ont été prévus sous la forme de *tentative* pour amener les élèves à questionner leurs représentations et à les améliorer d'une tentative à l'autre.

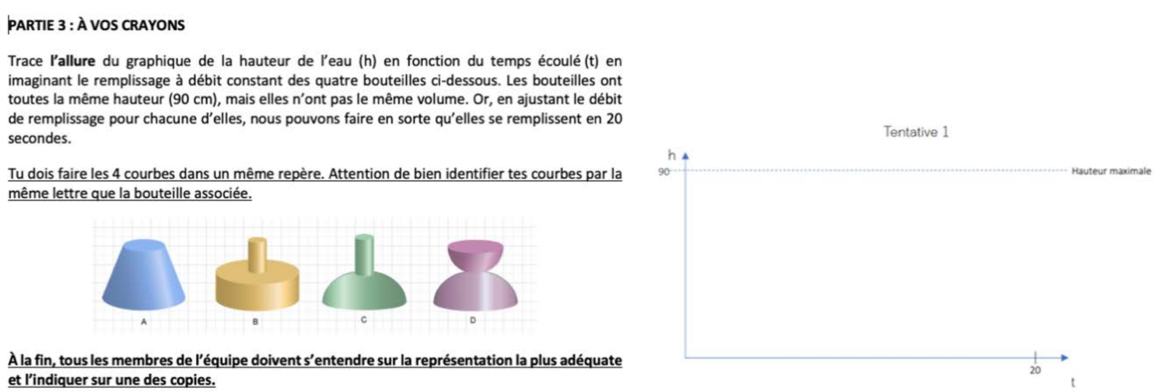
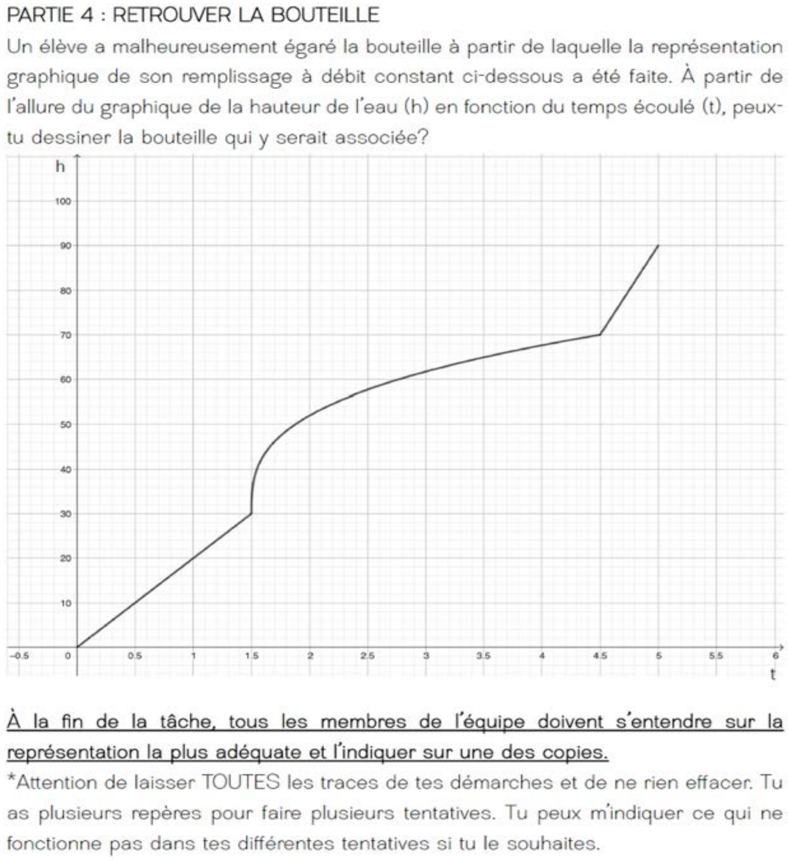


Figure 2 *– Tâche des bouteilles : sous-tâche 3 (Robert, 2024)*

La quatrième sous-tâche porte pour sa part sur l'analyse d'une courbe représentant le remplissage d'une bouteille pour en « retrouver la bouteille » (voir figure 3). Les élèves devaient ainsi interpréter la courbe représentée et dessiner la bouteille sur laquelle s'appuierait la modélisation proposée.


PARTIE 4 : RETROUVER LA BOUTEILLE

Un élève a malheureusement égaré la bouteille à partir de laquelle la représentation graphique de son remplissage à débit constant ci-dessous a été faite. À partir de l'allure du graphique de la hauteur de l'eau (h) en fonction du temps écoulé (t), peux-tu dessiner la bouteille qui y serait associée?

À la fin de la tâche, tous les membres de l'équipe doivent s'entendre sur la représentation la plus adéquate et l'indiquer sur une des copies.

*Attention de laisser TOUTES les traces de tes démarches et de ne rien effacer. Tu as plusieurs repères pour faire plusieurs tentatives. Tu peux m'indiquer ce qui ne fonctionne pas dans tes différentes tentatives si tu le souhaites.

Figure 3 *– Tâche des bouteilles : sous-tâche 4 (Robert, 2024)*

Pour répondre à cette sous-tâche, trois espaces de réponses ont été prévus à titre de tentatives pour pousser ici aussi les élèves à être critiques envers leur dessin de la bouteille et tenter de l'améliorer de tentative en tentative. Le fait de placer la fonction dans un plan quadrillé et gradué donne plus d'indices sur les différentes sections de la bouteille et a pu servir de points de repère pour les discussions.

V. ANALYSE ET RÉSULTATS

Regardons enfin les effets de la prise de conscience progressive des différentes propriétés de la représentation graphique sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle.

1.L'expression graphique du « lentement » et du « rapidement »

Dans la première unité d'analyse (UA-B1.1), Dan et Élisabeth entrent dans la tâche en discutant de leur interprétation des fonctions présentées dans le registre graphique avant d'émettre des hypothèses quant à l'association à faire.

Dan : Ici ça commence lent pis ça va rapidement [il pointe la courbe A]…

Élisabeth : Ouais c'est ça, ça fait comme, ça fait comme… [elle suit la courbe avec son crayon. Elle semble chercher à trouver une manière de qualifier la variation de la courbure]

Dan : …pis ici c'est le contraire, ça commence rapidement pis ça finit lentement [trace la courbe B avec son crayon en même temps].

Nous voyons dans cet extrait que Dan et Élisabeth entrent dans la sous-tâche par l'analyse de la représentation graphique : leur discours et leurs gestes se concentrent sur la compréhension des courbes. Alors qu'Élisabeth tente de donner un sens aux variations dans la courbure, Dan semble vouloir comprendre comment s'expriment graphiquement le « lentement » et le « rapidement » qu'il a déduit du phénomène. À ce moment-ci, ils ne traitent pas encore explicitement la relation avec le remplissage des cônes. L'activité se poursuit et Coralie s'ajoute à la discussion :

Coralie : On pourrait dire comme le 1 commence plus gros, ça va aller…

Élisabeth : Ça va aller plus vite [elle hoche la tête en inspirant, comme si elle était convaincue] [elle regarde Dan comme pour valider].

Dan [la corrige] : Plus lent.

Élisabeth : Ah ouais plus lent.

Coralie [termine son idée] : …ça va moins courber.

Élisabeth [pointe Coralie] : Ouais, moi je dis qu'on prend ça, ça a plus de sens.

Coralie [répète son idée] : Comme le 1 commence plus épais [elle place deux doigts de chaque côté de la base du cône 1], ça va être le B parce que ça courbe moins au début [elle trace en même temps la courbe avec son crayon] et après ça monte comme ça [elle fait référence à la fin de la courbe].

Ici, Coralie cherche à faire un rapprochement entre la largeur (qu'elle appelle grosseur puis épaisseur) du cône et l'allure de la fonction : un plus gros diamètre implique une courbure moins grande. Entre ses deux interventions, son vocabulaire se raffine, passant de « plus gros » à « plus épais », l'ajout de son geste permettant de faire l'inférence avec le diamètre du cône. Le concept de capacité se voit ainsi traduit pour une première fois dans le registre graphique. Il semble que l'étude et leur prise de conscience des subtilités associées aux changements de « courbure » des fonctions représentées ont permis aux membres de cette équipe de formuler des hypothèses de plus en plus précises sur la manière dont le phénomène est traduit graphiquement par la modélisation fonctionnelle et d'associer leur conceptualisation des remplissages aux bonnes courbes.

2.La graduation implicite des axes

Mettant à l'avant-plan Malix, l'UA-B1.5 nous permet de voir comment la prise de conscience de la graduation implicite des axes influence aussi le processus de conceptualisation de la capacité. Cette unité d'analyse apparait alors que les élèves tentent de représenter graphiquement le remplissage des 4 bouteilles différentes dans un même repère (sous-tâche 3). Ici, Malix remet en question l'une de ses tentatives dans laquelle il avait représenté le remplissage de la bouteille B formée d'une superposition de deux cylindres. Dans la tentative en question, Malix a représenté adéquatement chaque partie du cylindre par une fonction affine, mais sans tenir compte de l'emplacement du point de changement de pente qu'il situe alors à 10 secondes et à une certaine hauteur. Dans cet état, ceci signifierait que le remplissage du cylindre du bas de la bouteille nécessite le même temps que le remplissage du cylindre du haut, ce qui est faux.

Malix [s'adressant à la caméra] : Ma ligne du B, je trouve qu'elle dure beaucoup trop vite dans le sens que selon moi, j'ai fait une erreur dans le B parce que ça devrait durer plus de temps, mais là à dure seulement 10 secondes. Mais étant donné qu'ici on va plus vite [pointe le cylindre du haut], je pense pas que ça dure 10 secondes, le petit tuyau de remplissage, donc je pense que je me suis trompé, alors on va recommencer caméra.

Malix se met au travail.

Malix [quelques secondes plus tard] : Donc selon moi, si on fait un petit calcul mental, ça devrait durer 16 secondes pour le remplissage du début du B et à la fin comme ça va monter hyper vite, ça va prendre 4 secondes.

Malix: Ah c'est magnifique ! [inaudible] [il montre son repère à la caméra] plus de temps avec une augmentation de la vitesse vers la fin.

Par l'analyse d'une de ses représentations graphiques, Malix prend conscience de quelque chose cloche. Sa première appréhension de la bouteille semble reposer sur une conception de celle-ci en deux parties de capacités équivalentes, représentant toutefois leur vitesse de remplissage respective par des pentes distinctes. Malix semble alors prendre conscience de la graduation implicite des axes. En effet, bien que les repères de la sous-tâche ne soient pas quadrillés, les axes sont tout de même toujours gradués implicitement. Or, ceci pousse Malix à se questionner puisque sa modélisation mathématique entre en contradiction avec sa compréhension du phénomène. Une réflexion s'amorce alors sur la comparaison du temps nécessaire pour remplir chacune des deux parties de la bouteille, ce qui enclenche des processus de conceptualisation de la capacité par la recherche du temps nécessaire pour le remplissage de chacune de leurs parties. Cette nouvelle conceptualisation de la bouteille et de la segmentation de sa capacité semble permettre à Malix d'estimer que le remplissage du bas de la bouteille « devra durer plus de temps » (Malix, UA-B1.5) que le haut : une estimation qu'il traduit par un rapport 16/4. Par le fait même, son raisonnement évolue s'appuie maintenant sur le temps nécessaire pour remplir les deux parties du cylindre.

3.Le traitement des points de changement de pente comme repères

Enfin, une troisième unité d'analyse est intéressante à présenter ici puisque nous pouvons y entrevoir les effets de la prise de conscience précédente dans la manière dont Malix traite le temps et les points de changements de pente dans son activité sur la sous-tâche 4 qui consiste à retrouver la bouteille (voir figure 3).

Malix [se parlant à lui-même et à la caméra]: Est-ce qu'on voit vraiment une augmentation de la vitesse? Exactement. Étant donné qu'on voit une augmentation de vitesse [entre la première partie de la fonction et la dernière partie], à partir du début et la fin, ça veut dire que la fin doit être plus petite que le début.

Dan: Non c'est pas comme ça!

Malix : Ben oui! Oui! Étant donné que ici [pointe la première partie de la fonction] ça dure 1 seconde et demie [1,5 seconde] alors que ici [pointe la troisième partie de la fonction] ça dure point 5 seconde [0,5 seconde]. Ce qui fait que ... [Il est interrompu par Coralie qui lui montre l'une de ses tentatives].

[…]

Malix: Non, mais regardez [il s'adresse maintenant à tous les membres de l'équipe]! Ici ça dure 1,5 seconde (inaudible)... Ça veut dire que le bouchon de la fin [il fait référence à la base supérieure du cylindre du haut de la bouteille] versus le début, doit être le un tiers [1/3], ouais plus petit genre de 66%.

Depuis ses découvertes dans l'unité d'analyse précédente, Malix ne traite plus les représentations graphiques de la même manière. En effet, dans cette unité d'analyse, nous pouvons voir que Malix fait référence explicitement au temps nécessaire pour le remplissage de chaque partie de la courbe dès le départ. En s'appuyant sur les intervalles de temps pour les deux parties affines de la fonction, il transpose son interprétation du registre graphique vers la conceptualisation de la bouteille. Il est intéressant ici de noter que d'emblée, Malix traite les différentes parties de la bouteille séparément. Il semble donc se fier aux points de changement de pente pour déterminer que la bouteille aura 3 parties. Notons toutefois que ces points ne sont pas conceptualisés comme des couples de coordonnées puisque Malix ne considèrera pas la hauteur dans ses réflexions. Pour le moment, ces points semblent donc être perçus comme des repères qui expriment une transition.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Par leur travail avec la représentation graphique dans les différentes sous-tâches, nous avons pu voir émerger chez les élèves diverses hypothèses relatives aux manières d'interpréter les courbes. Ces hypothèses, notamment celles qui sont relatives à l'expression graphique du « lentement » et du « rapidement », ont permis aux élèves de donner un sens aux variations dans la courbure. Elles ont ainsi joué un rôle dans le déploiement de la pensée fonctionnelle puisqu'elles agissaient en quelque sorte comme un point de départ des réflexions, obstruant ou favorisant le passage vers une prise de conscience de certaines propriétés de ce registre. Concrètement, l'UA-B1.5 nous permet de voir comment la prise de conscience de la graduation des axes du graphique cartésien a influencé le processus de conceptualisation lié au concept de capacité. En effet, à la suite de cette prise de conscience, Malix remet en question ses tentatives et fait une nouvelle hypothèse qui s'ancre dans cette manière de voir la représentation graphique et qui s'appuie sur une comparaison entre le temps nécessaire pour remplir chacune des deux parties de la bouteille.

Dans le même ordre d'idées, l'étude des points de changements de pente de la représentation graphique a trouvé son utilité dans le passage entre la représentation graphique et la représentation figurale des différentes parties des bouteilles identifiées par les élèves, plus particulièrement dans la sous-tâche 4. Dans les données présentées, nous avons pu voir Malix utiliser ces points pour identifier des transitions entre différentes parties de la bouteille à représenter. Les différentes prises de conscience présentées dans les pages qui précèdent ont donc aussi mené à des développements au regard des raisonnements qui ont été amenés à évoluer par la prise en charge de ces évolutions au niveau conceptuel. Nous pouvons donc voir ici comment *représenter, conceptualiser* et *raisonner* sont des manières d'agir et de réfléchir qui entretiennent des rapports dialectiques.

En conclusion, comme le stipule la thèse de Robert (2024) nous croyons qu'un travail continu avec le registre graphique à travers les différentes sous-tâches aura permis à ces élèves de prendre progressivement conscience des propriétés de ce registre et de faire émerger de nouvelles manières d'interpréter le phénomène à l'étude. Ceci nous amène donc à renchérir sur les idées de Yavuz (2010) : comprendre les différentes propriétés d'une fonction nécessite de s'approprier ses différentes représentations (dont la représentation graphique) et cette appropriation peut se faire progressivement dans des activités qui permettent un réel travail sur les relations fonctionnelles impliquées dans les phénomènes étudiés. « Le registre graphique n'est donc pas seulement un médium à travers lequel est représentée la réponse d'une tâche : *représenter* s'inscrit au cœur de l'activité et agit directement sur les autres manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle » (Robert, 2024, p. 190). Pour nous, cette analyse de l'activité de ces quatre élèves permet de bien mettre en lumière l'importance des expériences qui permettent aux élèves de s'initier progressivement à un nouveau registre de représentation et d'en apprivoiser peu à peu les propriétés. Celles-ci semblent être bénéfiques non seulement pour leur compréhension du registre en question, mais bien pour le développement général des manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle.

RÉFÉRENCES

BEN NEJMA, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 38-69.

BLANTON, M. et KAPUT, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *In* J. Cai et E. Knuth (éd.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 5-23). Springer.

BLANTON, M., BRIZUELA, B.-M., GARDINER, A., SAWREY, K. et NEWMAN-OWENS, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

CARLSON, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education, 7*, 114-162.

CARLSON, M., JACOBS, S., COE, E., LARSEN, S. et HSU, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi:10.2307/4149958

CARRAHER, D. et SCHLIEMANN, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* 669–705.

CHARRIÈRE, G. (1995). *L'algèbre: mode d'emploi.* Fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

GÜNSTER, S. et WEIGAND, H.-G. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM*, *52*, 1259-1274.

HEID, K. (2003). Theories for thinking about the use of CAS in teaching and learning mathematics. *In* J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin et R. M. Zbiek (éd.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (p. 33-52). National Council of Teachers of Mathematics.

LENOIR, Y. (dir.), ZAID, A., MAUBANT, P., HASNI, A., LAROSE, F. et LACOURSE, F. (2018). Guide d'accompagnement de la formation à la recherche : un outil de réflexion sur les termes et expressions liés à la recherche scientifique. Éditions Cursus universitaire. (Ouvrage original publié en 2012)

PASSARO, V. (2015). Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans. Thèse de doctorat, Université de Montréal. Papyrus. http://hdl.handle.net/1866/13509

PASSARO, V., SABOYA, M. et VENANT, F. (2023). Émergence de signes personnels chez des élèves de 3e secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *1*(2), 66-105.

PINTO E. et CAÑADAS, M. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra, *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 113-134.

POWELL, A. B., FRANCISCO, J. M. et MAHER C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405–435.

RADFORD, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 53-87.

RADFORD, L. (2021). The Theory of Objectification, a Vygotskian Perspective on Knowing and Becoming in Mathematics Teaching and Learning. Brill.

RADFORD, L. (2022). Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques. Dans C. Houdement, C. Hache, et C. de Hosson (dir.), *Sémiotique et apprentissages scientifiques* (p. 245-280). ISTE Editions.

RADFORD, L. et SABENA, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian SemioticApproach. *In* A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, et N. Presmeg (éd.) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

RENÉ DE COTRET, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, *17*, 5-27.

ROBERT, V. (2018). Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique. Mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

ROBERT, V. (2024). La pensée fonctionnelle : une analyse multisémiotique de l'activité d'enseignement-apprentissage visant son déploiement avant l'introduction formelle du concept de fonction. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/21653

SQUALLI, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In L. Theis (éd.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque de l'espace mathématique francophone (p. 206-219). Université d'Alger.

THOMPSON, P. W. et HAREL, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM*, *53*, 507-519.

YAVUZ, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 467-485.

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

UM6P University Mohammed VI Polytechnic

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Niger : cartographier l'alignement des politiques d'apprentissage

Moussa Mohamed Sagayar[34]

École Normale Supérieure Université Abdou Moumouni Niamey Niger

Résumé - La cartographie des programmes d'études au primaire en mathématiques repose sur l'importance des compétences fondamentales en mathématiques pour le développement éducatif futur des élèves. L'objectif de notre travail est d'explorer le niveau d'alignement du contenu des quatre intrants pédagogiques : le programme scolaire officiel ou curriculum, les manuels scolaires des élèves, le soutien pédagogique aux enseignants ; tel que les guides de l'enseignant et enfin, les évaluations des apprentissages. L'article analyse les compétences fondamentales en mathématique et les résultats scolaires globaux des apprenants. Il met en regard ces quatre éléments clés pour étudier la possibilité de maximiser l'apprentissage. Le travail de recherche conclut que l'alignement de ces quatre intrants pédagogiques offre aux élèves une expérience d'apprentissage des mathématiques cohérente et systématique, et les possibilités de développer des compétences fondamentales en mathématiques sont façonnées par le degré d'alignement des quatre intrants.

I. INTRODUCTION

Enseigner les mathématiques repose souvent sur des compétences de l'enseignant. Il doit s'assurer que les programmes de mathématiques offrent des situations d'apprentissage qui permettent aux élèves de développer des aptitudes qui explicitent les connaissances mathématiques en lien avec les tâches proposées mieux appréhender les savoirs en jeu.

Les enseignants doivent également se préoccuper de la façon dont ils pensent et font les mathématiques dans leurs classes, et comment ils développent leurs connaissances et leurs pratiques d'enseignement en mathématiques (Liping Ma, 1999).

Dans ses pratiques de classe, l'enseignant interagit avec le curriculum et les manuels qui sont mis à disposition pour organiser ses enseignements et permettre aux élèves d'apprendre. Mohamed Sagayar, M & Gueudet, G. (2021) La compréhension des fondements mathématiques, c'est-à-dire la compréhension des idées fondamentales sous-jacentes aux mathématiques de base qui rend les enseignants plus aptes à produire des prédispositions sur le contenu des connaissances mathématiques « *content knowledge* » et leur capacité à modéliser des situations sur la base de la

[34] Sagayar, M. M. (2024). L'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Niger : cartographier l'alignement des politiques d'apprentissage. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – Affiche pp. 208-218.

maîtrise des connaissances mathématiques spécifiques « *pedagogical content knowledge* » Shulman (2007).

Les mathématiques élémentaires sont le fondement de base pour les futurs apprentissages mathématiques des élèves de l'école primaire. Les interactions entre les connaissances mathématiques sont perceptibles, avec des liens pertinents et structurés chez les enseignants qui centrent l'apprentissage des élèves sur la « manipulation » et le « concret » montrant une certaine déconnexion des procédures les unes par rapport aux autres (Sagayar, 2011).

Les programmes d'étude offrent aux enseignants des contenus spécifiques pour organiser les enseignements et les apprentissages des mathématiques en respectant un certain alignement curriculaire dans les pratiques d'enseignements/apprentissages, le contenu des manuels (guide de l'enseignant, manuel de l'élève) et les évaluations des apprentissages.

Pour mieux appréhender l'alignement curriculaire, il faut le considérer comme un processus visant à assurer la cohérence et la compatibilité entre les résultats attendus tels que spécifiés dans le programme officiel et les méthodes d'enseignement, les tâches d'évaluation et les activités d'apprentissage en classe. Autrement, c'est une analyse de la mise en cohérence des programmes scolaires en adéquation avec les pratiques éducatives et l'évaluation des apprentissages. C'est finalement étudier l'alignement des contenus avec les politiques et stratégies nationales dans les espaces d'enseignement-apprentissage. (UNESCO-IBE,2013). Pour mettre en évidence notre problématique, il est important de se poser les questions suivantes : Quel est le niveau d'alignement entre les directives ministérielles et les pratiques pédagogiques observées dans les écoles primaires du Niger ? Dans quelle mesure les manuels et les ressources pédagogiques disponibles au Niger sont-ils conformes aux objectifs des programmes scolaires en mathématiques ? Comment les enseignants des écoles primaires au Niger adaptent-ils les programmes officiels aux réalités locales et aux besoins spécifiques de leurs élèves ? Existe-t-il des divergences entre les attentes officielles des politiques éducatives et la réalité de l'enseignement des mathématiques en classe, notamment en termes de contenu et de méthodologie ?

Notre travail de recherche se situe dans une triple dimension :

- Explorer le niveau d'alignement du programme scolaire officiel ou curriculum, des manuels scolaires des élèves, et le soutien pédagogique aux enseignants.
- Analyser les compétences fondamentales en mathématique et les résultats scolaires globaux des apprenants.
- Mettre en regard ces quatre éléments clés pour étudier la possibilité de maximiser l'apprentissage.

Dans le cadre cet article nous abordons la cartographie des programmes d'études au primaire en mathématiques sur le cas spécifique du cours élémentaire première année (en abrégé CE1) pour analyser l'importance des compétences fondamentales en mathématiques pour ce niveau scolaire. La première partie du texte est consacrée au contexte actuel du cadre d'orientation curriculaire au Niger. Le programme scolaire officiel ou curriculum, les manuels scolaires des élèves, le soutien pédagogique aux enseignants, et les compétences fondamentales en mathématique sont explicités. La deuxième partie est destinée à la cartographie et son processus de mise en œuvre. La troisième partie porte sur une étude cas de la cartographie du manuel et du guide de l'élève mathématiques CE1.

II. CONTEXTE ACTUEL DU CADRE D’ORIENTATION CURRICULAIRE AU NIGER

Le système éducatif nigérien est régi par la Loi d’Orientation du Système Éducatif (LOSEN) loi **n° 98-12** du 1er juin 1998. La loi détermine les principes fondamentaux qui régissent le Système éducatif au Niger. On entend par système éducatif l'ensemble constitué par les instances d'initiative et de conception, les structures de planification, de production et de gestion, ainsi que les établissements d'enseignement et de formation qui concourent en interrelation à la transmission des savoirs, des savoir-faire et des savoir être. La mise en œuvre de la LOSEN repose un programme d’enseignement au primaire qui a pour finalités et objectifs :

« Les programmes n'ont pas seulement pour rôle de préciser les notions à enseigner, les portions de savoir à étudier dans l'année. Ils ont surtout l'ambition d'être à la fois utilitaires et éducatifs Il s'agit d'une pédagogie par l'action qui vise à instruire en intéressant, en faisant agir par l'observation, l'enquête, le classement, en confectionnant des objets, en produisant. Il s'agit d'une pédagogie qui ne réduira pas l'élève au rôle purement réceptif qui lui était trop souvent réservé ». (LOSEN, 1998, Article 1)

On voit bien que le programme d’enseignement donne des orientations sur les méthodes d’enseignement et précise les compétences à développer par l’enseignant à la fin de son cursus primaire.

L’enseignement des mathématiques à l’école primaire au Niger peut se comprendre dans le programme de l’enseignement du premier degré. On peut lire ainsi que :

« Les activités mathématiques ont un double objectif : d'une part favoriser une bonne structuration mentale, d'autre part donner aux élèves un outil utilisable dans les situations diverses qu'ils rencontrent au cours de leur existence. Dans cette perspective, elles constituent une discipline irremplaçable pour la formation de l'esprit, car l'acquisition de certaines structures mathématiques est essentielle pour le développement de l'intelligence. L'enseignement sera centré sur l'élève qui participera aux leçons par des manipulations conduisant au savoir-faire et à la découverte ». (Programme de l’Enseignement du premier Degré, 1996).

Ici, les méthodes et techniques d’enseignement sont au cœur des situations d’enseignement, avec une articulation avec l’organisation de la classe favorisant les interactions et la mise à disposition des ressources dans le milieu d’apprentissage.

L’accent est mis sur le développement mental de l’élève à travers des situations de manipulation et de découverte. On peut voir une focalisation prégnante des apprentissages dans les situations d’enseignement et d’apprentissage en mathématiques. On note également une manipulation systématique pour expliquer une technique opératoire :

> La connaissance des professeurs de cette matière était non seulement corrélée avec leurs espérances de l'apprentissage des élèves, mais également avec leurs approches d'enseignement. En discutant de la manière dont ils enseigneraient la matière, tous les professeurs se réfèrent à la manipulation, excepté un professeur. Le matériel le plus populaire était les paquets de bâtonnets (bâtonnets de « popsicle », des pailles, ou d'autres sortes de bâtonnets). Les professeurs disent que l’expérience provient de l’apprentissage sur le tas, les manipulations seraient mieux que juste dire la manière dont les matières avaient été enseignées. (Liping Ma,1999, p.4)

Pour comprendre l'importance des compétences fondamentales en mathématiques pour le développement éducatif futur des élèves, il est important de décrire la cartographie et son processus de mise en œuvre. Pour tenter de décrire le processus, il est crucial de regarder une pratique de l'UNESCO sur l'apprentissage fondamental en Afrique qui vise à favoriser l'apprentissage par les pairs et le dialogue sur les politiques aux niveaux national et continental pour améliorer l'achèvement de l'enseignement primaire et l'apprentissage fondamental en lecture et en mathématiques. Cette dimension fait l'objet de la section qui suit.

III. CARTOGRAPHIE ET PROCESSUS ET PROCESSUS DE MISE EN ŒUVRE

La précision importante à faire, c'est de dire nous sommes acteurs de ce processus à travers une ingénierie coopérative chercheurs et responsables pédagogiques.

L'UNESCO (2023) publie des rapports sur le suivi de l'éducation en Afrique. C'est ainsi que : La série de rapports Spotlight est envisagée comme un cycle en trois parties. Chaque cycle se concentre sur une douzaine de pays, dont cinq à six sont analysés plus en profondeur aboutissant à un rapport pays élaboré par une équipe de recherche pays et validé par des responsables de haut niveau. Les rapports nationaux, ainsi que d'autres études de cas nationales et documents d'information, conduisent au rapport continental. Le Niger avec bien d'autres pays est concerné par le rapport national sur les processus existants du secteur de l'éducation. Ce rapport vise à fournir aux responsables de l'éducation des recommandations fondées sur des preuves et des diagnostics convaincants pour contribuer à une compréhension commune des principaux défis de l'enseignement primaire. (UNESCO, 2023).

Le processus de cartographie obéit à un processus comportant cinq étapes. Elles sont présentées ci-dessous et détaillées dans la figure ci-après :

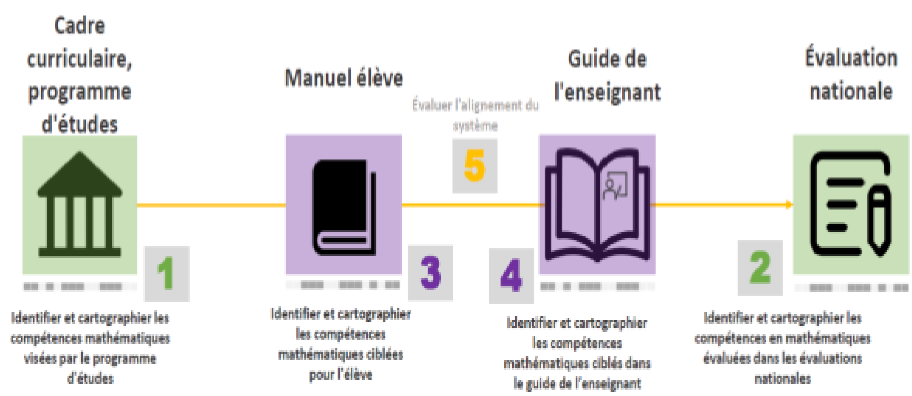


***Figure 1** : processus de cartographie*

L'étape 1 consiste à cartographier le cadre curriculaire national ou le programme d'études pour déterminer de manière explicite les compétences mathématiques que les élèves doivent acquérir à la fin d'un niveau scolaire, dans le cas présent à la fin de la troisième année. L'objectif étant

L'étape 2 cartographie le cadre national d'évaluation et les éléments d'évaluation nationaux pour déterminer les compétences mathématiques dans les évaluations nationales

L'étape 3 procède à la cartographie des manuels scolaires des élèves pour identifier les compétences mathématiques abordées dans les activités d'apprentissage ciblées pour les élèves et les difficultés cognitives

L'étape 4 cartographie les guides de l'enseignant et se concentrera sur la nature des ressources et des soutiens pédagogiques fournis dans les manuels scolaires. Elle identifie les compétences mathématiques ciblées dans le guide de l'enseignant.

A l'issue de ces quatre étapes, les questions suivantes sont candidates à des analyses :

- Dans quel mesure le manuel aborde-t-il tous les résultats d'apprentissage du programme ? (le degré d'alignement de vue du contenu ?)
- Quel est le pourcentage de temps (pondération) alloué aux différents domaines, constructions et sous-constructions (thèmes, etc.) du programme d'études ?
- Quels types de leçons sont-ils inclus dans le manuel (leçons à thème unique, leçons à thèmes multiples (révision) ?
- et des questions auxquelles les codages ont répondu : (Est-ce une question ? pas clair)
- Quels types d'activités sont-ils inclus dans les leçons du manuel ? (Explications narratives, explications graphiques, exemples travaillés, exercices ou problèmes, activités d'apprentissage)
- Quels sont les niveaux cognitifs visés par les activités ? (Quelle est la pondération des activités, par niveau cognitif ? Par domaine ? Par constructions et sous-constructions).

Pour une idée concrète du processus de cartographie, nous allons dans la section qui suit présenter les résultats d'étude cas de la cartographie du manuel et du guide de l'élève mathématiques CE1.

IV. UNE ÉTUDE CAS DE CARTOGRAPHIE DU MANUEL ET DU GUIDE DE L'ÉLÈVE MATHÉMATIQUES CE1

C'est à travers une ingénierie coopérative chercheurs et responsables pédagogiques que la cartographie s'est réalisée. Rappelons des éléments de sémantique sur ce que c'est qu'une ingénierie coopérative dans le cadre de ce travail.

Pour élargir notre connaissance de la coopération, il est nécessaire de définir le concept de coopération. De plus en plus des individus décident de travailler ensemble ou cherche à mettre en place des modalités d'assemblage de compétences individuelles pour s'organiser et produire collectivement (Feron, 2001). Ils s'intéressent de plus en plus à la coopération, cette forme de travail collaboratif qui consiste à associer plusieurs acteurs autour d'une thématique bien donnée, pour ensuite devenir une communauté d'apprentissage. On voit bien que l'idée d'échanges et de processus de construction apparaissent comme facteurs clés dans un dispositif coopération. Larroche, V. (2018)

Le concept de coopération s'inscrit dans la logique de relation entre acteurs dans une organisation pour construire de la connaissance. Zarifian (1999) par exemple le définit comme :

> Le fait de « travailler ensemble, développer tout espace d'intersubjectivité, c'est-à-dire une compréhension réciproque et des accords solides sur la nature des problèmes à traiter et des avoirs à développer, l'identité des objectifs, le sens

> donné aux actions et la convergence des mobiles des individus qui agissent ensemble (qui est beaucoup plus que la simple convergence des actes).

A partir de ce rappel, on peut voir ici que ce travail collaboratif a associé chercheurs en sciences de l'éducation (étude du curriculum) spécialisés en didactique des mathématiques (contenus et savoirs mathématiques, en sciences du langage (didactique des langues) spécialisés en analyse de contenu de manuels et encadreurs pédagogiques (ici Conseillers Pédagogiques de l'école primaire) dans une perspective commune pour passer en revue les principaux documents et décrire les principales caractéristiques du système qui soutient l'apprentissage de base afin de cartographier des documents clés (curriculum, manuels, guide de l'enseignant, cadre national d'évaluation). Gueudet, G., Trouche, L. (2008)

Pour l'organisation du travail, il y a eu une répartition des tâches comme suit dans trois champs spécifiques : la revue de la littérature sur les politiques en matière d'enseignement-apprentissage des mathématiques, une cartographie des curriculums et des manuels, la collecte des données sur les pratiques de classes.

Un aperçu des résultats suivant les quatre étapes du processus de cartographie :

- Etape 1 : cartographie du cadre curriculaire

Tableau 1 : un extrait du cadre curriculaire du manuel de CE1

Compétence dans le programme national	Compétence telle que libellée dans le programme national	Domaine	Sous-concept	Compétence/savoir (CMC)	Compétence CMC la plus proche	Alignement
1.1.a	La règle et son utilisation (pour tracer des segments)	G. Géométrie	G.1.1 Identifier et décrire des figures et des formes	G.1.1.1 Reconnaître et nommer les formes de base régulières et irrégulières et les lignes en fonction de leur forme.	G.1.1.1.4X	Non
1.1.b	Le triangle : Reconnaissance	G. Géométrie	G.1.1 Identifier et décrire des figures et des formes	G.1.1.1 Reconnaître et nommer les formes de base régulières et irrégulières et les lignes en fonction de leur forme.	G.1.1.1.1	Partiel

1.1.c	Le triangle, tracé	G. Géométrie	G.1.1 Identifier et décrire des figures et des formes	G.1.1.1 Reconnaître et nommer les formes de base régulières et irrégulières et les lignes en fonction de leur forme.	G.1.1.1 . 5X	Non

Le tableau 1 montre les compétence/item tel que libellé dans l'évaluation nationale, les points de pondération, et le niveau de complexité cognitive.

On peut dire pour l'ensemble des trois compétence (1.1.a, 1.1.b, 1.1.c) que la règle et son utilisation (pour tracer des segments) permettent d'identifier et décrire des figures et des formes, et de conclure que cela revient à reconnaître et nommer les formes de base régulières et irrégulières ainsi que les lignes en fonction de leur forme, se construit autour de plusieurs éléments clés de la didactique des mathématiques, en particulier dans le cadre de l'enseignement des notions géométriques à l'école primaire.

L'acte de nommer et reconnaître les formes géométriques régulières (cercle, carré, triangle, etc.) et irrégulières (formes asymétriques ou polygones irréguliers) est un élément fondamental de la compréhension géométrique à l'école primaire. À travers l'utilisation de la règle, les élèves sont amenés à tracer des figures géométriques et à en identifier les propriétés : nombre de côtés, symétrie, angles, etc. Cet apprentissage va au-delà de la simple reconnaissance des formes et implique une compréhension de leurs caractéristiques.

- Etape 3 : cartographie des manuels scolaires des élèves

Tableau 2 : extrait d'une cartographie du manuel de mathématique de l'élève

# Unité	Titre de l'unité	#Leçon	Titre de la leçon	Type de leçon (Thème unique/ thèmes multiples)	# Bloc	Type d'activité (5 types)	Page(s)	Libellé du bloc	Compétence telle que libellé dans la cartographie nationale
L	Logique et Raisonnement (L/R)	1	Des bulles aux parenthèses	Unique	1	Exemple travaillé	57	J'obtiens des parenthèses	Parenthèses
L	Logique et Raisonne	1	Des bulles aux	Unique	2	Exercices et	57	Transforme les	Parenthèses

	ment (L/R)		parenthèses			problèmes		bulles en parenthèses	
L	Logique et Raisonnement (L/R)	1	Des bulles aux parenthèses	Unique	3	Narrative	57	quand j'ai…	Parenthèses

On peut lire dans le tableau 2 des informations sur le manuel, en ce qui concerne le chapitre, le numéro et le titre de la leçon, et les types d'activités proposées aux élèves.

L'analyse d'un chapitre intitulé "Logique et Raisonnement" et d'une leçon sur "Des bulles aux parenthèses", particulièrement lorsqu'on travaille à partir d'un exemple concret pour obtenir des parenthèses, offre une riche perspective sur le développement des compétences en raisonnement logique et en mathématiques. Les deux exercices suivants sont des exemples concrets extraits du guide de l'instituteur mathématiques CE1 page 74.

2.2.1 Transformation de « bulles » en parenthèses

Le maître écrira plusieurs expressions « par bulles ». Les élèves les reproduisent sur leurs ardoises, et changent les « bulles » en parenthèses par effacement, comme au **§ 2.1** (PLM).

Exemples : $43 + 13 \; - \; 21 - 6 \longrightarrow (43 + 13) - (21 - 6)$

$43 + 13 \; - 21 \; - 6 \longrightarrow ((43 + 13) - 21) - 6$

2.2.2 Transformation de parenthèses en « bulles »

* C'est l'exercice inverse : il s'agit de « compléter les bulles ». Le maître passera progressivement d'exercices très simples à des exercices un peu plus compliqués.

Exemples : $55 - (8 + 17) \longrightarrow 55 - \; 8 + 17$

$(158 - 16) + (31 + 25) \longrightarrow 158 - 16 \; + \; 31 + 25$

Figure 2 : exemples d'activités sur les bulles et les parenthèses

En utilisant des bulles, les élèves sont probablement invités à identifier des ensembles d'éléments ou des parties d'expressions à traiter ensemble. Les bulles deviennent alors un précurseur conceptuel des parenthèses, qui marquent des regroupements d'opérations dans des expressions algébriques. L'utilisation des bulles comme métaphore visuelle facilite la compréhension des parenthèses, qui ont une fonction similaire en mathématiques : délimiter un ensemble d'opérations devant être réalisées avant d'autres. Cette démarche vise à rendre plus accessible un concept abstrait (les parenthèses) à travers une représentation visuelle et concrète (les bulles).

- Etape 4 : cartographie du guide de l'enseignant

Tableau 3 : extrait de la cartographie du guide de l'enseignant

#Chapitre	Titre du chapitre	# Leçon	Titre de la leçon	Type d'activité (5 types)	Page(s)	Libellé du bloc	Libellé de la compétence	Compétence tel que libellé dans la cartographie nationale
G	Géométrie	1	Séances préliminaires en EPS	Activité d'apprentissage	10	Reconnaissance gauche droite	se déplacer selon un itinéraire	Activités sur quadrillage (itinéraires)
G	Géométrie	1	Séances préliminaires en EPS	Activité d'apprentissage	11	Repérage de la gauche et la droite d'un camarade	se déplacer selon un itinéraire	Activités sur quadrillage (itinéraires)
G	Géométrie	1	Séances préliminaires en EPS	Activité d'apprentissage	11	Manœuvres	se déplacer selon un itinéraire	Activités sur quadrillage (itinéraires)

La cartographie du guide l'enseignant présente les mêmes informations que le manuel de l'élève, mais comporte en plus le chapitre et le titre du chapitre.

Un chapitre de géométrie portant sur des séances préliminaires en EPS pour la reconnaissance gauche-droite, qui vise à se déplacer selon un itinéraire et aboutit sur des activités sur quadrillage (itinéraires), implique un croisement intéressant entre la géométrie, le raisonnement spatial et les compétences motrices. Cette approche pédagogique permet de travailler à la fois sur les compétences de reconnaissance spatiale (gauche/droite) et sur l'orientation géométrique (se déplacer sur un quadrillage).

La reconnaissance de la gauche et de la droite est la première étape avant de travailler des concepts géométriques plus complexes tels que les orientations, les axes de symétrie, ou encore les mouvements dans l'espace. Cela introduit les élèves à des notions essentielles comme les vecteurs ou les coordonnées géométriques, même si ces concepts ne sont pas encore formalisés.

L'introduction au repérage sur un quadrillage est une représentation géométrique simple, mais puissante. Elle permet aux élèves de se familiariser avec des coordonnées et de comprendre la notion de déplacement dans l'espace. En suivant des itinéraires sur un quadrillage, les élèves pratiquent à la fois leur reconnaissance des directions (haut, bas, gauche, droite) et leur sens de l'orientation.

C'est également un jeu de repérage et de déplacement sur du quadrillage qui permet de travailler sur des itinéraires précis, où chaque case du quadrillage représente un déplacement spécifique. Par exemple, on peut donner aux élèves un itinéraire sous forme de séquences de déplacements (ex. : « avancer de deux cases, tourner à gauche, puis avancer de trois cases »), ce qui nécessite de comprendre et d'appliquer des notions géométriques tout en développant leur capacité à suivre un plan.

V. CONCLUSION

Le travail de cartographie abordé dans cet article offre de nombreuses possibilités aux autorités politiques de travailler sur l'analyse et la constitution d'une référence ou une échelle commune, sous la forme d'une définition commune des connaissances et des compétences minimales en mathématiques que les élèves doivent démontrer à des moments clés de leur parcours d'apprentissage. C'est une occasion probante d'identifier pour chaque domaine, les connaissances et/ou compétences clés visées, par niveau d'études, par composante ou sous-composante pour décrire ce que peut faire un élève du niveau de performance « atteint le niveau minimum » en mathématique.

En ce qui concerne l'utilisation de la règle pour tracer des segments et d'autres figures géométriques, ainsi que la capacité à nommer et reconnaître ces figures, est à la fois une activité technique et un processus cognitif essentiel pour la construction des concepts géométriques à l'école primaire. Les élèves doivent être capables de mettre en lumière l'importance de l'outillage (ici, la règle) dans la matérialisation des concepts abstraits et dans la création d'une base solide pour la compréhension de la géométrie. En cela, la reconnaissance des formes de base régulières et irrégulières devient un point de départ pour des apprentissages plus approfondis, liés à la logique et aux propriétés des objets géométriques.

Les activités mathématiques sur les bulles et les parenthèses constituent une approche méthodologique et pédagogique astucieuse pour introduire un concept essentiel en mathématiques : l'ordre des opérations. En reliant un élément visuel concret (les bulles) à un symbole mathématique formel (les parenthèses), les élèves sont non seulement guidés vers la compréhension des règles de priorité des opérations, mais sont aussi amenés à développer des compétences en raisonnement logique. Cela prépare les bases pour une pensée mathématique plus complexe, tout en faisant un pont entre intuition visuelle et formalisation symbolique.

Les leçons proposées dans le manuel intègrent la reconnaissance des directions et le déplacement sur un quadrillage, constitue une approche intégrée et dynamique de la géométrie. Elle permet de développer à la fois des compétences motrices, des compétences géométriques et un raisonnement spatial. En combinant l'EPS et la géométrie, elle permet aux élèves de comprendre des concepts géométriques de manière concrète et active, en les appliquant dans des situations réelles et physiques. C'est une manière ludique et efficace d'introduire des notions géométriques de base tout en stimulant la réflexion logique et spatiale.

Pour réussir un tel travail d'analyse de l'alignement des politiques d'enseignement de mathématiques, il est important de bien penser dans sa forme, la coopération entre les différentes parties prenantes. Celle-ci repose sur la capacité de travailler avec divers acteurs autour d'une compréhension mutuelle, telle une pédagogie de la coopération au sens de Gamble (2002, p.199).

RÉFÉRENCES

FERON, M. (2001). NTIC et apprentissage de la coopération. *Actes du 12ème congrès de l'AGRH, 1*, 542-557.

GAMBLE, J. (2002). Pour une pédagogie de la coopération. *Éducation et francophonie, 30*(2), 188–219. https://doi.org/10.7202/1079531ar

GUEUDET, G., Trouche, L. (2008) Vers de nouveaux systèmes documentaires pour les professeurs de mathématiques ? In Bloch, I. et Conne, F. *Actes de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques*, Saint-Livrade, 2007.

LARROCHE, V. (2018). *Le dispositif : un concept pour les sciences de l'information et de la communication*. Londres : ISTE Editions Ltd. ISBN 978-1-78405-506-6.

MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teacher's understanding of Fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah : Lawrence Erlbaum.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE, DE L'ALPHABÉTISATION, DE LA PROMOTION DES LANGUES NATIONALES ET DE L'EDUCATION CIVIQUE (2019). *Programmes de l'Enseignement du Premier degré rénové.*

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DU NIGER. (1990) *Programmes de l'Enseignement du Premier degré, I.N.D.R.A.*P. Niamey : Editions Médis.

SAGAYAR, M., (2011). *Action du professeur et pratiques de formation : analyses en classes de cours préparatoires et dans une cellule d'animation pédagogique, dans le contexte du Niger*. Doctorat inédit en sciences de l'éducation, Université Rennes 2, Rennes, France.

SAGAYAR, M & Gueudet, G. (2021). Des manuels à la mise en œuvre en classe : le cas de l'addition au Niger. *Grand N, (107*), 29-52.

SHULMAN, L. S. (2007). Ceux qui comprennent : le édveloppement de la connaissance dans l'enseignement. *Education & Didactique, 1(1)*, 97-114. Traduction de Shulman, L. S. (1986). Those who understand : Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

UNESCO-IBE (2013) *À propos du curriculum et de son importance*, https://unesdoc.unesco.org › ark: › pf0000223058_fre (Consulté le 10.12.2023)

UNESCO (2023) *Rapports « Pleins feux» portant sur l'achèvement de l'éducation de base et les apprentissages fondamentaux en Afrique*

ZARIFIAN, P. (1999). *Objectif Compétence. Pour une nouvelle logique*. Editions Liaisons, pp.229. https://shs.hal.science/halshs-00438955v1

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

University Mohammed VI Polytechnic

Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre

Hassane Squalli[35] , Adolphe Adihou

Université de Sherbrooke

Ridha Najar

Université du Québec en Abitibi Témiscamingue

Résumé - Cette contribution présente une étude internationale financée par le programme APPRENDRE de l'Agence universitaire de la francophonie et visant à dresser un état de la situation de la transition entre l'enseignement de l'arithmétique au primaire et l'enseignement de l'algèbre au collège au Bénin, au Maroc et en Tunisie en vue de comprendre la manière dont le système d'enseignement de chacun des trois pays prépare ses élèves à l'entrée à l'algèbre. Les assises conceptuelles de la recherche s'appuient sur l'analyse praxéologique de la TAD, des travaux de recherche du domaine early algebra et sur un modèle praxéologique de référence originale. Les analyses ont porté sur le savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans les programmes et les manuels scolaires de chaque pays ; sur les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans la résolution des problèmes de comparaison et de généralisation ainsi que sur les connaissances pour enseigner des enseignants du primaire et du collège en regard d'activités de résolution des problèmes de comparaison et de généralisation. Après avoir présenté quelques résultats de cette recherche nous formulerons des recommandations pour améliorer la transition arithmétique-algèbre.

I. PASSAGE DE L'ARITHMÉTIQUE DU PRIMAIRE À L'ALGÈBRE DU COLLÈGE : ENJEU DE LA TRANSITION ÉCOLE-COLLÈGE AU BÉNIN, MAROC ET TUNISIE

Au Bénin, au Maroc et en Tunisie, en ce qui concerne les mathématiques, la transition de l'école primaire au collège est marquée essentiellement par la transition de l'enseignement de l'arithmétique à celui de l'algèbre. En effet, l'arithmétique occupe la majeure partie du temps alloué à l'enseignement des mathématiques au primaire, alors que l'enseignement de l'algèbre commence d'une manière explicite en première année du collège.

---

[35] Squalli, H., Adihou, A. & Najar, R. (2024). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 219 – 226.

Notre projet vise à analyser la manière dont les programmes des trois pays (Bénin, Maroc et Tunisie) organisent la transition arithmétique-algèbre dans le passage de l'école primaire au collège. En cohérence avec notre positionnement théorique s'inscrivant dans les travaux de recherche du domaine early algebra (Squalli, 2000), l'étude de la transition arithmétique-algèbre revient à étudier la transition d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique, notamment dans les 2 cas suivant : (1) passage d'un raisonnement non analytique à un raisonnement analytique (Squalli et al., 2020) dans le contexte de résolution de problèmes se modélisant par une équation du premier degré à une ou plusieurs inconnues, et (2)passage d'une généralisation arithmétique à une généralisation algébrique (Squalli, 2015)

II. OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

En vue de comprendre la manière dont le système d'enseignement au Maroc, au Bénin et en Tunisie prépare ses élèves à l'entrée à l'algèbre, le projet cherche à dresser un état de la situation de la transition entre l'enseignement de l'arithmétique au primaire et l'enseignement de l'algèbre au collège dans chacun de ces trois pays. Pour ce faire, le projet a retenu les trois objectifs de recherche suivants:

1. Faire une analyse du savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans les programmes et les manuels scolaires de chaque pays.
0. Documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans la résolution des problèmes de comparaison et de généralisation.
0. Documenter les connaissances pour enseigner des enseignants du primaire et du collège en regard d'activités de résolution des problèmes de comparaison et de généralisation.

III. CADRAGE THÉORIQUE, LIEN AVEC TRAVAUX ANTÉRIEURS

La recherche repose sur deux piliers conceptuels de la didactique des mathématiques, à savoir le duo algèbre/pensée algébrique et un modèle praxéologique de la pensée algébrique

1. Algèbre. Pensée algébrique

En considérant les mathématiques comme une activité humaine, l'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli 2000). Ces activités sont marquées par une manière de penser, la PA. Sur le plan opératoire, cette pensée se déploie au moyen de :

. Un ensemble de raisonnements particuliers (généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles, raisonner sur des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) ;

. Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (voir l'égalité comme une relation d'équivalence, voir les opérations dans une expression numérique comme des objets en soi et non uniquement comme des instructions pour réaliser un calcul, etc.) ;

. Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

L'algèbre, ainsi renouvelée, fournit un cadre interprétatif d'une classe importante d'activités mathématiques des élèves de l'école primaire. De multiples occasions s'offrent à l'enseignant, qui possède une *lentille algébrique*, pour amener ses élèves à développer la PA et cela en enrichissant leur rapport à certains concepts mathématiques (comme par exemple, les notions d'opération, d'égalité, d'équation, de variable et l'idée de variation, de fonction), et en les initiant à raisonner de manière analytique.

2. TAD. Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Pour mettre au jour le potentiel des curriculums et des ressources d'enseignement du Bénin, du Maroc et de la Tunisie à développer la PA, nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologies que propose la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1998). Selon ce modèle, les pratiques et ressources institutionnelles, relatives à l'enseignement d'un savoir donné, peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t), appartenant à des types de tâches (T), des techniques τ, décrivant des manières de réaliser les tâches t, des technologies θ, justifiant les techniques et des théories Θ, qui donnent les fondements sur lesquels reposent les technologies. Pour le besoin de certaines analyses, les types de tâches sont regroupés en des genres de tâches.

L'analyse du savoir à enseigner, ou du savoir enseigné, suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issue des recherches réalisées dans le domaine de ce savoir (Larguier & Bronner, 2015). En s'appuyant sur les résultats des travaux de recherche portant sur la pensée algébrique (Lins & Kaput 2004 ; Carraher & Schliemann 2007, Radford 2010 et 2015, Squalli 2000 et 2015, entre autres), nous avons construit un *modèle praxéologique de référence de la* PA (MPRPA). Ce modèle que nous décrivons brièvement ici était élaboré initialement par Jeannotte, Squalli et Robert (2020). Il a été affiné ensuite, par les chercheurs du présent projet, de manière à répondre aux objectifs des analyses envisagées. Ce modèle est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : 1) Généralisation. 2) Modélisation et 3) Calcul. Chacune de ces PMR se décline en praxéologies mathématiques locales (PML).

Le tableau 1 suivant résume l'architecture du MPRPA, que nous considérons également comme une praxéologie mathématique globale de la PA.

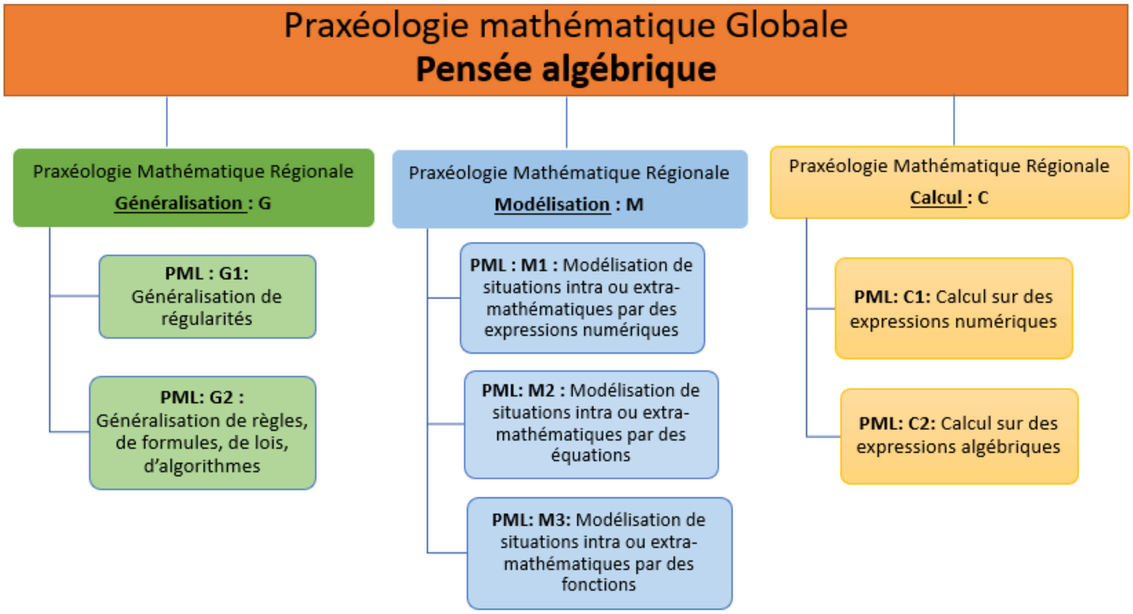


Figure 1 – Architecture du MPRPA

Pour toute PMR, les PML qui la composent se déclinent en des praxéologies mathématiques ponctuelles (PMP).

IV. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Pour atteindre notre premier objectif de recherche, nous avons adopté une méthodologie en quatre étapes pour l'étude du potentiel de développement de la PA que renferment les ressources d'enseignement utilisées au Bénin, au Maroc et en Tunisie :

Étape 1 : Identifier le corpus des données à analyser dans les manuels scolaires de mathématiques des classes de 6e année du primaire et de 1re année du collège, et ce dans chacun des trois pays.

Étape 2 : Recueillir dans chaque corpus les données, tout en répartissant les tâches identifiées en genres et types de tâches selon les PML et les PMR correspondantes.

Étape 3 : Distinguer, dans les tâches recueillies, celles qui sont potentiellement algébriques et celles qui ne le sont pas (purement arithmétique).

Étape 4 : Dans les tâches potentiellement algébriques, indiquer le degré du potentiel algébrique de chaque tâche.

Le tableau suivant présente les manuels sélectionnés pour l'étude de chacun des pays

	Bénin	Maroc	Tunisie

Primaire	MEMP, (Novembre 2004) La Mathématique au cours moyen deuxième année, Cotonou, Imprimerie NPIG	Aljaid Fi Arriyadiat (2020). *Manuel scolaire de mathématiques du 6e primaire*. Ed. Librairie nationale, Maroc. Guide Al Jaid, (2020. Ed. Librairie nationale, Maroc	Kairaoui, B., Barquaoui, B., Mouslimi, H. et badaui, T. (n.d.) Mathématiques 6e année de l'enseignement fondamental. Centre pédagogique national. Ministère de l'éducation, Tunisie
Collège	Nicolas A. Sovide et Constantin N. Akouegninou, (2017) *Réussir en mathématiques, 6eme* Cotonou, Bénin, Éditions LAHA	Al Moufid (2020). Manuel scolaire de mathématiques du 1er collège, Edition Dar Attakafa.	Derkaï, T., Yahya, N., Hamrouni, S. et Boulimane, S. (n.d.) *Mathématiques 7e année de l'enseignement fondamental.* Centre pédagogique national. Ministère de l'éducation, Tunisie

Tableau 1 *: Manuels sélectionnés pour l'étude*

Pour atteindre notre deuxième objectif de recherche, nous avons réalisé une enquête au moyen d'un test écrit auprès d'élèves de fin primaire et de début du collège. L'enquête visait à analyser la nature (arithmétique ou algébrique) des raisonnements des élèves mobilisés dans la résolution de problèmes de comparaison ainsi que dans des problèmes de généralisation, ainsi que la nature du registre de représentation utilisée : purement numérique, intermédiaire ou algébrique conventionnel.

Le tableau suivant présent la taille des échantillons (de convenance) des élèves ayant participé à l'enquête

	Bénin	Maroc	Tunisie
Fin Primaire	796	1732	130
Début du collège	722	1405	115

Tableau 2*: Effectifs des élèves questionnés par pays et niveau scolaire*

Pour atteindre notre troisième objectif, nous avons administré un questionnaire à des enseignants du primaire et du collège et analysé leurs prédispositions à favoriser chez leurs élèves le développement de raisonnements algébrique dans la résolution de problèmes de comparaison et de généralisation algébrique.

Le tableau suivant présent la taille des échantillons (de convenance) des enseignants ayant participé à l'enquête

	Bénin	Maroc	Tunisie
Primaire	50	50	53
Collège	41	53	30

Tableau 3*: Effectifs des enseignants questionnés par pays et niveau scolaire*

V. QUELQUES RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

Cette étude nous a permis de dresser un portrait de la manière dont chacun des trois pays assure la transition arithmétique algèbre. Les résultats détaillés sont présentés dans (Abouhanifa et al., 2024; Ben Nejma et al. 2022). Nous présentons ici une brève synthèse de ce portrait ainsi que quelques recommandations pour améliorer la transition arithmétique-algèbre. Les trois pays recourent à une approche transitionnelle, l'algèbre est introduite officiellement durant la première année du collège sur la base des apprentissages réalisés par les élèves en arithmétique au primaire. Les programmes des trois pays accordent une importance - très grande dans le cas du Bénin - aux tâches de calcul, au primaire et au collège. L'apprentissage du calcul algébrique semble être au cœur de l'apprentissage de l'algèbre. Les tâches de généralisation sont les moins fréquentes dans les programmes du primaire et du collège des trois pays, alors que la généralisation est une voie importante pour l'entrée en algèbre. Les tâches de modélisation sont bien présentes dans les programmes marocains, encore plus dans les programmes tunisiens et peu fréquentes dans les programmes béninois. Cette forte présence relative semble être motivée par l'importance donnée à la contextualisation par les programmes du Maroc et de la Tunisie et à la résolution de problèmes à contexte. Cependant, le potentiel de développement de la pensée algébrique par le biais de tâches de modélisation ne semble pas être concrétisé. Une bonne majorité des enseignants est peu sensible aux enjeux de l'analycité et de la généralisation algébrique. L'introduction du calcul littéral et l'apprentissage de la mécanique du calcul algébrique semblent faire obstacle à l'exploitation de ce potentiel.

Notre recherche a mis en évidence plusieurs enjeux en lien avec la formation des enseignants et les orientations curriculaires. Nous formulons ici celles qui nous semble les plus essentielles.

1. Recommandations en lien avec la formation initiale et continue des enseignants du primaire et du collège :

Amener les enseignants à prendre conscience de l'importance de la généralisation

La généralisation est au cœur de l'activité mathématique, la plupart des faits mathématiques sont généraux. Aussi, la généralisation est un processus essentiel dans la construction des connaissances mathématiques**.** Le développement de la généralisation chez les élèves doit être explicitement visé dans l'enseignement.

L'apprentissage de la généralisation demande du temps. Les élèves doivent être encouragés à conjecturer des généralités et à tenter de les justifier à chaque fois que l'occasion se présente.

L’apprentissage de la généralisation s’accompagne de l’apprentissage de l’argumentation et prépare à la pratique de la preuve.

Amener les enseignants à voir l’algèbre comme une manière de penser et non exclusivement comme un calcul.

Pour cela, il nous semble important d’amener les enseignants à proposer des activités amenant les élèves, dès l’école primaire et avant l’entrée en algèbre du collège, à :

- réfléchir sur le calcul
- prendre conscience des opérations et de leurs propriétés
- enrichir leurs stratégies numériques
- penser de manière analytique (opérer sur l’inconnue)
- généraliser (pressentir des régularités, les formuler et les justifier)
- passer progressivement du langage naturel à un langage de plus en plus formel

2. Recommandations sur le plan curriculaire

En cohérence avec les orientations curriculaires émanant des travaux de recherche du domaine early algbera, nous recommandons aux responsables des programmes de mathématiques de chacun des 3 pays, d’utiliser le développement précoce de la pensée algébrique, c’est-à-dire dès les premières années du primaire, comme une stratégie pour enrichir les programmes de mathématiques du primaire et du collège. Dans ce sens, notre modèle praxéologique de référence pourrait servir de cadre de référence pour enrichir les programmes et les manuels scolaires par des types de tâches favorisant le développement de la pensée algébrique.

Dans une vision à plus long terme, nous recommandons la réalisation de différentes études pour préparer des curriculums de nouvelle génération, c’est-à-dire, des curriculums structurés comme des trajectoires coordonnées de différentes formes de la pensée mathématique (pensée arithmétique, pensée algébrique, pensée géométrique, pensée statistique, pensée probabiliste, pensée algorithmique) depuis le début du primaire jusqu’à la fin du collège.

RÉFÉRENCES

ABOUHANIFA, S. ADIHOU, A, BEN NEJMA, S., OKÉ, E., NAJJAR, R. & SQUALLI, H. (2024). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l’enseignement de l’arithmétique et de l’algèbre. Rapport de synthèse pour l'AUF, programme Apprendre.

ALJAID FI ARRIYADIAT (2020). Manuel scolaire de mathématiques du 6e primaire. Ed. Librairie nationale, Maroc.

AL MOUFID (2020). Manuel scolaire de mathématiques du 1er collège, Edition Dar Attakafa

CARRAHER D. W., & SCHLIEMANN A. (2007) Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669–705). Greenwich, CT : Information Age Publishing.

BEN NEJMA, S., ABOUHANIFA, S., OKÉ, E., NAJJAR, R., SQUALLI, H., & ADIHOU, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6e année primaire. Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques, 59-95

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

JEANNOTTE D., SQUALLI H., & ROBERT V. (2020) Highlighting the potential for developing early algebraic thinking: a praxeological framework of reference. Texte de communication au 14th International Congress of Mathematical Education. July 12-19, 2020, Shanghai, China.

LARGUIER M., & BRONNER A. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3.

LINS R. C., & KAPUT J. (2004) The early development of algebraic reasoning : The current state of the field. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (Vol. 1, pp. 47–70). The University of Melbourne, Australia.

RADFORD L., (2015) Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3.

RADFORD L., (2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, 12(1), 1-19.

SQUALLI H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat inédite. Université Laval.

SQUALLI H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015–Groupe travail 3.

SQUALLI, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires, (pp. 5-21). Québec : Livres en ligne du CRIRES. En ligne : https ://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee- algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches.

SQUALLI, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités

4e colloque de l'association africaine des didacticiens de mathématique
Ben Guérie, Maroc : 20-24 mai 2024

University Mohammed VI Polytechnic

Analyse du potentiel d'une tâche pour le développement de la pensée algorithmique en mathématique

Marie-Frédérick St-Cyr[36], Fabienne Venant

Université du Québec à Montréal

Hassane Squalli

Université de Sherbrooke

Résumé – Dans cette proposition, nous souhaitons discuter de la potentialité d'une tâche proposée par des personnes enseignantes pour le développement de la pensée algorithmique en mathématique. Cette tâche a été développée et expérimentée par trois personnes enseignantes du troisième cycle du primaire et du premier cycle du secondaire dans le cadre d'une recherche-action au Québec. Cette tâche, qui intègre la programmation informatique, visait à travailler le « terme manquant » (à trouver la valeur de l'inconnu dans une addition ou une soustraction) en mathématique et à développer la pensée algorithmique des élèves. Nous proposons une analyse *a priori* de la tâche, qui prend appui sur les échanges que nous avons eus avec les personnes enseignantes, mettant en lumière certains concepts et raisonnements centraux à la pensée algorithmique en mathématique. Cette réflexion nous permettra d'éclairer le discours des personnes enseignantes quant à l'activité qu'elles ont vécue. Cette mise en commun n'est pas encore complétée.

I. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Depuis une quinzaine d'années, l'activité algorithmique fait partie de nombreux programmes de formation dans le monde notamment au travers de la programmation informatique (Barma, 2018 ; Kotsopoulos et al., 2017 ; Wing, 2017). L'activité algorithmique faisant partie de l'activité mathématique depuis plusieurs centaines d'années, nous croyons que les mathématiques ont un rôle essentiel à jouer dans l'intégration de l'algorithmique et de la programmation informatique en classe. En ce sens, nous nous intéressons, en tant que didacticiennes des mathématiques, à l'activité algorithmique qui se déroule dans la classe de mathématique. Ce texte provient de réflexions faites pendant un projet de recherche-action qui vise l'intégration de la programmation informatique dans les classes de mathématique au Québec. Nous présentons donc le contexte du Québec quant à l'intégration de l'algorithmique et de la programmation informatique, puis nous spécifions le

[36] St-Cyr, M.-F. & Venant, F. (2024). Analyse du potentiel d'une tâche pour le développement de la pensée algorithmique en mathématique. In Squalli, H. et Adihou, A, (Ed.) *L'enseignement des mathématiques pour/par une éducation aux STIM : Défis et opportunités* – Actes colloque ADIMA 2024 – GT2, pp. 227-237.

contexte de la recherche-action. Nous présentons les assises conceptuelles qui s'appuient sur la théorie de l'objectivation (Radford, 2021) et une caractérisation de la pensée algorithmique en mathématique (St-Cyr, 2022). Nous présentons le déroulement de la recherche-action qui a pris la forme de Lesson Study, puis nous discutons de la tâche expérimentée par un groupe de trois personnes enseignantes. Nous proposons une réflexion en lien avec le potentiel de la tâche proposée par les personnes enseignantes qui prend appui sur le cadre théorique et sur les objectifs ciblés par les personnes enseignantes. Il ne s'agit que de résultats préliminaires puisque l'analyse est actuellement en cours.

1. Le contexte du Québec

Au Québec, l'activité algorithmique et la programmation informatique ne font pas explicitement partie du programme de formation au primaire et au secondaire (5-17 ans). Toutefois, le gouvernement a lancé le plan d'action numérique qui vise une « intégration efficace et une exploitation optimale du numérique au service de la réussite de toutes les personnes, qui leur permettent de développer et de maintenir leurs compétences tout au long de leur vie » (Gouvernement du Québec, 2018, p. 4). En 2019, à l'intérieur du plan d'action numérique, le gouvernement du Québec a proposé un cadre de référence de la compétence numérique qui se définit comme « un ensemble d'aptitudes relatives à une utilisation confiante, critique et créative du numérique pour atteindre des objectifs liés à l'apprentissage, au travail, aux loisirs, à l'inclusion dans la société ou à la participation à celle-ci » (Gouvernement du Québec, 2019, p. 7). Dans le cadre de référence, la deuxième dimension (parmi douze) porte sur le développement de la pensée informatique en développant la compréhension et les habiletés relatives à la programmation informatique (Gouvernement du Québec, 2019). Pour atteindre ces visées, le gouvernement a formé des personnes conseillères pédagogiques en lien avec la programmation en plus d'équiper les écoles avec des technologies numériques adaptées à leurs besoins (Gouvernement du Québec, 2018). Ces initiatives ont porté fruit puisque le développement de la pensée informatique est déjà présente dans plusieurs classes de mathématique au Québec où la programmation et la robotique sont présentes au primaire et au secondaire.

2. Le contexte de la recherche

Le projet de recherche-action a lieu au Québec dans le centre de service scolaire La Capitale depuis septembre 2021 (et se terminera à l'été 2024). Nous avons donc travaillé pendant trois ans avec les personnes enseignantes et conseillères pédagogiques. Il a été fait en collaboration avec deux personnes conseillères pédagogiques expertes dans l'usage pédagogique de la programmation et de la robotique ainsi qu'avec des personnes enseignantes du troisième cycle du primaire et du premier cycle du secondaire. Parmi ces personnes, certaines intégraient la programmation informatique dans leur classe depuis au moins cinq ans et certains jouaient un rôle de Leader technopédagogique pour soutenir les autres personnes enseignantes dans l'intégration du numérique en classe. D'autres personnes intègrent depuis moins de cinq ans la programmation dans leur classe et se considèrent comme débutantes, alors que certaines personnes participaient au projet pour en apprendre davantage sur la programmation et avoir du soutien pour son intégration en classe.

II. FONDEMENTS THÉORIQUES ET CONCEPTUELS

La théorie de l'objectivation (Radford, 2021) est une théorie de l'enseignement-apprentissage, s'inscrivant dans les théories socioculturelles, qui offre des balises pour approcher la pensée. Cette théorie considère que les savoirs (algorithmiques en mathématique dans ce cas) comme des potentialités pouvant être rencontrées, ou non, au cours d'une vie. Cette rencontre ne peut être rendue possible que dans l'activité (une activité algorithmique en mathématique vécue par une classe dans ce cas). L'activité est donc l'unité d'analyse.

En prenant appui sur cette théorie, nous définissons la pensée algorithmique en mathématique comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités mathématiques faisant intervenir au moins un algorithme (St-Cyr, 2022). Nous considérons l'algorithme comme une série d'étapes qui visent à résoudre des problèmes d'un certain type (Modeste, 2012). Cet algorithme peut être communiqué à un autre humain (p. ex., l'algorithme d'addition qui est enseigné au primaire) ou à une machine (p. ex., un algorithme informatique permettant d'analyser une base de données).

Nous considérons, à la lumière de Squalli (2020) et de Robert (2018), que l'activité mathématique peut être décrite selon trois composantes essentielles et interreliées : les registres de représentation et les manières d'opérer sur ceux-ci, les raisonnements ainsi que les concepts en jeu et leur signification. Ces trois composantes ont été décrites plus spécifiquement, mais dans ce travail, nous nous intéressons en particulier au passage d'un registre à l'autre (mathématique et informatique), aux raisonnements séquentiel, itératif et conditionnel ainsi qu'aux concepts d'opérateur, de variable et de relation d'équivalence (St-Cyr, 2022). Nous avons choisi ces raisonnements et ces concepts puisqu'ils sont au cœur de la tâche qui a été choisie et des discussions que nous avons eues.

De manière plus spécifique, voici ce que nous entendons par chacune des caractéristiques de la pensée algorithmiques en mathématique que nous souhaitons étudier (St-Cyr, 2022) :

Tableau 1. Extrait d'une caractérisation opératoire de la pensée algorithmique en mathématique (St-Cyr, 2022)

Passage d'un registre à l'autre	• Le passage d'un registre à l'autre peut se faire dans n'importe quel sens en respectant les règles dans chacun d'eux pour adapter l'algorithme.
Raisonnement séquentiel	• Décomposer le problème ou la solution en sous-étapes et en étapes élémentaires • Déterminer l'ordre des étapes • Exécuter les étapes dans le bon ordre.
Raisonnement itératif	• Déterminer la séquence d'instruction à répéter (reconnaitre les régularités • Initialiser la (ou les) variable(s) (si nécessaire) • Déterminer la condition d'arrêt ou le nombre de répétitions • Incrémenter
Raisonnement conditionnel	• Déterminer les options • Déterminer les critères (les conditions) menant à ce choix • Déterminer l'ordre dans lequel présenter ces choix

Opérateur	• Transformation du problème • Attestés par des productions et des comportements • Mathématiques, chaines des caractères et autres structures
Variable	• Mathématique : stable tout au long du problème • Informatique : espace mémoire, varie dans un même problème

III. OBJECTIF DE LA PROPOSITION

L'objectif de cette proposition est de mettre en lumière les potentialités d'une tâche mathématique pour développer la pensée algorithmique en mathématique à partir d'une tâche proposée par des personnes enseignantes dans un projet de recherche-action. Nous visons éclairer spécifiquement les potentialités pour la transposition du registre mathématique au registre informatique, les raisonnements séquentiel, itératif et conditionnel ainsi que les concepts d'opérateur et de variable. Nous ferons une analyse *a priori* qui prend appui sur les documents laissés par les personnes enseignantes. Cette analyse est en cours, donc il s'agit de résultats préliminaires que nous mettrons en lien avec les réflexions des personnes enseignantes sur l'expérience qu'elles ont vécue et sur l'activité de la classe qui a été filmée.

IV. UNE DÉMARCHE QUI S'APPARENTE AUX LESSONS STUDIES COMME MÉTHODOLOGIE

Lors de la première année, nous avons entamé des réflexions avec les personnes enseignantes sur l'identification de critères permettant de déterminer l'intention de la tâche. Est-ce que la tâche a une visée de développement de compétences mathématiques ou informatiques ? Est-ce qu'elle vise à développer la créativité ? Est-ce qu'une tâche qui intègre la programmation informatique permet nécessairement de développer une pensée mathématique ? Lors de cette première année, nous avons entamé un processus de réflexion et de questionnements quant à l'apport de la programmation informatique dans l'enseignement des mathématiques.

Lors de la deuxième année, nous avons d'abord présenté trois tâches aux personnes enseignantes pour leur faire vivre et analyser. Nous avions choisi trois types de tâches : une qui visait à développer une pensée algorithmique et qui était plus pauvre du point de vue mathématique, une qui visait à développer une pensée mathématique et qui était plus pauvre du point de vue algorithmique et une qui, pour nous, était riche du point de vue algorithmique et mathématique. Nous n'avons pas mis de l'avant notre opinion. Nous avons plutôt laissé les personnes enseignantes s'exprimer et nous avons constaté que les regards et les *a priori* que nous avions étaient différents. Nous avons mis l'accent que l'important pour ce projet n'était pas de développer une pensée mathématique ou algorithmique avec les tâches qu'ils feraient vivre à leurs élèves, mais plus qu'ils prennent conscience et qu'ils soient au clair avec leur intention d'enseignement-apprentissage.

Nous avons ensuite proposé de suivre une démarche qui s'apparente aux Lessons Studies (Lewis et Hurd, 2011). Les personnes enseignantes ont formé des équipes et pour chacune des équipes était joint un membre expert (personne conseillère pédagogique ou chercheure). L'équipe que nous nous intéressons aujourd'hui était composée de trois membres : une personne enseignante à la formation aux adultes qui entamait sa deuxième année dans le projet et qui se considère comme débutant-intermédiaire en programmation, une personne enseignante au troisième cycle du primaire qui enseigne la programmation depuis près de dix ans et qui se considère comme débutante-intermédiaire en programmation et une personne enseignante au troisième cycle du primaire qui enseigne la programmation depuis environ cinq ans et qui est une leader en technopédagogie dans son école et qui se considère comme intermédiaire-avancée en programmation (pour l'enseignement au primaire). Cette équipe était aussi composée d'un membre chercheur qui était présent lors de certaines discussions pour participer aux réflexions quant à l'intention d'apprentissage de la tâche et à l'alignement entre cette intention et la tâche proposée.

Cette équipe a d'abord identifié qu'elle souhaitait travailler le terme manquant avec ses élèves en mathématique. Elle a construit un plan commun pour la séquence d'enseignement-apprentissage, mais chaque personne l'a adapté pour l'opérationnaliser à sa manière en classe. Lorsque les deux premières personnes l'ont testé en classe (environ au même moment), une rencontre a eu lieu pour discuter du déroulement de l'activité et proposer des adaptations. La troisième personne a vécu l'activité et a fait un retour à l'ensemble du groupe par la suite. Nous considérons que nous n'avons pas suivi exactement le processus d'une Lesson Study puisque les rencontres et les adaptations de la tâche n'ont pas été faites systématiquement à la suite de chacune des expérimentations.

Nous avons les documents conçus par deux des trois personnes enseignantes, la captation vidéo d'une séance de la troisième personne et l'analyse qu'elles ont faite de leur tâche et de la manière dont elles l'ont vécue avec leurs élèves.

V. DISCUSSION AUTOUR DE LA TÂCHE DU TERME MANQUANT PROPOSÉE (RÉFLEXION PRÉLIMINAIRE)

Nous ne présentons pas les résultats complets dans cette proposition puisque l'analyse est toujours en cours. Nous proposons toutefois une analyse préliminaire des tâches qui met en lien les objectifs d'apprentissages identifiés par les personnes enseignantes et la caractérisation de la pensée algorithmique en mathématique présentée dans le cadre théorique. Nous sortirons légèrement des objectifs ciblés par les personnes enseignantes pour explore d'autres potentialités qu'elles n'ont pas nommées. Cette analyse *a priori* pourra guider nos réflexions, sans toutefois nous enfermer, lors l'analyse des de l'activité effective ou de l'activité décrite par les personnes enseignantes.

1. Présentation de la tâche

Les personnes enseignantes ont conçu cette tâche dans une double visée mathématique et informatique. La visée mathématique, qui est liée au programme de formation de l'école québécoise, était d'amener les élèves à développer leurs connaissances liées aux termes manquants et à la variable en utilisant la programmation avec Scratch. La visée informatique, qui ne fait pas partie du programme de formation de l'école québécoise, était d'utiliser les variables, d'utiliser les capteurs et d'utiliser les boucles si-alors-sinon. L'objectif de travailler la variable était présent au niveau mathématique et informatique. Pour les personnes enseignantes, l'informatique était une occasion à saisir pour donner un sens à la variable mathématique.

Le « terme manquant » est utilisé au Québec lorsqu'il est demandé à un élève de trouver la valeur d'un inconnu dans une équation qui nécessite une manipulation algébrique pour isoler cet inconnu. Dans ce cas précis, le terme manquant se trouve dans l'addition ou la soustraction de deux nombres. Par exemple, dans l'équation 3+X=12, le terme manquant est X et aurait la valeur de 9. La recherche d'un terme manquant aurait aussi pu se faire dans l'équation X+3=12 ou 12-X=3 ou X-3=9. Dans tous les cas, le terme manquant ici est représenté par X.

Spécifiquement, la tâche proposée demandait à l'élève de créer un programme informatique avec Scratch qui permettrait de trouver la valeur du terme manquant dans une addition dans un premier temps, puis dans une soustraction (pour ceux qui avaient le temps). Les cas de l'addition et de la soustraction ont été traités séparément avec les élèves.

Le déroulement général prévu pour les trois personnes enseignantes est de faire en amont un travail papier-crayon sur le terme manquant et de faire une initiation (ou non) à Scratch. Ensuite, en un ou deux cours de programmer l'addition (et parfois la soustraction) dans Scratch. Dans ce programme, il est attendu que l'ordinateur demande en entrée deux nombres et le terme inconnu (en connaissant l'opération) et qu'il donne en retour la valeur du terme manquant. Si nous revenons à l'exemple précédent : X+3=12. L'élève écrirait un programme qui entrée mentionne que le premier terme est le terme manquant, qu'il s'agit d'une addition, que le second terme est trois et que le résultat est 12. L'ordinateur donnerait en sortie 9 (il aurait fait le calcul 12-3).

2. La phase préparatoire en mathématique papier-crayon

Les trois personnes enseignantes ont choisi d'explorer le terme manquant papier-crayon dans un premier temps. Elles ont d'abord travaillé pour isoler le terme manquant de l'addition qu'il soit au terme 1 (X+3=12), au terme 2 (3+X=12) ou au terme 3 (3+9=X). Elles ont débuté par un exemple numérique qu'elles travaillaient au tableau ou à l'aide d'un tableau que les élèves pouvaient compléter. Chaque personne enseignante a fait le choix selon ce avec quoi elle était le plus à l'aise. Le tableau suivant montre le tableau créé par une enseignante qui amène à explorer l'addition d'un point de vue numérique, puis algébrique. Une des personnes enseignantes a exploré la partie algébrique en isolant la variable à l'aide de l'illustration d'une balance algébrique. Cet enseignant a aussi débuté avec des exemples numériques.

L'objectif de cette phase préparatoire est d'identifier les trois cas possibles (le terme manquant peut être à trois endroits) et d'isoler le terme manquant pour qu'une fois à l'ordinateur les élèves n'aient pas à prendre en considération cet aspect. L'ampleur du travail mathématique était variable d'une personne enseignante à l'autre. Certains ont discuté de la variable en la présentant comme une boite dont il faut trouver la valeur.

Tableau 2. Tableau créé par une enseignante pour explorer trois cas possibles pour trouver la valeur du terme manquant

Addition				
	Numérique	Algébrique	Termes connus	Terme inconnu
	Ex : 3 + 4 = 7	$T_1 + T_2 = T_3$		
Cas #1	3 + 4 = x	$T_1 + T_2 = T_3$	T_1 et T_2	T_3
Cas #2	3 + x = 7 x = 7 − 3	$T_1 + T_2 = T_3$ $T_2 = T_3 - T_1$	T_1 et T_3	T_2
Cas #3	x + 4 = 7 x = 7 − 4	$T_1 + T_2 = T_3$ $T_1 = T_3 - T_2$	T_2 et T_3	T_1

3. La phase de transposition en langage informatique

Lors de la transposition à l’ordinateur, les trois personnes enseignantes ont procédé de manières légèrement différentes, mais dans les trois cas, les personnes enseignantes ont identifié au minimum des blocs qui pourraient être utiles aux élèves. Ce choix vient notamment du fait que les élèves étaient majoritairement considérés comme débutants en programmation informatique (à l’exception de quelques-uns qui avaient un intérêt particulier ou faisaient partie d’un club d’informatique).

Une personne a choisi de commencer le programme avec les élèves en identifiant les variables. Les élèves devaient alors programmer les trois cas qu’ils avaient identifiés dans l’exercice préalable en utilisation l’opérateur « SI ».

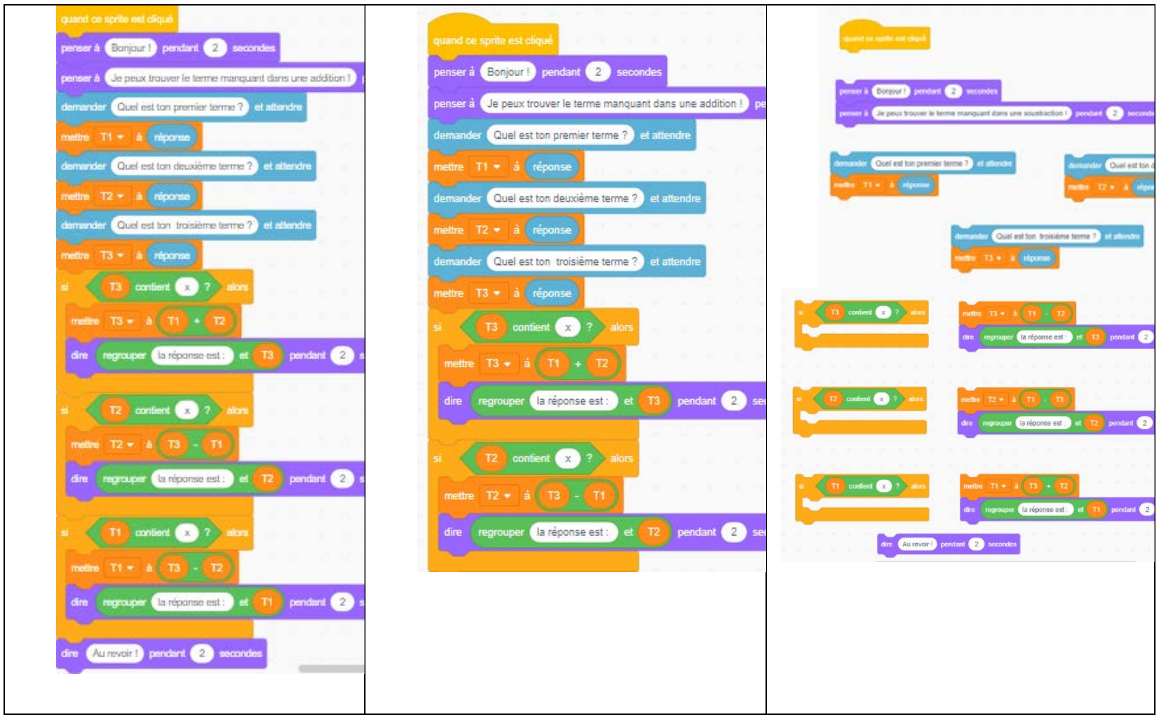
Tableau 4. Programme de départ (gauche) ainsi que la partie à créer par les élèves (droite)

<table>
<tr><th>Travail fait en amont avec l’ensemble de la classe</th><th>Travail à faire en équipe de deux</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Une personne enseignante a fait le choix de construire l’algorithme en langage informatique en entier avec ses élèves pour l’addition. Elle a ensuite proposé différents choix pour la soustraction selon le niveau d’aisance de ses élèves (qui est très variable puisqu’elle est en formation aux adultes avec des élèves qui sont de niveau primaire en mathématique et d’autre de premier cycle du secondaire).

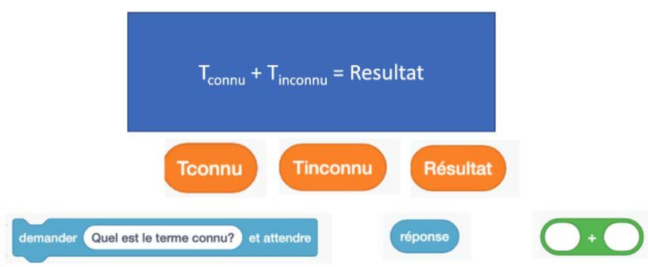
Tableau 3. Trois propositions de programmes Scratch de départ proposés

Addition : Programme complet	Addition : Programme dont il manque le dernier cas	Soustraction : Replacer dans le bon ordre



Une personne enseignante a choisi de ne pas commencer l'algorithme informatique avec les élèves. Elle a tout de même identifié les variables et il a mis quelques blocs de programmation Scratch au tableau qui pourraient aider les élèves avec les élèves avant qu'ils se mettent à la tâche. Cette personne enseignante est celle qui se sent la plus à l'aise avec la programmation informatique.

Tableau 5. Information identifiée au tableau par la classe comme point de départ



4. Le potentiel pour développer une pensée algorithmique en mathématique

En prenant appui sur le discours des personnes enseignantes, sur les documents que nous avons reçus des tâches proposées et sur les échanges que les personnes enseignantes ont eues, nous proposons d'observer spécifiquement le potentiel de ces tâches pour développer la pensée algorithmique en mathématique. Pour faire cette analyse préliminaire, nous allons discuter du passage d'un registre à l'autre, de trois raisonnements (séquentiel, itératif et conditionnel) de manière distincte, puis des deux concepts (opérateur et variable) de manières distinctes. Nous en discutons de manière distincte, mais nous avons parfois besoin de prendre appui sur des concepts ou des raisonnements pour mettre en lumière un concept ou un raisonnement ; ils ne sont pas indépendants les uns des autres.

Le passage d'un registre à l'autre a le potentiel d'être travaillé puisque les personnes enseignantes ont toutes d'abord travaillé le terme manquant avec papier-crayon d'abord pour permettre aux élèves de mieux comprendre le problème et comment trouver l'inconnu selon l'endroit où il est situé dans l'équation. Ainsi, les élèves devaient trouver une manière de transposer la solution mathématique à la solution informatique.

L'algorithme n'avait pas été déterminé avant que les élèves aient à l'écrire dans le langage de programmation. Ainsi, les élèves devaient identifier les trois cas possibles qu'ils avaient identifiés en groupe (sur leur feuille ou au tableau) et trouver une manière de communiquer chacun de ces cas à l'ordinateur ainsi que le moment où l'ordinateur doit utiliser chacun de ces cas. Il doit donc à la fois construire l'algorithme et le communiquer à l'ordinateur. Pour un élève débutant avec la programmation, il est possible que ça demande une grande gestion d'information en même temps. Pour pallier les difficultés ou aux blocages de certains, une personne enseignante a fait le choix de faire un programme en entier avec ses élèves, puis a proposé des adaptations par la suite. Or, pour elle le fait que ses élèves reproduisent le programme semblait déjà un accomplissement puisque plusieurs n'étaient pas familiers avec l'ordinateur ni avec le français et que le travail mathématique fait en amont était déjà un grand défi pour eux. Or, dans les trois groupes, plusieurs élèves sont parvenus à concevoir le programme en équipe avec le soutien de la personne enseignante.

Le raisonnement séquentiel a le potentiel d'être développé dans cette tâche selon nous. En effet, lors de la transposition de la représentation mathématique à la représentation informatique, les élèves doivent décomposer la solution en étapes élémentaires (déterminer les trois cas) et déterminer l'ordre des étapes (est-ce que l'ordre dans lequel les cas sont présentés est important ?). Pour le groupe où les la programmation des variables n'avait pas été fait préalablement, les élèves devaient anticiper les questions l'information qu'ils devraient demander à l'utilisateur du programme en plus.

Le raisonnement itératif n'a pas le potentiel d'être travaillé dans cette tâche selon nous puisque la tâche de l'élève se limite à déterminer les cas possibles ainsi que les conditions pour aller dans chacun des cas. L'élève n'a donc pas à reconnaitre une répétition et à la mettre en œuvre. Il pourrait tout de même être intéressant de voir si cette tâche pourrait être présentée autrement pour inclure un raisonnement itératif ou pour ajouter un défi supplémentaire à la fin qui demanderait un raisonnement itératif en mathématique. Un raisonnement itératif pourrait être ajouté en proposant un programme qui demanderait si l'utilisateur veut résoudre un nouveau problème de terme manquant par exemple. Ce raisonnement itératif ne serait pas intrinsèquement lié aux mathématiques, mais permettrait tout de même d'identifier une répétition et de la mettre en œuvre.

Le raisonnement conditionnel a le potentiel d'être travaillé dans la tâche puisque les élèves doivent d'abord déterminer les différents cas possibles (le terme manquant est le terme 1, le terme manquant est le terme 2, le terme manquant est le terme 3) puis les programmer à l'aide d'instructions « SI » ou « SI ALORS ». Pour y parvenir, ils doivent déterminer les conditions menant à chacun de ces cas possibles et la manière dont ces conditions doivent être écrites. Ici il s'agit de trouver une manière d'identifier quel est le terme manquant et d'assigner les valeurs aux deux autres termes. Dans ce cas, la majorité a fait le choix de toujours mettre X au terme manquant et d'utiliser l'emplacement de ce X comme condition (si terme 1 contient X, alors…). D'autres manières auraient pu être employées.

Le concept d'opérateurs a le potentiel d'être travaillé chez les élèves en vivant cette tâche. En effet, l'opérateur « contient » (bloc vert) est un opérateur logique qui permet de vérifier si la valeur de la variable (C1, C2 et C3 dans le tableau 4) est « x ». La manière dont les tests logiques sont faits dans le langage Scratch est différente d'autres langages puisque la question sous-jacente apparait réellement à l'écran avec un point d'interrogation. Cette manière de représenter permet de mettre dans le langage familier l'opérateur utilisé. Par ailleurs, des opérateurs d'addition et de soustraction sont présents. L'élève doit les utiliser au bon moment selon les réflexions *a priori* qu'il a effectuées. Des réflexions et une analyse pourraient être faites quant au fait que dans l'addition les termes sont commutatifs et non dans la soustraction. C'est un élément qui pourra être observé plus attentivement et discuté avec les personnes enseignantes également.

Le concept de variable a été travaillé autant d'un point de vue mathématique qu'informatique. En effet, les discussions sur le terme manquant ont amené à utiliser et à discuter de la variable. Alors qu'une personne enseignante parle de la variable comme de la « boite » à ses élèves, d'autres utilisent la variable « x ». Dans tous les cas, les élèves étaient amenés à généraliser leur calcul pour isoler le terme manquant, et donc, devaient représenter chacun des termes par un symbole ou un nom. Ce choix facilite la transposition à l'ordinateur puisqu'en écrivant l'algorithme informatique, l'élève a déjà conscience que les termes seront remplacés par de symboles. Il n'est toutefois pas évident de savoir si les élèves ont travaillé sur l'inconnu ou s'ils ont travaillé de manière arithmétique, puis remplacé les nombres par des symboles. Également, les personnes enseignantes n'ont pas fait allusion à la distinction entre la signification de la variable mathématique et informatique. Dans ce cas, la distinction ne semblait pas faire une différence conceptuelle puisque la variable informatique n'était pas amenée à changer de valeur pendant le calcul. L'espace mémoire de la variable est utilisé par une seule valeur du début à la fin de l'algorithme.

VI. CONCLUSION ET SUITE

Notre objectif étant de mettre en lumière les potentialités d'une tâche mathématique pour développer la pensée algorithmique en mathématique à partir d'une tâche proposée par des personnes enseignantes dans un projet de recherche-action. Nous avons mis en lumière certains concepts et raisonnements qui nous apparaissaient centraux à la pensée algorithmique et à la tâche proposée. Nous avons fait une analyse *a priori* de la tâche en prenant appui sur les échanges que nous avons eus avec les personnes enseignantes et sur des enregistrements vidéo du déroulement de l'activité en classe. Le travail d'analyse n'est pas complété. Il nous reste à voir comment ces concepts et raisonnements ont pris vie dans l'activité de la classe au travers du discours des personnes enseignantes notamment.

RÉFÉRENCES

BARMA, S. (2018). Rapport final : réaliser une étude de cas multiple qui vise à affiner les connaissances sur l'usage pédagogique ou didactique de la programmation dans les écoles du Québec (publication nº 118982). Université Laval. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/rapport-final-realiser-une-etude-de-cas-multiple-qui-vise-affiner-les-connaissances-sur

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC. (2018). *Plan d'action numérique en éducation et en enseignement supérieur.* Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/ministere/PAN_Plan_action_VF.pdf

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC. (2019). *Cadre de référence de la compétence numérique*. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/ministere/Cadre-reference-competence-num.pdf

LEWIS, C., PERRY, R., FOSTER, D., HURD, J., et FISHER, L. (2011). Lesson Study: Beyond Coaching. *Educational Leadership, 69*(2), 64-68.

KOTSOPOULOS, D., FLOYD, L., KHAN, S., NAMUKASA, I., SOMANATH, S., WEBER, J. et YIU, C. (2017). A pedagogical framework for computational thinking. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3(2),* 154-71. http://doi.org/10.1007/s40751-017-0031-2.

MODESTE, S. (2012). Enseigner l'algorithmique, pourquoi ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? [Thèse de doctorat, Université de Grenoble].

RADFORD, L. (2021). The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning (Vol. 4). Brill.

ROBERT, V. (2018). Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

SQUALLI, H., LARGUIER, M., BRONNER, A., et ADIHOU, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

ST-CYR, M-F. (2022). Élaboration d'une caractérisation opératoire de la pensée mathématique algorithmique pour la recherche en didactique des mathématiques [mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke].

WING, J. (2017). Computational thinking's influence on research and education for all. *Italian Journal of Educational Technology*, *1*(1). https://doi.org/10.17471/2499-4324/9