Actes du colloque CORFEM 2022

Coordonnés par Michèle GANDIT

XXVIIIème colloque pour les professeurs et les formateurs de mathématiques

Nantes – 9 et 10 juin 2022

CORFEM

La CORFEM, COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré, est une commission inter-IREM visant à :

- échanger sur la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques,
- capitaliser, valoriser et diffuser des ressources et des outils pour la formation des enseignants de mathématiques du second degré,
- nourrir la formation des enseignants des apports de la recherche.

Cette commission regroupe des formateurs – PFA, PRCE, PRAG ou enseignants-chercheurs – formateurs en ESPE, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents et mutualiser des ressources sur la formation et l'enseignement des mathématiques, afin d'améliorer leur action auprès des étudiants se destinant au métier de professeur de mathématiques (masters MEEF, DU...).

Le présent document constitue les actes du 28ème colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé à Nantes, les 9 et 10 juin 2022.

Les thèmes abordés dans ces actes :

- Thème 1 – Raisonner, prouver, démontrer… en classe et en formation
- Thème 2 – Décrire et comprendre les pratiques enseignantes. Impact sur la formation

Sur le thème 1 :

- Conférence de Maria Alessandra Mariotti – Introduction à la preuve en mathématique : la médiation d'environnements informatiques.
- Conférence de David Rabouin – Raisonner par l'absurde : perspectives historiques.

Sur le thème 2 :

- Conférence d'Aurélie Chesnais – Penser l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques à partir de la recherche en didactique des mathématiques.

Table des matières

THEME 1

RAISONNER, PROUVER, DEMONTRER…
EN CLASSE ET EN FORMATION

Ce thème se situe au cœur de l'activité mathématique et se décline dans tous les domaines mathématiques, dans le secondaire, en deçà et au-delà. Nombreux sont les formateurs d'enseignants de mathématiques à observer une perte du sens et de la nécessité de la justification – sous toutes ses formes – dans la classe. En s'appuyant sur les nombreux travaux de recherche, il s'agit de problématiser le rôle du raisonnement, de la preuve et de la démonstration dans l'activité mathématique scolaire, et de dégager des pistes pour lui donner toute sa place.

INTRODUCTION A LA PREUVE EN MATHEMATIQUE : LA MEDIATION D'ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES

Maria Alessandra Mariotti – Université de Sienne - Italie

Resumé. Ma contribution portera sur le potentiel didactique offert par l'utilisation d'un environnement de Géométrie Dynamique en ce qui concerne l'initiation des étudiants à la pratique de la preuve dans les classes de Mathématique. La théorie de la médiation sémiotique offrira le cadre théorique pour décrire et expliquer le rôle de contextes informatiques dans la promotion du sens de la preuve des étudiants. Des exemples seront présentés, illustrant différents aspects du processus de médiation sémiotique, tel qu'il peut se dérouler dans la résolution de tâches spécifiques.

Introduction

Mon objectif n'est pas de donner un aperçu de la riche recherche sur la preuve en relation avec l'utilisation des technologies, mais d'illustrer les potentiels d'un type spécifique d'environnement d'apprentissage centré sur la Géométrie Dynamique pour favoriser un sens mathématique de la preuve et, plus largement, une perspective théorique.

Depuis quelque temps, le problème de la preuve et en particulier de la démonstration est devenu l'un des thèmes vivants de la didactique des mathématiques et, à ce titre, un thème aussi de mes études, et par conséquent le sujet de ma réflexion personnelle : mes idées sur la « preuve » ont changé pendant ces années, enrichies par les discussions et les résultats que la recherche internationale nous a offerts. Il est devenu de plus en plus clair à quel point il est difficile de renfermer l'idée de preuve mathématique dans une « définition » (un autre rêve de nous mathématiciens !) mais aussi de la renfermer dans un discours qui la décrit. De plus en plus et de mieux en mieux, on m'a montré le caractère humain, vivant, et donc insaisissable de quelque chose qui n'a de sens qu'en référence à une théorie, mais qui est pratique dans son essence.

Néanmoins, je suis convaincue que la preuve en général et l'aspect théorique des mathématiques en particulier, ne peuvent être négligés, considérés comme inessentiels dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Il n'est pas possible d'enseigner et d'apprendre les mathématiques en laissant les démonstrations à l'extérieur de la salle de classe.

Le but de cette contribution n'est pas tant de motiver cette affirmation, que bien que forte, pour beaucoup (enseignants, mathématiciens et professeurs de mathématiques...) peut sembler partageable, c'est plutôt de montrer des moyens possibles de résoudre le problème didactique qui se pose lorsqu'on a l'intention d'apporter des démonstrations en classe.

Ce que je présente ici sont quelques résultats d'expériences d'enseignement qui étudient l'utilisation des Environnements de Géométrie Dynamique pour initier les élèves du secondaire à la preuve et à la démonstration et, plus généralement, conçues avec l'objet/ le but du développement du sens mathématique de la preuve et du signifié spécifique de la démonstration. Ces expériences ont été réalisées par l'auteur, en collaboration avec un groupe d'enseignants. Certaines d'entre elles ont duré des années et ont impliqué différentes classes pendant toute une année scolaire (Mariotti, 2000, 2001a ; Cerulli et Mariotti, 2002).

Le cadre théorique dans lequel je vais placer ma contribution est la théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) qui offre un modèle pour décrire le processus d'enseignement et apprentissage centré sur l'utilisation d'outils ; l'élément clé sur lequel repose le processus de médiation sémiotique concerne d'une part, le lien entre l'usage d'un outil et les significations émergeant de cette utilisation dans les activités en classe et d'autre part, les notions mathématiques, qui sont l'objectif de l'enseignement. La discussion sur l'utilisation des outils informatiques dans la perspective de la médiation sémiotique repose sur les composantes suivantes :

- Analyse historique-épistémologique. Les notions mathématiques que nous avons l'intention de traiter.
- Analyse cognitive. L'utilisation d'un artefact selon l'accomplissement de certaines tâches, contribuant à l'émergence de significations, mais aussi la création d'un environnement significatif dans lequel le discours interpersonnel peut évoluer.
- Analyse didactique. La conception de l'intégration d'un artefact dans les activités de la classe. Strictement liée à l'analyse cognitive, l'analyse didactique vise à mettre en place la séquence d'enseignement.

Dans ce qui suit nous irons nous placer par rapport à la preuve et en particulier expliciter quelle signification mathématique constitue l'objectif didactique considéré dans notre étude, tels que l'idée de théorème en tant que système d'un énoncé, d'une preuve et d'une théorie dans laquelle une telle preuve prend du sens. Ensuite, l'introduction de la TMS nous donne le moyen d'interpréter le fonctionnement d'un environnement de Géométrie Dynamique en termes de potentiel sémiotique par rapport à la notion de théorème et cohéremment de décrire des expériences planifiées et vécues en classe.

Le point de vue historique- épistémologique : la notion de Théorème

Les racines profondes de la preuve dans les Mathématiques résident dans les éléments d'Euclide et dans la « manière d'exposer » particulière utilisée dans le célèbre traité (Heath, 1956, vol. I p. 115-116). La manière dont l'exposition proposée par Euclide a eu à cœur à la fois le contenu et la destination : le mode d'exposition renvoie à un « style de rationalité » particulier que certains historiens définissent précisément comme « euclidien ». La nature du style vient du fait qu'il est possible de concevoir la manière d'exposer des éléments comme une sorte d'idée régulatrice de l'organisation de la science, capable de produire des images de la science qui la rendent reconnaissable et plausible au sein d'une communauté. Que l'euclidien soit un style était connu des anciens : l'organisation en définitions, axiomes, démonstrations de théorèmes était devenue le « bon sens » d'une science qui se veut rigoureuse.

Dans ce cadre, une unité profonde lie l'organisation de l'exposition du savoir et sa compréhension, rendant l'organisation elle-même fonctionnelle à la compréhension du contenu, une compréhension qui est inextricablement liée au lien d'acceptabilité et de reconnaissance au sein d'une communauté scientifique.

Il nous semble que ces aspects font partie des aspects unanimement reconnus comme caractéristiques d'un corpus théorique et se retrouvent dans de nombreuses discussions concernant la nature et la fonction de la preuve (Hanna, 1983, 1990 ; Balacheff, 2019).

Tout ceci nous amène à souligner, comme caractéristique de la connaissance mathématique et de ses méthodes, une continuité profonde entre la construction de la connaissance et la systématisation de celle-ci dans un corpus théorique ; entre les aspects typiques de la connaissance en tant que produit culturel, comme la demande d'être compréhensible, et d'être accepté par la communauté de référence. Par conséquent, pour bien comprendre le sens des mathématiques, il n'est pas possible d'isoler la *démonstration* de l'ensemble des éléments par rapport auxquels la méthode de validation prend du sens. S'il est vrai que chaque élément de connaissance peut être associé à un énoncé, c'est sa démonstration qui établit son acceptabilité, mais une démonstration ne l'est que par rapport à une théorie qui établit des principes et des règles d'inférence partagés.

Tout théorème mathématique est caractérisé par un *énoncé* et une *démonstration*, mais la relation entre la proposition et la preuve que la valide prend le sens de la relation entre *énoncé* et *démonstration* seulement dans un *contexte théorique* particulier, c'est-à-dire un système de principes et de règles d'inférence partagés qui rendent acceptable la preuve (Mariotti 2003).

L'analyse historique-épistémologique met en évidence des aspects importants de ce lien complexe et montre comment il a évolué au cours des siècles. Mais la centralité de la théorie de référence comme élément crucial n'a pas disparu.

Le fait que dans la pratique scolaire la théorie de référence reste souvent implicite conduit à oublier ou du moins à sous-évaluer son rôle dans la construction du sens de la démonstration. Pour cette raison, du point de vue didactique, il semble nécessaire de ne pas isoler la notion de démonstration, de ne pas considérer une démonstration en soi, mais plutôt de se référer à un « théorème mathématique » en tant que système composé *d'un énoncé, d'une démonstration et d'une théorie de référence* (Mariotti et *al.*, 1997, 1, p. 182).

Le Problème didactique

La discussion précédente, et en particulier la caractérisation du théorème mathématique, nous permet de reformuler le problème didactique de manière mieux articulée. Pour l'introduction des étudiants à une perspective théorique, il y a trois aspects clés à traiter, interconnectés les uns avec les autres : l'idée d'énoncé, l'idée de démonstration et l'idée de théorie. La démonstration d'un énoncé particulier prend du sens à partir de la théorie par rapport à laquelle il est tel, de sorte que la construction du sens *de la démonstration ne peut être séparée de la construction du sens de la théorie.*

La Théorie de la Médiation Sémiotique

La Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008; Mariotti, 2009 ; Mariotti, 2010; Mariotti & Maracci, 2010; Mariotti, 2011) combine une perspective sémiotique et une perspective éducative et développe la notion de médiation sémiotique de Vygotskij (Vygotskij, 1978), considérant le rôle crucial de la *médiation humaine* (Kozulin, 2003, p.19) dans le processus d'enseignement-apprentissage.

Interpréter le processus d'enseignement-apprentissage d'un point de vue sémiotique, c'est reconnaître le rôle central des signes et décrire le processus d'enseignement-apprentissage comme un processus d'évolution (transformation dans une direction donnée) des signes. En particulier, TMS se concentre sur la production de signes, car ils trouvent leur origine dans l'utilisation d'un artefact, en relation avec les significations personnelles qui en découlent, et sur le processus de transformation de ces signes par l'interaction sociale ; une telle transformation peut être appliquée à des connaissances mathématiques spécifiques et aux signes qui y sont liés, ainsi l'évolution des signes peut être considérée comme une indication d'un changement dans la relation entre le sujet et la connaissance mathématique, et finalement comme une preuve d'apprentissage.

Lors de l'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche, les significations personnelles des élèves émergent. De telles significations peuvent être liées à des significations mathématiques, mais l'établissement d'une telle relation spontanée pour un expert, n'est pas un processus spontané pour les étudiants. Néanmoins, il peut s'agir d'un objectif éducatif explicite pour l'enseignant, qui peut *intentionnellement* orienter ses propres actions pour promouvoir l'évolution des significations personnelles vers les significations mathématiques. L'évolution peut se produire par l'interaction sociale, de sorte que dans un contexte de classe de mathématiques, les signes produits par les élèves et exprimant la relation entre l'artefact et la tâche dans laquelle il est utilisé, peuvent évoluer en signes exprimant la relation entre l'artefact et les Mathématiques (figure 1).

L'organisation et la promotion de ce processus sémiotique ont été au centre de nos études, basées sur des expériences pédagogiques à long terme (voir, par exemple, Mariotti et al, 1997 ; Bartolini Bussi, 1996 ; Bartolini Bussi et coll., 1998 ; Mariotti, 2000 ; Mariotti & Cerulli, 2001) à partir duquel le cadre théorique est né et s'est développé, autour de deux éléments clés : la notion de potentiel sémiotique d'un artefact et la notion de cycle didactique (pour une discussion complète, voir Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

Comme indiqué ci-dessus, l'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche particulière peut évoquer (Hoyles, 1993) des connaissances mathématiques spécifiques. En fait, au-delà du sens immédiat de son utilisation, les experts – mathématiciens, et en particulier les enseignants – peuvent reconnaître des notions mathématiques dans la résolution d'un problème spécifique avec l'artefact. Par exemple, la notation positionnelle et la notation polynomiale des nombres peuvent être évoquées par un abacus et par son utilisation dans le comptage ou l'addition ; de même, comme nous le verrons dans ce qui suit, la construction d'une figure stable dans un système de géométrie dynamique peut évoquer la géométrie classique « règle et compas ». Dans le cadre de la TMS, la définition suivante vise à expliciter la double relation qui peut lier un artefact à la sphère des individus et à celle de la culture, aux significations personnelles et mathématiques. En même temps, une telle définition vise à attirer l'attention sur la nécessité d'une distinction claire entre les significations liées à l'utilisation d'un artefact, en particulier celles liées à l'individu accomplissant une tâche, et les significations liées au contenu mathématique en tant que réalisation culturelle.

Une double relation peut se produire entre un artefact et d'une part les significations personnelles émergeant de son utilisation pour accomplir une tâche (activité instrumentée), et d'autre part les significations mathématiques évoquées par son utilisation et reconnaissables comme mathématiques par un expert.

Nous appellerons ce double lien sémiotique le *potentiel sémiotique* d'un artefact. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 754)

La notion de potentiel sémiotique capture l'idée qu'un artefact peut être utilisé pas seulement par l'élève pour accomplir une tâche, mais aussi comme véhicule d'apprentissage, en d'autres termes, il peut être utilisé par l'enseignant comme *un outil de médiation sémiotique*. Une fois son utilisation introduite dans les activités en classe, l'enseignant peut exploiter son potentiel sémiotique pour favoriser l'apprentissage des Mathématiques par les élèves. L'analyse du potentiel sémiotique doit être considérée comme une phase a priori qui constitue le cœur de la conception de la séquence d'enseignement.

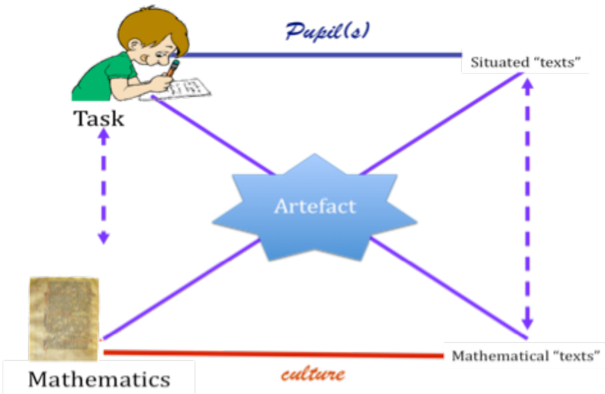


Figure 1– Le modèle TMS pour le processus d'apprentissage et enseignement

L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) telle que développée par certains auteurs (Trouche, 2005 ; Artigue, 2002 ; Lagrange, 2000) offre un cadre efficace pour une analyse a priori de l'utilisation de l'artefact avec différentes tâches et fournit la base d'une analyse cognitive et épistémologique qui contribue à l'identification des significations potentielles qui pourraient émerger au cours des activités des élèves et les significations mathématiques associées.

L'exploitation du potentiel sémiotique de l'artefact implique pour l'expert (par exemple, l'enseignant) une prise de conscience de son potentiel en termes de significations mathématiques évoquées et de significations personnelles émergentes pendant l'activité en classe. D'une part, l'enseignant doit concevoir des situations didactiques où les élèves sont confrontés à des tâches qui sont censées mobiliser des schémas spécifiques d'utilisation et, par conséquent, des situations dans lesquelles ils sont censés générer des significations personnelles. D'autre part, l'enseignant doit orchestrer les interactions sociales dans le but de faire en sorte que les significations personnelles, qui ont émergé au cours des activités centrées sur les artefacts, se développent dans les significations mathématiques qui constituent les objectifs de l'enseignement.

Dans le cadre de la TMS, je décrirai comment un Système de Géométrie Dynamique (SGD) offre un contexte favorable pour une approche de la preuve ; en particulier, comment certains de ses éléments peuvent fonctionner en tant qu'outils de médiation sémiotique pour développer des significations mathématiques liées à la démonstration : notamment, comme discuté ci-dessus, les significations liées à la notion de théorème en tant que système d'énoncé, démonstration et théorie.

Déterminer le potentiel sémiotique d'un artefact donné, demande d'identifier une tâche, identifier les significations personnelles qui peuvent émerger pour chaque élève de l'utilisation de l'artefact pour accomplir cette tâche et après cela, les relier aux significations mathématiques qui sont l'objectif de l'intervention didactique.

Les constructions géométriques

Partons du cœur de l'analyse qui réside dans la relation, immédiatement évoquée dans l'esprit de tout mathématicien, entre les figures réalisées dans un SGD, et la notion mathématique de construction géométrique. Une telle relation peut être élaborée du point de vue de la médiation sémiotique à travers une analyse épistémologique et cognitive, conduisant à l'identification du potentiel sémiotique de l'artefact 'SGD' par rapport à la signification du théorème.

En géométrie euclidienne, traditionnellement appelée « géométrie de règle et de boussole », les problèmes de construction ont une position centrale. La nature théorique d'une construction géométrique est clairement énoncée, et ce en dépit de son objectif pratique apparent, c'est-à-dire le dessin qui peut être produit sur une feuille de papier suivant la procédure de résolution (Mariotti, 2007). Comme le souligne clairement Vinner :

> The ancient Greek undertook a challenge which in a way represents some of the most Caractéristiques typiques des mathématiques pures en tant que discipline abstraite. Il n'est lié à aucun besoin pratique. (Vinner, 1999, p. 77)

Une construction géométrique consiste en une procédure qui, grâce à l'utilisation d'outils spécifiques et au respect de règles établies, produit un dessin. Une construction doit être considérée comme correcte si les outils ont été utilisés en respectant les règles établies. Certes, au-delà de toute réalisation concrète possible, qui peut être obtenue sur une feuille de papier à l'aide des outils techniques disponibles, une construction géométrique a une signification théorique, qui dépasse tous les objectifs pratiques apparents.

L'histoire des « problèmes impossibles » classiques, qui a tant engagé les mathématiciens grecs, clarifie le sens purement théorique du problème de construction (Henry, 1993). Les outils et les règles correspondent aux axiomes d'une théorie, de sorte que chaque construction correspond à un théorème spécifique ; le théorème établit les relations entre les éléments d'une figure géométrique, qui est représentée par le dessin produit par la construction, et *valide* ainsi la construction elle-même. La relation entre construction et théorème qui fournit une validation est très complexe, comme en témoigne la discussion qui date de l'antiquité entre problèmes et théorèmes (Heath, 1956, pp. 124-31).

Certes, la relation entre construction et théorème qui est valable par rapport à une théorie n'est pas immédiate, elle ne l'est pas spécialement pour les élèves (Mariotti, 1996), mais une organisation appropriée de l'environnement d'apprentissage permet d'activer un processus de médiation sémiotique basé sur des outils spécifiques (artefacts) d'un système de géométrie dynamique

D'une part, certaines des primitives et leur utilisation correspondent aux objets et propriétés de base de la géométrie euclidienne : en particulier, l'utilisation de la ligne droite et du cercle sont des allusions cohérentes au compas et à la règle.

D'autre part, la dynamique de manipulation des figures d'un SGD, en maintenant les propriétés construites par déplacement, respecte le critère de validation spécifique au sein du système de propriétés de la géométrie euclidienne.

En s'appuyant sur ces deux aspects qui relient un environnement GD et la Géométrie (comprise comme un système théorique), il est possible de construire une correspondance entre les constructions et les théorèmes, mais plus spécifiquement entre le critère de validation au sein du système GD et les critères de validation théorique.

En fait, l'utilisation de la règle et du compas génère un ensemble d'axiomes définissant le système théorique des éléments d'Euclide, donc tout problème de construction à résoudre dans la géométrie euclidienne – disons une construction géométrique – conduit à un théorème qui valide la procédure de construction qui le résout.

L'apparition des SGD a déclenché un nouvel intérêt pour les constructions géométriques. L'utilisation d'outils virtuels permet de simuler l'utilisation de la règle et de la boussole de la géométrie classique : des lignes et des cercles se croisant, dessinés au fil des siècles sur le sable, le papyrus ou le papier, sont maintenant reproduits sur un écran d'ordinateur. Tout SGD offre quelque chose de nouveau dans le monde classique des figures papier et crayon : les dessins à l'écran peuvent être exploités, en utilisant la « modalité de déplacement ». Cette modalité permet la transformation des figures d'écran, en changeant les points de départ de la construction, mais en conservant toutes les propriétés définies par la procédure de construction. En conséquence, la stabilité des propriétés caractéristiques de la figure dessinée par rapport au déplacement constitue le test naturel/standard d'exactitude pour toute tâche de construction dans un SGD.

De plus, considérons un SGD comme Cabri ou GeoGebra : les éléments de toutes les figures dynamiques sont liés selon la hiérarchie des propriétés déterminée par le processus de construction qui les ont produites. Une telle hiérarchie de propriétés correspond à une relation de dépendance logique entre elles, tandis qu'un sous-ensemble des outils disponibles dans un menu Cabri peut être lié à son ensemble correspondant d'outils de construction en géométrie euclidienne (Laborde & Laborde, 1991). Cette correspondance permet de mettre le contrôle par « glissement » en relation avec « théorèmes et définition » dans le système de géométrie euclidienne (Mariotti, 2000 ; Jones, 2000).[1]

En résumé, en ce qui concerne les outils disponibles dans un SGD, une double relation est reconnaissable. D'une part, les outils sont liés à la tâche de construction qui peut être résolue par leur utilisation, résultant dans l'apparition d'une figure dynamique, et à la stabilité d'une telle figure par déplacement ; d'autre part dans un SGD, des outils spécifiques peuvent être liés aux axiomes géométriques et aux théorèmes qui peuvent être utilisés pour valider la solution du problème de construction correspondant dans la théorie de la géométrie.

Par conséquent, le potentiel sémiotique d'un SGD est reconnaissable, résidant dans la double relation qu'il a avec la signification de figure dynamique, telle qu'elle émerge de l'utilisation de ses outils de dessin virtuels pour résoudre des problèmes de construction contrôlés par le test de déplacement, et la signification théorique de la construction géométrique telle qu'elle est définie dans la géométrie euclidienne par rapport à un ensemble d'axiomes donné.

Exploiter le potentiel sémiotique de l'artefact SGD devient donc l'hypothèse pédagogique clé inspirant la conception d'une séquence d'enseignement qui, selon l'itération de la structure d'un cycle didactique, consiste en des activités impliquant l'utilisation de l'artefact et des activités sémiotiques visant à l'élaboration individuelle et sociale des signes.

L'utilisation de l'artefact était centrée sur une *tâche de construction* qu'il exigeait des élèves de :

1) produire une figure dynamique avec des propriétés données, une figure qui devait être stable par déplacement ;

[1] En fait, un SGD fournit un ensemble plus large d'outils, y compris, par exemple, la « mesure d'un angle », la « rotation d'un angle » et autres. Cela implique que l'ensemble des constructions possibles ne coïncide pas avec celle qui ne peut être atteinte qu'avec la règle et le compas, voir (Stylianides & Stylianides, 2005) pour une discussion complète.

2) rédiger la description de la procédure utilisée pour l'obtenir et produire une validation 'géométrique' de la construction réalisée.

La tâche de construction consistait en deux demandes, la première correspondant à agir avec l'artefact, la seconde à produire un texte écrit faisant référence à de telles actions. Notez que la production d'un texte écrit consistait à la fois à décrire et à valider la procédure effectuée. La demande de *validation* de la solution avait du sens par rapport à l'environnement dynamique, correspondant à la nécessité d'expliquer et de mieux comprendre la raison pour laquelle la figure à l'écran réussissait le test de déplacement.

Le processus de médiation sémiotique qui démarrait dans la production sémiotique des élèves – les textes qui accompagnaient la construction dans le SGD – se déroulait par des interactions sociales orchestrées par l'enseignant dans de véritables discussions mathématiques (Bartolini Bussi, 1998 ; Mariotti, 2001). Alors qu'au tout début, le terme construction n'avait de sens que par rapport à l'utilisation d'outils virtuels particuliers et à la réussite du test de déplacement, plus tard, le sens avait lentement évolué, acquérant le sens théorique de la construction géométrique.

Une telle évolution pouvait être accomplie, sous la direction de l'enseignant exploitant la correspondance entre les axiomes euclidiens et les outils spécifiques du SGD et leurs modes d'utilisation. À partir d'un menu vide, le choix des outils appropriés pour commencer était discuté ainsi que la correspondance avec un ensemble *d'axiomes de construction* constituant le premier noyau de la théorie de la géométrie auquel toute validation pouvait se référer. Ensuite, tant que de nouvelles constructions étaient produites, les théorèmes correspondants étaient validés et ajoutés à la théorie. Les élèves pouvaient expérimenter et participer à deux processus parallèles d'évolution : d'une part, l'agrandissement du menu du SGD et, d'autre part, le développement correspondant d'une théorie de la géométrie.

Nous pouvons affirmer que les élèves ont été initiés à la culture des théorèmes, parce qu'ils n'ont pas seulement produit de nouveaux énoncés et leurs preuves, mais ils ont également eu l'occasion de prendre conscience de la théorie dans laquelle les preuves avaient un sens, et de la façon dont une telle théorie se développait.

Les résultats de plusieurs expériences d'enseignement à long terme attestent de l'émergence de significations intermédiaires, enracinées dans le champ sémantique de l'artefact, et de leur évolution en significations mathématiques, cohérentes avec la géométrie euclidienne. En particulier, l'expérience en classe a mis en évidence comment les significations émergeant de l'utilisation d'outils dans le monde contraint du SGD étaient efficaces pour développer et entrelacer le sens de la preuve et le sens de la théorie. L'utilisation d'un certain outil médie le sens de l'application d'un axiome ou d'un théorème, tandis que l'idée du menu dans le SGD, c'est-à-dire l'ensemble des outils disponibles, médie le sens de la théorie. La *conventionnalité* et la *nature évolutive* d'une théorie ont clairement émergé lors de discussions collectives où les élèves ont expérimenté à la fois l'établissement et le développement d'une théorie de la géométrie en exploitant la possibilité de personnaliser le menu en sélectionnant les outils à utiliser.

En résumé, un DGE offre un contexte riche et puissant pour initier les étudiants à une perspective théorique, dans la mesure où son utilisation et son fonctionnement dans la résolution de tâches spécifiques de construction fournissent un environnement pour des expériences phénoménologiques se référant aux significations mathématiques des :

- théorèmes géométriques qui valident une construction géométrique spécifique,
- actions métathéoriques liées au développement de la théorie par l'ajout de nouveaux théorèmes.

Les expériences en classe, réalisées à travers plusieurs expériences d'enseignement à long terme, ont confirmé à la fois le déploiement du potentiel sémiotique et l'évolution d'un sens entrelacé de la preuve et du sens de la théorie. Différents aspects d'une telle évolution sont présentés et discutés dans plusieurs articles (Mariotti, 2000, 2001, 2007, 2009), je ne donne ici que quelques exemples tirés de la riche collection de données collectées dans les expériences d'enseignement. Les extraits suivants fournissent des instantanés du long chemin d'évolution de la signification théorique de la construction et de sa relation avec la signification mathématique du théorème.

L'organisation du projet pédagogique

Il est facile de comprendre que l'établissement des règles est tout aussi important que le fait de les suivre. Voyons comment les règles de validation ont été définies et le signifié de *théori*e en tant que système de règles partagées établi.

Il y a deux niveaux de difficulté à affronter, qui présentent des problèmes différents, mais étroitement liés l'un à l'autre. D'une part, il faut introduire une nouvelle idée de validation qui ne repose plus sur l'acceptation immédiate et intuitive d'un fait, mais qui tienne compte d'un système de règles. D'autre part, ce système de règles doit être établi et clairement accepté et partagé par les élèves.

En général, au moment de l'introduction d'une axiomatique, ou des principes à partir desquels commencer nos déductions, nous sommes confrontés à une sorte de paradoxe : nous choisissons les axiomes en fonction d'un critère d'immédiateté intuitive qui les rend facilement acceptables comme vrais ; mais en même temps, une fois les axiomes établis, toute référence à l'intuition et aux critères de vérité évidente sera bannie. La confusion qui se crée entre ce qui est intuitivement vrai et ce qui est acceptable en termes de théorie est attestée par le comportement, souvent observé par les enseignants, des élèves qui, dans la démonstration d'un théorème, se réfèrent à des faits, ils disent « à des vérités », non encore démontrées et se justifient en déclarant : « c'est vrai ! ».

Voyons comment le projet s'est déroulé pour surmonter cette difficulté.

L'idée générale était d'utiliser l'environnement Cabri et d'initier progressivement les élèves à une géométrie déductive en construisant une correspondance entre la logique du logiciel et la théorie géométrique ; c'est-à-dire construire une relation dialectique entre les constructions de Cabri et les théorèmes de géométrie, basée sur la correspondance entre les commandes de Cabri et les propriétés acceptables en théorie. Mais comme je viens de le mentionner, le problème central est de négocier les règles d'acceptabilité d'une construction.

Cabri est un micromonde qui correspond à la géométrie euclidienne (géométrie « de la règle et du compas »). Le seul problème est qu'il ne s'agit pas d'un *micro* monde, mais plutôt d'un *macro* monde, autrement dit le logiciel tel qu'il est, est trop riche ; et surtout la validation d'une construction, en termes de théorèmes géométriques, présuppose ce contrôle sur le système géométrique qui est précisément le but ultime de l'éducation géométrique.

En fait, l'idée de base d'un micromonde est de fournir un environnement de résolution de problèmes dans lequel les élèves peuvent expérimenter les règles du système mathématique sous-jacent et, ce faisant, construire (dans leur propre esprit) leur propre système mathématique. Dans le cas de Cabri, la complexité du système mathématique sous-jacent est trop élevée, en réalité dans Cabri toute la géométrie euclidienne est disponible en même temps (!), mais surtout, les relations entre les concepts de base disponibles à travers les primitives de Cabri (parallèle, perpendiculaire, milieu, bissectrice, etc.) restent largement cachées. En fait, les outils géométriques disponibles dans le « menu » standard de Cabri présentent une richesse en termes théoriques qui rend difficile l'établissement de la distinction entre ce qui est donné (axiomes) et ce qui doit être prouvé (théorèmes).

En ce sens, l'idée de base du projet, utiliser l'environnement Cabri comme médiation pour un environnement théorique, a été adaptée à nos objectifs. Pour surmonter les problèmes liés à l'ambiguïté entre axiomes et théorèmes, il a été décidé de ne pas utiliser le menu prêt à l'emploi de Cabri, correspondant à la géométrie euclidienne dans son ensemble, mais plutôt de construire avec les élèves, étape par étape, notre « menu ». Au début, un menu vide a été présenté et le choix des commandes à introduire a été discuté, correspondant à des affirmations spécifiques choisies comme faits de base à partir desquels commencer.

Par la suite, les commandes que nous décidons d'introduire seront discutées et négociées avec les élèves au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont faites et acceptées, correspondant à des théorèmes prouvés. De cette façon, nous avons essayé de faire participer les élèves à la construction d'une axiomatique ainsi que du « menu » correspondant dans l'environnement Cabri.

La progressivité avec laquelle les éléments de la théorie sont introduits a une contrepartie dans la transformation ultérieure du menu, qui acquiert de nouvelles primitives et est amélioré. L'accent mis sur la nécessité d'établir les règles et de les respecter est souligné par une certaine flagrante sensation avec laquelle une nouvelle primitive est ajoutée au « menu » et en même temps, un nouveau théorème est introduit. Comme pour un nouveau théorème, l'énoncé ainsi que sa « preuve » sont acceptés par la classe et transcrits dans un « Cahier de géométrie » personnel.

Les élèves connaissent la présence de primitives et savent aussi qu'il serait possible de les utiliser, mais la conscience des choix faits et la nécessité de les respecter, donnent un sens à la conventionnalité du système théorique qu'ils sont en train de construire et initient les enfants à la difficile distinction entre ce qui est vrai et ce qui est valide dans une théorie. Distinction qui, comme nous l'avons mentionné au début, constitue l'un des principales difficultés pour la compréhension du sens de la démonstration.

Dans le même temps, le système géométrique est construit progressivement, de sorte que la complexité augmente pas à pas : l'objectif est de fournir des niveaux successifs de complexité qui peuvent être maîtrisés par les élèves. Si le système complet est présent dès le début, il y a un risque que les élèves ne puissent pas contrôler toutes les relations en jeu, en particulier les relations entre ce qui *est donné* et ce qui *doit être démontré.*

Quelques exemples tirés des protocoles des élèves

Pour illustrer ce qui a été dit, nous allons présenter quelques protocoles. Ils concernent le même binôme d'élèves et les solutions proposées par eux sont liées à différentes tâches qui ont eu lieu dans le parcours éducatif. Dans la séquence des protocoles il est possible d'observer l'évolution de la perspective théorique, son lien avec le problème de construction et sa solution dans l'environnement de GD. Il est également possible de voir comment la clarification de la perspective théorique va de pair avec l'évolution de la forme expressive utilisée par les élèves.

Approche initiale

Comme expliqué ci-dessus, les élèves commençaient à travailler avec des menus Cabri vides qui étaient progressivement agrandis à la suite d'une discussion collective. Lorsqu'ils ont commencé à travailler sur la première tâche de construction, les menus avaient inclus les primitives du menu de création, et dans le menu de construction, les commandes étaient réduites à « Intersection d'objets », « Compas » et « Rapport d'angle[2] ». Du point de vue théorique, cette situation correspondait aux trois critères de congruence pour les triangles que les élèves avaient déjà incorporés dans leur système théorique et auxquels ils pouvaient se référer dans leurs démonstrations.

La tâche suivante est présentée aux élèves :

> Construire la bissectrice d'un angle. Décrivez et démontrez (justifiez géométriquement) votre solution.

Les élèves n'ont pas de difficultés à produire une construction, certains d'entre eux l'avaient déjà utilisée au collège. D'autre part, l'exécution de la procédure n'est que la première étape de la tâche. Des difficultés arrivent lorsque la procédure doit être décrite et surtout démontrée, ce qui veut dire justifiée selon les principes énoncés dans la théorie, c'est-à-dire se référant aux règles partagées et acceptées dans la salle de classe.

Alex et Gio (9th grade)

1ère tentative

> Nous avons pris deux points et nous avons fait passer une ligne à travers eux, puis nous avons pris un autre point *C*, qui n'appartient pas à la première ligne. Nous avons joint le point qui n'appartient pas à *r*1 avec une deuxième ligne, ce qui nous a permis de déterminer un angle.
>
> Nous avons transféré (ital. *abbiamo riportato*) un segment *AB*, appartenant à *r*1 et nous avons transféré le même segment sur *r*2 (*AB* = *AC*); nous avons dessiné deux cercles (centre, point) centre en *C* et point *A* et centre en *B* et point *A* (ital. *puntando in C e apertura AC e puntando in B con apertura AB*).
>
> Nous avons rejoint *A* et *D* (ligne passant par deux points). Nous avons pris l'intersection entre le cercle et la ligne, mais... [les élèves ont testé la construction avec le déplacement] RATÉ !

2ème tentative

> Nous avons dessiné un angle comme nous l'avions fait lors de la première tentative (figure 2). Nous avons dessiné un cercle (centre/point), en prenant un point appartenant à *r*1.
>
> Ce cercle nous a donné les segments *AB* et *AC* appartenant à *r*1 et *r*2, qui sont égaux parce qu'ils sont des rayons du même cercle. Nous avons dessiné deux cercles (centre *B* et *C* point *A*) en utilisant l'intersection de deux objets (des deux cercles) nous avons trouvé le point *D* que nous avons joint avec *A* déterminant la bissectrice de l'angle.

---

[2] La macro pour copier un angle ; elle était disponible dans une des premières versions de Cabri, utilisée à cette époque.

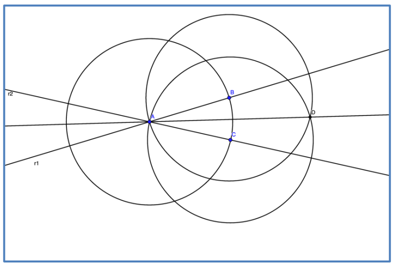


Figure 2 – La 2ème tentative

La solution est divisée en deux parties correspondant à des tentatives successives. Dans la première tentative, quelque chose s'est produit qui a conduit à l'échec de la construction ; malgré ce qu'ils avaient écrit, les élèves avaient rendu les deux segments AB et AC égaux « à l'œil ». Lorsque le binôme a réalisé que sa première tentative avait échoué, il a commencé une nouvelle tentative. Il est intéressant de noter que la première tentative a été considérée comme un échec parce qu'elle ne passait pas le test du déplacement. Cela signifiait que le test du déplacement avait été accepté comme moyen de vérification. Dans la deuxième partie, le texte de la description est plus précis, comme si, après le premier échec, les élèves avaient ressenti le besoin d'être plus attentifs à leur procédure de construction. En même temps, il présente une première trace rudimentaire d'une justification : « Ce cercle nous a donné deux segments AB et CD appartenant à $r1$ et $r2$, *qui sont égaux parce qu'ils sont des rayons du même cercle* ». Cette phrase, insérée dans la description de la procédure, ne peut être considérée comme une « preuve », néanmoins, elle montre que les élèves ont accepté la demande de justification et ont essayé d'utiliser les principes de validation provenant de la commande Cabri qu'ils ont utilisée.

Au fur et à mesure que la séquence des activités progresse, la théorie s'élargit ; lentement de nouvelles constructions font désormais partie de la théorie. En général, au moment où les élèves rencontrent une nouvelle tâche de construction, la théorie contient quelques éléments supplémentaires. Par exemple, après la construction de la bissectrice d'angle, la perpendicularité a été introduite et la définition formulée comme suit :

Définition. *La droite t est perpendiculaire à la droite s si et seulement si t est la bissectrice d'un angle droit avec le sommet sur s.*

Ensuite, le théorème suivant pour le triangle isocèle a été démontré.

Théorème. *Dans tout triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base opposée.*

La tâche suivante a ensuite été posée aux élèves :

> Étant donné une droite r et un point P ne lui appartenant pas. Construire la ligne perpendiculaire à r passant par P.

Voici la solution donnée par le même couple d'élèves, Alex et Gio.

> *Alex et Gio (9th grade)*
>
> Nous avons pris une ligne r, en passant par les points A et B, puis nous avons pris un point C n'appartenant pas à r.

Ensuite, nous avons dessiné un cercle (centre, point) ayant *AC* comme rayon, puis nous l'avons tracé, en se concentrant sur *A*. Nous avons dessiné un cercle (centre, point) ayant un rayon *BA* et un centre *B*.

Nous avons ensuite déterminé les points *C* et *D* avec « intersection de deux objets » et nous avons joint *C* et *D*.

$CD \perp AB$

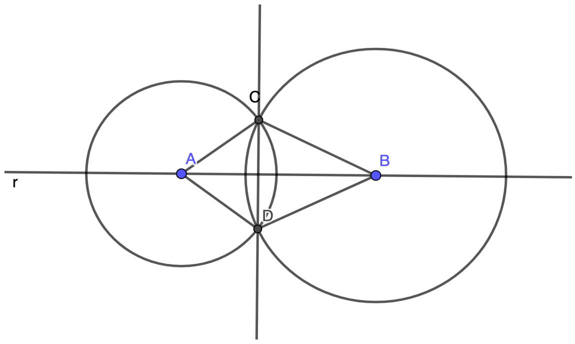


Figure 3 – La construction d'Alex et Gio

Démonstration
Considérons les triangles *ABC* et *ABD* qui sont égaux pour le 3ème critère →
AB en commun,
AC = *AD* parce qu'ils sont des rayons du même cercle
DB = *CB* car rayons du même cercle

Les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, donc les angles égaux ∠ *ABC* et *ABD* sont opposés aux côtés ∠ *CA* et *AD*. Les angles *CAB* et *BAD* sont opposés aux côtés *CB* et *BD*. Nous savons que les angles ∠ *BCD* et *BDC* sont égaux ∠ parce qu'ils sont à la base d'un triangle isocèle et que les angles ∠ *ACD* et ∠ *ADC* sont égaux.

Les triangles *DOA* et *AOC* [le *point O est marqué sur le dessin mais il n'a pas été explicitement défini*] sont égaux selon le 2ème critère, à savoir que les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, donc les angles *COA* et *DOA* sont égaux et les angles droits... Les angles *AOC* et *DBO* sont égaux car ils sont verticalement opposés.

Ce protocole, par rapport au précédent, montre que les élèves ont gagné un bon contrôle théorique dans la résolution de la tâche de construction : autant dans la conception de la procédure de construction, que dans sa validation. Ils sont capables d'utiliser les propriétés dérivées de l'usage des outils (le cercle et la ligne) mais aussi le théorème disponible dans la théorie.

Les élèves séparent clairement la description de la construction et sa justification. Et la preuve se réfère correctement à la théorie disponible. Ce n'est pas la construction la plus courante, et en fait, l'utilisation des deux points (*A* et *B*) déterminant la droite donnée *r*, produit deux cercles avec des rayons différents, ce qui rend la validation plus compliquée, nécessitant une analyse délicate de la figure surmontant les preuves intuitives. Néanmoins, Alex et Gio réussissent à trouver une justification, correctement liée au processus de construction, c'est-à-dire ne prenant en compte que les relations provenant de la construction et se référant à la théorie disponible.

Conclusions

L'approche didactique présentée ci-dessus s'inspire d'une analyse historico-épistémologique : dans les Éléments d'Euclide, il est possible de retrouver l'origine de la nature théorique des mathématiques, et en particulier le rôle clé joué par l'utilisation d'artefacts spécifiques dans la solution des tâches de construction. La perspective théorique obtenue dans la solution des problèmes de construction, peut fournir une clé pour accéder au sens général de la théorie.

Dans la solution d'une tâche de construction, l'utilisation d'artefacts spécifiques disponibles dans un EGD (par exemple les commandes spécifiques correspondant à l'utilisation de la règle et du compas) montre leur potentiel sémiotique par rapport au développement d'une approche théorique de la géométrie, amenant les élèves à résoudre des problèmes, énonçant des axiomes et prouvant des théorèmes, surmontant le sens pratique immédiat de la construction en tant que produit d'une image à l'écran, vers le sens théorique abstrait de la construction en tant que procédure pouvant être validée par des moyens théorétiques.

Fournir une justification de l'exactitude d'une construction est censé évoluer en fournissant une démonstration au sein d'une théorie, mais une telle évolution ne se produit pas spontanément, au contraire l'évolution révèle sa complexité, mais la spécificité de l'environnement auquel les arguments sont liés, et la direction directe de l'enseignant peut déterminer cette évolution. L'enseignant peut utiliser différents moyens pour accomplir sa tâche, mais l'artefact offre des outils spécifiques de médiation sémiotique qui peuvent être utilisés par l'enseignant en fonction de l'objectif éducatif particulier.

Traditionnellement, la géométrie est le domaine disciplinaire dans lequel les théorèmes et les preuves sont introduits ; bien que l'algèbre soit basée sur un arrangement théorique depuis plus[3] d'un siècle, elle semble être complètement réfractaire à un traitement théorique au niveau scolaire. Au contraire, des expériences dans ce sens ont été faites, précisément des expériences d'enseignement qui ont traité en parallèle à la fois l'algèbre et la géométrie dans la même classe (Cerulli et Mariotti, 2002).

Nous n'avons pas le temps de nous attarder sur cet aspect très intéressant du point de vue de la transposition didactique (Chevallard, 1985), cependant, il suffit de rappeler que ce qui est proposé pour la géométrie ne peut être séparé d'une attitude cohérente dans le traitement de l'algèbre, sous peine d'une dangereuse distorsion des objectifs pédagogiques. Bien que ce que nous avons présenté concerne une fois de plus le domaine géométrique où il semble être traditionnellement confiné, le problème de la preuve et d'une approche déductive concerne toutes les mathématiques et ceci offre à la didactique plusieurs opportunités.

Reférences

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, *7*, 245-274

[3]Peacock publia en 1830 son *Traité d'algèbre*, dans lequel il tentait de donner à cette branche des mathématiques une structure logique comparable à celle des Éléments d'Euclide. La méthode qu'il utilise, puis perfectionne en deux volumes publiés en 1842 et 1845, marque le début de l'approche axiomatique dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre.

Balacheff N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131.

Bartolini Bussi M. G. (1998). Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M Bartolini Bussi. & A. Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston VA: NCTM, 65-84.

Bartolini Bussi, M. G., and Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh (Eds). *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ, 746-805.

Cerulli M. & Mariotti M.A. (2002). L'algebrista : un micromonde pour l'enseignementet l'apprentissage de l'algèbre de calcul, *Sciences et Techniques Educatives*, Numéro spécial Algèbre vol 9 n°1-2, 149-170.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*, OISE Press, Toronto.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof, *Interchange* 21,1, 6–13.

Heath, T. L. (1956). (ed.) *Euclid. The thirteen books of the elements*, V.1, Dover.

Henry, P. (1993). Mathematical machines, in Hanken, H., Karlqvist, A. & Svedin U., *The machine as metaphor and tool*, Springer-Verlag, 101-122.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for a deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 55-85.

Laborde, C. & Laborde, J.M. (1991). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In In J. P. Ponte, J. F. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* NATO AS1 Series F, New York: Springer-Verlag ,177-192.

Lagrange, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational studies in mathematics*, *43*(1), 1-30.

Mariotti M.A. (1996) Costruzioni in geometria, su *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 19B, 3, 261-88.

Mariotti M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics*, 44, 1&2, Dordrecht: Kluwer, 25 – 53.

Mariotti M.A. (2000). Constructions en Geometrie et le probleme de la preuve, *Actes de La X°Ecole d'été de Didactique de Mathematiques*, Houlgate, II- 115-122.

Mariotti, M. A. (2001a). Justifying and prooving in the cabri environment, *International Journal of Computer for Mathematical Learning, Vol. 6, n° 3* Dordrecht: Kluwer, 257-281

Mariotti, M.A. (2001b) La preuve en mathématique, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 1, 4, 437 – 458.

Mariotti, M.A. (2002). La preuve en mathématique, *ZDM,* 34, 4, 132-145.

Mariotti M.A. (2003). Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri, *Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques*, vol. 1, pp. 173-186, Paris.

Mariotti M.A. (2007). Proof and proving in mathematics education. A. Gutiérrez & P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 173-204. Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands.

Mariotti, M. A. (2011). Artefacts et signes dans la théorie de la médiation sémiotique. *Actes de la XVI ième école d'été de didactique des mathématiques de Carcassonne, du 21 au 28 aout 2011*, 197-218.

Mariotti M.A. (2012). Proof and proving in the classroom : Dynamic Geometry Systems as tools of Semiotic Mediation, in *Research in Mathematics Education*, 14, 2, 163-85.

Mariotti M.A . (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education,* 45, 441–452.

Mariotti, M. A. (2014). Transforming images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. In *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* 155-172. Springer, New York, NY.

Mariotti M.A. (à paraitre). La contribution des environnements technologiques à l'enseignement de la preuve, *Actes de la XI École d'Été de Didactique des Mathématiques,* Ile de Ré 18-24 oct. 2021.

Mariotti M.A., Maracci M (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In: G. Gueudet, L. Trouche. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en Mathématiques* . Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP, 91-107.

Mariotti, M. A.; Bartolini Bussi, M.; Boero, P.; Ferri, F.; Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts, *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol.1, pp. 180-195

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: A. Colin Editions.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10: 31–47

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, 137-162.

Vinner, S. (1999). The Possible and the Impossible, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 99/2, 77.

« CECI N'EST PAS UN CERCLE ». REMARQUES HISTORIQUES ET PHILOSOPHIQUES SUR LES RAISONNEMENTS PAR L'ABSURDE

David Rabouin
SPHERE, UMR 7219, CNRS-Univ. Paris Cité & ERC Philiumm (Adg n°101020985)

Introduction

Longtemps, on a répété que ce qui distinguait les mathématiques qui se déploient dans la tradition « grecque », par différence avec ce qui existe dans les traditions « babylonienne », « chinoise » ou « indienne », était l'existence de démonstrations. Beaucoup a été fait ces dernières années pour déboulonner ce mythe, à la fois en rappelant que dans les traditions présentées comme « algorithmiques[1] », les acteurs peuvent éprouver le besoin de démontrer la correction des algorithmes ; mais aussi en insistant sur le fait que les normes attachées à ce qui fait preuve en mathématiques sont très variables à travers le temps et l'espace, de sorte que nous avons moins affaire à des séparations nettes qu'à un continuum de pratiques variées. Ainsi, il n'est pas clair qu'un ouvrage comme la Géométrie (1637) de Descartes, qui a pourtant changé la face des mathématiques, comporte quelque chose comme des « démonstrations » (on y trouve surtout la solution de certains problèmes comme le fameux « problème de Pappus »). De même, le grand texte où Leibniz introduit son calcul différentiel, la *Nova methodus pro maximis et minimis* (1684), ne comporte pas le début d'une preuve, pas plus que les *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* (1827) de Gauss – sauf si l'on accepte justement d'intégrer aux sens du mot « preuve » le fait de montrer par le calcul tel ou tel résultat.

Au titre des ouvrages qui ont contribué à cette révision historiographique, on peut mentionner le volume dirigé par Karine Chemla : *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions* (Cambridge University Press, 2012). Or un trait frappant de cet ouvrage, qui va m'intéresser plus particulièrement dans cet article, est qu'il n'y est pas question des preuves par l'absurde, alors même qu'il entend réviser l'historiographie des preuves dans l'Antiquité. Si ce trait est frappant, c'est que les preuves par l'absurde tiennent une place de première importance dans les mathématiques grecques anciennes. Comme l'avançait Michel Chasles dans son *Aperçu historique* :

> Euclide introduisit dans les élémens de Géométrie, la méthode appelée *Réduction à l'absurde*, qui consiste à prouver que toute supposition contraire à une proposition énoncée conduit à quelque contradiction ; méthode utile surtout dans les questions où l'infini se présentait sous la forme des irrationnelles, dont Archimède dans plusieurs de ses ouvrages, et Apollonius dans son 4e livre des coniques, ont fait un usage heureux[2].

---

[1] Voir notamment les commentaires de Karine Chemla dans *Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Édition critique bilingue traduite, présentée et annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun, Calligraphies originales de Toshiko Yasumoto, Paris, Dunod, 2004.

[2] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Hayez, 1837, p. 9.

L'importance des preuves par l'absurde dans les mathématiques grecques anciennes peut s'apprécier à la fois quantitativement et qualitativement. Quantitativement, puisque près de la moitié des démonstrations du livre III des *Eléments* d'Euclide est produite *per absurdum*[3]. Plus généralement, les preuves par l'absurde tiennent une place très grande dans les mathématiques grecques classiques, jusqu'à occuper, comme le rappelle Chasles, l'intégralité du livre IV des *Coniques* d'Apollonius. Qualitativement, puisque ce type de preuve est au cœur des méthodes plus tard appelée « d'exhaustion », elles-mêmes voie royale pour la maîtrise des processus infinitaires dans ces mathématiques. Et c'est ici la référence à Archimède qui s'impose sous la plume de Chasles. Aussi ne paraît-il pas exagéré de parler à ce titre non seulement d'un joyau des mathématiques grecques, mais aussi d'un joyau qui leur appartenait en propre et qu'ils nous ont légué.

C'est un trésor dont les philosophes sont d'autant plus friands que les premières traces connues que nous ayons de ce raisonnement remontent aux *Eléates* et notamment à ces fameux « paradoxes » par lesquels Zénon entendait démontrer l'impossibilité du mouvement[4]. Ainsi s'y manifeste pleinement cette interaction si forte des mathématiques et de la philosophie, qu'il ne faut pas surestimer, mais qu'il ne faut pas sous-estimer non plus[5]. Or pour cette raison même, ce joyau est aujourd'hui un peu embarrassant, dans son écrin de discussions philosophiques que les mathématiciens préfèreraient parfois tenir à l'écart. Comme une bague de grand-mère qu'on garderait jalousement au fond du coffre parce qu'on sait qu'elle est précieuse, mais qu'on hésiterait à mettre au doigt. C'est cet embarras dont je voudrais faire le motif d'un cheminement historico-philosophique en compagnie de l'absurde en mathématiques.

Dans la première partie de cette étude, je repartirai de ces discussions philosophiques et insisterai sur la manière dont elles influencent notre regard sur les preuves par l'absurde jusqu'à aujourd'hui. Puis j'expliquerai pourquoi ce regard projette sur l'histoire des éléments qui ne semblent pourtant pas pouvoir tenir ensemble. Sur cette base, je me tournerai alors vers la période où nous possédons les critiques les plus claires sur les raisonnements par l'absurde, l'âge classique, pour en élucider quelques ressorts méconnus. Ceci me permettra pour finir de revenir aux géomètres grecs anciens en indiquant la manière dont on réévalue aujourd'hui leur rapport aux représentations mathématiques, précisément en insistant sur ce qui se joue dans les démonstrations par l'absurde.

1. Trois motifs de rejet des preuves par l'absurde

J'ai dit que le raisonnement par l'absurde était aujourd'hui un héritage un peu embarrassant, pourquoi ? Principalement pour trois raisons qui ne sont pas sans lien les unes avec les autres. 1) La première est que nous ne pouvons pas ignorer les critiques dont il a été l'objet du fait de son caractère « indirect ». Il suppose, en effet, un détour qui

[3] B. Vitrac, « Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages », conférence disponible en ligne (consulté le 15 avril 2023) : https://hal.science/hal-00496748v2/file/Les_dA_monstrations_par_l_absurde.pdf.

[4] Comme l'on sait, la version la plus ancienne de ces paradoxes nous est préservée au livre VI de la *Physique* d'Aristote. Du point de vue qui nous occupe ici, il serait plus correct de dire que Zénon n'entendait pas formuler quelque « paradoxe » lié au mouvement, mais souhaitait prouver l'immobilité de l'être, mise en avant par Parménide, et qu'il le fit en supposant que quelque chose n'était pas immobile et que cela conduisait à des absurdités.

[5] Pour un exemple de démonstration par l'absurde chez Platon, voir J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, PUF, 1991, p. 151-153.

ne va pas de soi : passer, pour établir la vérité d'une proposition, par sa négation (dont on entreprend d'établir l'absurdité)[6]. 2) La seconde raison, un peu différente mais liée, est que les démonstrations par l'absurde ne nous font pas comprendre *pourquoi* les choses sont telles qu'elles le concluent[7]. Que le contraire d'une proposition soit absurde ne paraît pas pouvoir m'*expliquer* pourquoi la proposition de départ était vraie, même si elle peut éventuellement m'en convaincre[8]. 3) Finalement, les raisonnements par l'absurde ont ceci de singulier, comme leur nom le rappelle, qu'ils nous demandent de prendre comme hypothèse de départ quelque chose d'impossible. Parfois nous ne le savons pas encore et la situation peut sembler moins choquante. Mais souvent, nous le savons déjà et une interrogation ne peut manquer d'émerger alors : est-ce que nous ne plaçons pas ainsi en dehors du monde mathématique, dans un royaume absurde dont les lois ne sauraient être les mêmes que celle du monde (supposé cohérent) des mathématiques ? N'y a-t-il pas d'ailleurs un danger à faire ainsi entrer le contradictoire dans nos raisonnements, à ouvrir la porte vers ce monde hors de la raison et du sens ?

Pour ne pas rester trop dans l'abstraction et montrer que ces réticences ne sont pas cantonnées à des options philosophiques qui pourraient paraître exotiques aux mathématiciens, commençons par prendre un exemple simple d'un tel raisonnement dans les mathématiques actuelles. Soit donc à démontrer que le centre d'un p-groupe ne peut être réduit à l'unité[9]. Par définition d'un p-groupe, l'ordre de ce groupe (le cardinal de l'ensemble sous-jacent) est une certaine puissance d'un nombre premier p et par le théorème de Lagrange, toutes ses classes de conjugaisons (dont le centre du groupe) devront être des diviseurs de cet ordre. Si le centre est réduit à l'unité, donc de cardinal 1, on obtient la formule des classes suivantes – où p^n à gauche est l'ordre de notre p-groupe et où les p^i à droite les cardinaux des classes de conjugaison (en nombre fini) :

$$p^n = 1 + p^r + p^s + p^t + \dots + p^u$$

Mais une telle égalité est évidemment absurde puisque p divise le membre de gauche sans diviser le membre de droite. Donc le centre ne peut être réduit à l'unité.

J'ai choisi ce premier exemple à la fois parce qu'il s'agit d'une propriété qui n'est pas nécessairement « évidente » pour tous les lecteurs et qu'on se trouve donc embarqué à écrire une formule qui a priori renvoie bien à quelque chose (les classes de conjugaison d'un groupe). Elle joue donc le rôle d'une représentation, qui a tous les airs d'une représentation ordinaire, mais qui s'avère, au bout de la preuve, ne représenter… « rien ».

---

[6] Sous sa forme canonique, un raisonnement par l'absurde commence par supposer la négation de la proposition à démontrer et en dérive une contradiction, ce qui indique que cette négation est fausse. Pour pouvoir conclure, il faut donc accepter que la fausseté de la négation d'une proposition est logiquement équivalente à la vérité de la proposition (loi de la double négation) ou encore qu'une proposition ne peut être que vraie ou fausse (loi du tiers exclu). Ces deux principes sont contestés par les intuitionnistes, ainsi que par différentes formes de constructivisme. De ce qu'on a établi l'absurdité de la négation d'une proposition, avancent-ils, on ne peut pas conclure qu'on a établi que cette proposition était *donc* vraie. Il se pourrait que cette alternative soit mal posée ou qu'elle n'ait pas de sens.

[7] Ainsi des auteurs comme Bolzano et Frege, qui n'ont pas de problème avec le tiers exclu, refuse-t-il les preuves par l'absurde non parce qu'elles seraient invalides, mais parce qu'elles sont incapables de donner la raison (*Grund*) de ce qu'elles démontrent, cf. P. Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, New York, Oxford University Press, 1996, chap. 4.3.

[8] Comme l'avance une lettre (vraisemblablement fictive, mais éditée dès le XVIIème s.) du Chevalier de Méré à Pascal : « Croyez-vous que ce soit connaître une chose que de savoir seulement ce qu'elle n'est pas ? » (*Lettres de Monsieur le chevalier de Méré. Première partie*, Paris, chez Claude Barbin, 1682, lettre XIX, p. 110-126).

[9] Le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in G$ tels que pour tout élément du groupe $x \in G$, on ait $yx = xy$.

Par la suite, je reviendrai sur le rôle de ces représentations « absurdes », qui ont été surtout étudiées du point de vue des diagrammes géométriques, alors que les mêmes résultats s'appliquent aisément aux formules symboliques[10].

Des démonstrations de ce type se trouvent bien évidemment en mathématiques dès les cas les plus élémentaires, par exemple lorsque l'on entreprend de démontrer que deux nombres réels a et b non nuls (plus généralement deux éléments inversibles d'un corps) ne peuvent être tels que l'on ait $ab = 0$. Pour cela, on suppose que $ab = 0$ avec a et b non nuls, puis on divise le produit ab (qui vaut 0 par hypothèse) par b supposé non nul, ce qui nous donne $a = 0$. Ceci contredit l'hypothèse (a et b non nuls), qui s'avère donc impossible à soutenir.

Présentant cet exemple à une étudiante à l'université (familière des démonstrations mathématiques sans être étudiante en mathématiques elle-même), Antonini et Mariotti ont recueilli les réactions suivantes : a). Pour effectuer une démonstration de ce type, je dois faire un détour par un monde absurde où une proposition que je sais vraie est niée ; tout se passe comme si les éléments a et b pouvaient voyager du monde réel au monde absurde ; b). une difficulté est que nous ne savons pas si les lois de la logique sont les mêmes dans le « monde absurde », si ce voyage des éléments est possible[11]. Le détour par le monde absurde paraît donc particulièrement périlleux. Il semble reposer sur une *croyance* que nous avons du mal à justifier (pourquoi les lois de la logique vaudraient-elles encore dans ce monde illogique ?).

Nous retrouvons ici le ressort des critiques 1 et 3. La démonstration indirecte nous force à passer par un monde qui a la caractéristique paradoxale d'être à la fois « absurde », « atopique » (*atopon* est le mot que les géomètres grecs utilisaient régulièrement pour qualifier l'absurdité d'un résultat), et de se comporter pourtant comme une simple image en miroir, symétrique de notre monde « réel ». Mais un monde « atopique » est littéralement « sans lieu », il ne représente « rien » et ne saurait s'obtenir comme simple image en miroir de ce qui « a lieu ».

Une formulation philosophique de ce malaise a très bien été exprimée par Wittgenstein dans ses *Remarques sur les fondements des mathématiques* :

> La difficulté que l'on ressent en mathématique avec la *reductio ad absurdum* est la suivante : que se passe-t-il avec cette preuve ? Quelque chose de mathématiquement absurde, et donc de non-mathématique ? Comment peut-on tout simplement accepter – a-t-on envie de demander – quelque chose de mathématiquement absurde ? Que je puisse accepter ce qui est physiquement faux et le réduire *ad absurdum* ne me donne aucune difficulté. Mais comment penser l'impensable, pour ainsi dire ? (L. Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*[12])

On pourrait également rappeler ici la formule célèbre du mathématicien Hardy affirmant que le raisonnement par l'absurde est bien plus subtil que tous les coups d'un jeu d'échec puisqu'en introduisant une contradiction au départ du raisonnement il semble être prêt à

[10] On trouvera en annexe un exemple type de démonstration par l'absurde dans la géométrie grecque ancienne.

[11] Antonini, S., Mariotti, M.A. "Indirect proof: what is specific to this way of proving?", ZDM Mathematics Education 40, p. 401–412 (2008).

[12] Je traduis à partir de L. Wittgenstein *Remarks On The Foundation Of Mathematics* (with the German original text), New-York, MacMillan, 1956 IV, 28. D'une manière générale, les références en langue étrangère données dans cet article sans mention de traduction sont traduites par moi.

sacrifier non pas telle ou telle pièce, mais… le jeu lui-même[13] ! C'est assurément ce que Wittgenstein éprouvait en avançant que présenter une absurdité mathématique revient à se placer d'emblée dans un monde « non-mathématique ». Et comment pourrait-on garantir que les lois de ce monde non-mathématique sont les mêmes que celle du monde mathématique ? Quel est le point de vue de surplomb qui autorise de tenir ainsi sous le regard ce qui a lieu et ce qui n'a pas lieu, ce qui est cohérent et ce qui est absurde ?

La critique 2 (sur le caractère non explicatif des preuves par l'absurde) est très courante parmi les philosophes et les mathématiciens, j'y reviendrai dans les prochaines sections. Mais elle est également présente dans les réponses des étudiants interrogés par Antonini et Mariotti. Ainsi l'un d'entre eux juge la preuve par contradiction artificielle parce que sa conclusion n'est pas liée à l'hypothèse (elle peut donc *a fortiori* encore moins lui servir d'explication !)[14]. Un autre étudiant fait remarquer que les preuves par l'absurde ne sont pas éclairantes parce qu'elles supposent de connaître à l'avance le résultat à démontrer (plutôt que de le produire sous nos yeux comme un fait nouveau)[15].

2. Une tension

Si j'ai rappelé ces trois critiques pour commencer, c'est qu'elles sont source de grandes tensions dans notre approche (rétrospective) de l'histoire des mathématiques. En effet, les différentes formes de sensibilités « constructivistes » ont eu tendance à avancer qu'il y avait eu un décrochage en mathématiques à partir du moment où l'on s'était autorisé à faire des raisonnements purement « symboliques » ou « aveugles » (en particulier lorsqu'ils touchent au maniement de classes infinies d'objets). Tel serait le péché originel par lequel on aurait commencé à s'autoriser à « penser l'impensable », pour reprendre la formule de Wittgenstein. Si a désigne un cercle et P la propriété d'être carré, rien ne m'empêche d'écrire la suite de symboles $P(a)$ et de la manipuler, même si $P(a)$ ne représente justement… rien. Et ainsi avec n'importe quel objet et n'importe quelle propriété mathématique. Tandis qu'une partie importante des mathématiques du XIXème siècle s'était développée en critiquant le recours à l'intuition, il fut alors rétorqué par différents courants que, quel que soit le bienfondé de ces critiques, il ne fallait pas éliminer trop vite l'idée qu'une existence, en mathématiques comme ailleurs, doit s'attester dans une intuition ou une construction. Si seuls quelques mathématiciens franchirent le pas de n'accepter *que* les raisonnements appuyés sur des intuitions et/ou des constructions, nombreux sont ceux qui furent et restent sensibles à l'idée qu'il ne faut pas abuser des manipulations « aveugles ».

Il est très intéressant de remarquer, sous ce point de vue, qu'« intuitionnistes » et « formalistes » partagent finalement une certaine vue de l'histoire des mathématiques – la différence étant plutôt que les uns valorisent ce que les autres déplorent. On peut s'aider, pour la caractériser, du portrait qu'a tracé M. Detlefsen dans son article pour le *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*[16]. Il y propose trois traits

---

[13] « *Reductio ad absurdum*, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game » (G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940), reed. Cambridge University Press, 2012, p. 94).

[14] *Art. cit.*, p. 409.

[15] *Art. cit.*, p. 411.

[16] Michael Detlefsen, « Formalism », dans Stewart Shapiro (ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005, p. 236-317.

distinctifs du formalisme[17] : 1. Le rejet du modèle causal de la preuve (et du rôle de la construction) ; 2. Le rejet du modèle « présentiste » de la rigueur ; 3. La défense d'un rôle non représentationnel du langage (avec un rôle important de la naissance de l'algèbre symbolique)[18]. On voit qu'il suffit de d'échanger « rejet » et « défense » pour obtenir en miroir une position de type « intuitionniste » ou, plus généralement « constructiviste ». Le point clef est que tous ces acteurs, au-delà de leur opposition, semblent donc s'accorder sur le fait qu'il y a eu, autour de ces trois critères, une évolution importante des mathématiques « modernes », celles qui se développent dans la continuité de l'invention de l'algèbre symbolique (qu'on fait ordinairement remonter à Viète à la fin du XVIème s., puis surtout à Descartes et ses successeurs)[19].

C'est assurément une vision d'assez loin, mais dont je pense qu'elle résonne avec les conceptions de nombre de lectrices et lecteurs. Elle pourra nous suffire pour indiquer une première difficulté évidente. De fait, la sensibilité constructiviste rejette les démonstrations par l'absurde pour des raisons très profondément liées aux critères que j'ai rappelés dans la première section de cet article : ce sont des démonstrations qui ne construisent pas leur objet, qui ne sont pas explicatives et qui reposent sur le fait que nous manipulons « aveuglément » des représentations sans nous occuper de savoir ce qu'elles représentent (sans quoi nous ne pourrions manquer de voir qu'elles ne représentent justement « rien »). Or ces démonstrations, on l'a vu, pullulent dans les mathématiques grecques *anciennes*. Les uns et les autres se retrouvent donc à tenir une position particulièrement précaire : d'un côté, ils considèrent qu'un changement important s'est produit avec le développement de mathématiques symboliques (ou « formelles »), qu'ils contrastent avec un modèle ancien (« présentiste », comme dit Detlefsen). D'un autre côté, il est clair que le type même de démonstration qui semble *violer* le plus clairement ces critères est *surreprésenté* dans les mathématiques grecques anciennes.

Ajoutons un peu au mystère : en fait, le raisonnement est abondamment *critiqué* à l'époque moderne. Les critères que nous avons isolés comme fondant une critique des raisonnements indirects tiennent notamment une place importante chez un auteur comme Descartes. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, par exemple, il s'en prend très vivement aux démonstrations qu'il a trouvées dans les livres de mathématiques de son temps et qui « ne semblent pas montrer à l'esprit pourquoi ces choses sont ainsi, et comment on les trouve »[20]. Sans surprise, il témoigne à plusieurs reprises d'une réticence à l'égard de « la façon de démontrer qui réduit à l'impossible, et qui est la moins estimée et la moins ingénieuse de toutes celles dont on se sert en mathématique. »[21] Interrogé par Mersenne sur le fait qu'une ligne infinie devrait avoir six fois plus de pieds que de toises

---

[17] *Art. cit.*, p. 236-237. Toute l'idée de l'article est de montrer que le formalisme moderne, celui défendu par Hilbert et son école, prend la suite d'une tradition qui s'inaugure au XVIIème s.

[18] Detlefsen propose deux autres traits distinctifs, qui vont moins m'intéresser ici : le primat de l'arithmétique sur la géométrie et le « créativisme », c'est-à-dire le fait que le mathématicien se présente comme libre de créer des instruments symboliques propres à l'extension de son savoir, même si ces instruments ne correspondent pas immédiatement à des « contenus ».

[19] Detlefsen considère que le tournant a eu lieu au XVIIème s. avec des auteurs comme Leibniz et Berkeley. On sait qu'on doit d'ailleurs au premier l'expression « connaissance aveugle », comme reposant sur l'usage de symboles et dont les deux exemples paradigmatiques sont à ses yeux l'arithmétique et l'algèbre (*Meditationes de cognitione, veritate, et ideis*, *Acta Eruditorum*, Novembre 1684, trad. fr. P. Schrecker : G. W. Leibniz, *Opuscules philosophiques choisis*, Paris, Vrin, 2001, p. 12-29).

[20] René Descartes, *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit en la recherche de la vérité*, trad et notes Jean-Luc Marion, notes mathématiques Pierre Costabel, La Haye, Martinus Nijhoff, 1977, p. 13.

[21] Descartes à Mersenne, Janvier 1638 (*Oeuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery, nouvelle présentation en coédition avec le CNRS, Paris, Vrin, 1964-1974, vol. I, p. 490).

(on aurait donc un infini plus grand qu'un autre), il répond : « quelle raison avons-nous de juger si un infini peut être plus grand que l'autre, ou non ? vu qu'il cesserait d'être infini, si nous le pouvions comprendre » (15 avril 1630, AT I, 147). Comme il avait déclaré juste avant qu'il n'y avait rien d'absurde à penser que le nombre infini de pieds soit six fois plus grand que le nombre infini de toises, il semble donc rejeter l'usage du tiers exclu dans les questions qui touchent à l'infini.

Rien de surprenant dans ces conditions à voir certains commentateurs, comme Jules Vuillemin ou Yvon Belaval[22], proposer de faire de Descartes le prototype des penseurs « intuitionnistes ». Pourquoi pas ? Mais à condition, à nouveau, de remettre très profondément en question le cadre historique qui sous-tendait le tableau peint par Detlefsen. Car s'il est un point qui est hors de doute, c'est que Descartes critique ici les démonstrations *des Anciens* et qu'il le fait au nom de l'algèbre *des Modernes*. Bien plus, il fait valoir un nouveau modèle, « analytique », dont il fait reproche aux Grecs de l'avoir caché et dont il pense, après Viète, que la « nouvelle algèbre » a précisément permis de le relever. Le raisonnement symbolique, loin de permettre une approche aveugle dans laquelle la *reductio ad absurdum* serait naturelle, est ici… le principal vecteur de sa critique !

Tout ceci ne fait que renforcer l'impression que nous manquons d'une histoire qui irait regarder avec un peu de précision la manière dont mathématiciens et philosophes se sont rapportés aux preuves par l'absurde à travers les âges. Symétriquement, mettre l'accent sur les preuves par l'absurde permet de remettre en question certains cadres historiographiques très répandus, mais dont nous commençons à percevoir la fragilité. Ce n'est pas le lieu d'entreprendre ici une telle étude, mais je voudrais au moins insister sur deux éléments que nous avons croisés dans notre première approche du problème. Tout d'abord, il semble qu'une certaine critique des raisonnements par l'absurde se mettent en place à l'âge classique et ce phénomène est particulièrement remarquable puisqu'il s'agit précisément de la période où l'on *sort* du modèle aristotélicien de la preuve (comme devant nécessairement exhiber la « cause ») et où se développe (avec Viète et Descartes, puis Leibniz notamment) une mathématique symbolique de plus en plus développée. L'autre point sur lequel je voudrais insister et qui prolonge le précédent est que cette histoire nous dit quelque chose sur la manière dont les anciens Grecs se rapportaient aux objets mathématiques. En particulier, elle remet fortement en cause l'idée qu'ils se reposaient sur « l'intuition » d'objets qu'on sait « construire », par différence avec ce qui se serait ouvert avec le développement de mathématiques modernes, réputées « symboliques ». Ce sont les deux points que je vais aborder dans les sections suivantes.

3. Le regard des « Anciens » et celui des « Modernes » sur les preuves par l'absurde

La période sur laquelle nous possédons les études les plus poussées sur la réception des raisonnements par l'absurde est assurément la période moderne (au sens que donnent les historiens à ce terme). Il est facile de constater que les critiques que j'ai rappelées dans la première section s'y trouvent clairement formulées. Aux déclarations déjà mentionnées de Descartes, on pourra ajouter sa saillie ironique en direction de Roberval : « je ne trouve

[22] Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Gallimard, 1960 ; J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962 ; J.-L. Gardies, *op. cit.* p. 160.

rien de raisonnable en tout ce qu'il dit, comme lorsqu'il estime la façon de conclure *ad absurdum* plus subtile que l'autre. C'est chose absurde »[23].

Une telle vue est notamment développée longuement dans un passage souvent cité de la *Logique de Port Royal* (1662) au nom de la différence entre convaincre l'esprit (niveau de la certitude) et l'éclairer (niveau de l'évidence) :

> Ces sortes de démonstrations qui montrent qu'une chose est telle, non par ses principes, mais par quelque absurdité qui s'ensuivroit si elle étoit autrement, sont très ordinaires dans Euclide. Cependant il est visible qu'elles peuvent convaincre l'esprit, mais qu'elles ne l'éclairent point, ce qui doit être le principal fruit de la science. Car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est ; ce qui ne s'apprend point par une démonstration qui réduit à l'impossible.[24]

De telles positions sont présentées par plusieurs auteurs de l'époque, notamment sous l'influence de Descartes[25], mais pas seulement. Ainsi le Jésuite Honoré Fabri publie-t-il en 1669 une *Synopsis Geometrica* où il proclame dès la première page que rien n'éloigne plus les jeunes gens de la géométrie que la présence de raisonnement indirect, concluant *per impossibile* (raisonnements dont il entreprend donc de se passer)[26]. La même année, un autre jésuite, Gilles François de Gottignies publie ses *Elementa Geometriae Planae* dans lesquels il explique en ouverture que sa méthode diffère de celle d'Euclide précisément en ce qu'elle se veut « affirmative », de sorte que le lecteur puisse voir non seulement que certaines propositions sont vraies, mais *pourquoi* elles le sont – méthode qu'il contraste sans surprise avec l'approche « négative » dont fait usage Euclide à de nombreuses occasions[27]. A partir de là, il est possible de tirer un fil qui conduit à des auteurs comme Kant et, à partir de lui, à nombre de critiques plus récentes[28]. Mais ceci ouvre une question rarement posée : ces critiques qui sont très répandues chez les Modernes et qui courent jusqu'à nos jours, en trouve-t-on trace dans les périodes antérieures ?

M. Detlefsen rappelle comme caractéristique du modèle « présentiste » de la rigueur le témoignage de Proclus sur le fait qu'Euclide a *d'abord* donné la construction du triangle équilatéral (dans la toute première proposition des *Éléments*) avant de détailler les propriétés du triangle, car on ne peut pas démontrer sur quelque chose dont on ne sait pas encore s'il existe[29]. Il rappelle également la lecture que le philosophe néoplatonicien

---

[23] Descartes à Mersenne, 27 juillet 1638 (op. cit. vol. II, p. 275). Et Descartes d'ajouter : « et elle n'a été pratiquée par Apollonius et Archimède, que lorsqu'ils n'en ont pu donner de meilleure. » On retrouve d'ailleurs la même idée dans le descriptif de Chasles que j'ai rappelé en ouverture. La *Logique de Port-Royal* avance également que « ces démonstrations ne sont recevables que quand on n'en peut donner d'autres et que c'est une faute de s'en servir pour prouver ce qui peut se prouver positivement » – faute qu'elle reproche d'ailleurs à Euclide (cité par Gardies, op. cit., p. 162).

[24] A. Arnauld et P. Nicole, La logique ou l'art de penser (1674), réédition Paris, Gallimard, 1992. Partie IV, chapitre 9, p. 309.

[25] E. Barbin, « La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques », Bulletin APMEP 366, 1988, p. 591–620, notamment en ce qui concerne Bernard Lamy (p. 11-12).

[26] H. Fabri, Synopsis Geometrica, Lugduni Gallorum, 1669.

[27] G. F. Gottignies, Elementa Geometriae Planae, Rome, Bernado, 1669, p. 5.

[28] C'est l'approche que suit Mancosu dans l'ouvrage cité, chap. 4.3. Même développement chez Gardies chap. 7. La position de Kant est intéressante car il tient à la fois que le raisonnement par l'absurde est un raisonnement faute de mieux, mais aussi qu'il est caractéristique des mathématiques, où il ne le rejette donc pas, par différence avec ce qui se passe dans la philosophie, où il n'est jamais légitime à ses yeux.

[29] Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, trad. G.R. Morrow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970, p. 182-183, cité par M. Detlefsen, art. cit., p. 242-243. La traduction française

propose des trois premiers postulats d'Euclide, vus comme règles de construction permettant d'engager le travail géométrique[30]. De même, Proclus insiste-t-il sur le fait que les meilleures démonstrations sont celles qui montrent la genèse des résultats qu'elles établissent[31].

Mais ces remarques, souvent mentionnées, rendent d'autant plus significatif qu'on ne trouve pas chez Proclus nulle critique des raisonnements par l'absurde. Ceci provient notamment du fait que l'ordre démonstratif n'est pas uniquement lié à ses yeux à des normes de pureté théorique, mais doit aussi obéir à des contraintes plus pratiques de simplicité et de naturalité (le même type de critère qui sera repris, mais pour critiquer les raisonnements par l'absurde, par des auteurs comme Arnauld). Ayant lui-même proposé une démonstration directe de la proposition I, 19, voici la manière significative dont il entreprend de défendre l'approche d'Euclide :

> C'est assurément parce qu'il souhaitait éviter trop de complexité dans l'ordre des démonstrations que l'auteur des *Éléments* évita cette méthode de preuve, préférant procéder par division et réduction à l'impossible puisqu'il désirait établir la converse du théorème précédent (…). Il est préférable de prouver une converse par réduction à l'impossible tout en préservant la continuité que de rompre la continuité avec la démonstration qui précède. C'est pourquoi il démontre presque toujours une converse par réduction à l'impossible (Proclus, *op. cit.*, p. 251)

Plus généralement, il est remarquable qu'on ne trouve pas dans les mathématiques grecques anciennes de discussions comparables à celle des Modernes. Certes, Aristote dédie plusieurs passages aux raisonnements par l'absurde dans ses *Analytiques* en indiquant bien qu'à ses yeux les démonstrations « ostensives » leur sont supérieures[32]. Mais ces critiques d'un philosophe ne font que rendre plus frappant le fait que des mathématiciens comme Euclide, Archimède et Apollonius, non seulement restent silencieux sur la question, mais surtout utilisent très librement et très largement les raisonnements par l'absurde.

Une exception, sur laquelle ont récemment attiré l'attention Rosdhi Rashed et Athanase Papadopoulos dans leur édition de ses *Sphériques*, est Ménélaüs[33]. L'original grec ne nous est pas parvenu, mais il en existe des versions arabes qui nous donnent des indications précieuses à ce sujet. On y voit notamment Menelaüs insister sur le fait qu'il se démarque de ses prédécesseurs en ce qu'il n'a pas recours aux raisonnements par l'absurde :

> Comme nous avons montré les lemmes dont nous avions besoin, retournons maintenant à ce que Théodose voulait montrer ; nous le prouvons en recourant à une affirmation universelle, sans admettre en elle l'impossible. Nous montrerons ainsi son erreur et rectifierons ce qui a été corrompu. (*op. cit.*, p. 696)

---

de Proclus par Ver Eecke étant particulièrement défectueuse, je citerai à partir de l'édition anglaise de Morrow.

30 M. Detlefsen, art. cit., p. 245.

31 Orna Harari, « Les preuves démonstratives dans le commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide », dans A. Lernould (Ed.), Études sur le Commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide, Lille, Presses Universitaires du Septentrion, p. 197-214.

32 Voir en particulier *Seconds Analytiques* 86 b 27-87 a 30. Pour une étude du raisonnement par l'absurde chez Aristote, je renvoie aux chapitres 1 et 7 de J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, PUF, 1991.

33 *Menelaus Spherics: Early Translation and al-Mahani / al-Harawis Version*, édité, traduit et annoté par Roshdi Rashed et Athanase Papadopoulos, De Gruyter, 2017.

Cette particularité du style de Ménélaüs n'avait pas échappé à certains lecteurs arabes comme Ibn Abī Jarrāda (13ème s.), qui commente ainsi, pour la critiquer, la tentative de reconstruction proposée par al-Harawī :

> J'ai dit que Menelaus avait exposé de nombres lemmes pour prouver cette proposition, mais al-Harawī a montré certains d'entre eux par une reductio ad absurdum ; et nous avons dit que ceci ne relève pas de la méthode de Ménélaüs. J'ai montré tout ce qui avait été exposé dans le cours de la preuve sans recours à la contradiction. (op. cit., p. 239)

Mais cet exemple ne fait que renforcer l'impression que nous avions : le refus des preuves par l'absurde s'effectue ici *par différence* avec une pratique ordinaire de la géométrie qu'il s'agit de mettre à distance[34]. C'est un point sur lequel insistait justement Proclus en rappelant que certains auteurs avaient bien cherché à éviter les raisonnements par l'absurde, mais que cette voie n'était *pas* celle qu'avait choisie Euclide (et à sa suite Archimède et Apollonius), pas plus qu'elle n'était celle que lui-même (Proclus) considérait comme meilleure :

> C'est une tâche difficile, dans toute science, de choisir et arranger proprement les éléments d'où sont tirées toutes les autres choses et en lesquels elles peuvent être résolues. Parmi ceux qui s'y sont essayés, certains ont rassemblé plus de théorèmes, d'autres moins ; certains ont utilisé des démonstrations plus courtes, d'autres ont étendu leur traitement tout au long ; certains ont évité les réductions à l'impossible, d'autres les proportions. (Proclus, *op. cit.*, p. 60)

Par contraste, on devrait se demander pourquoi la critique des raisonnements par l'absurde se développe à l'âge classique avec une telle vigueur. Ce n'est pas le lieu de produire ici une telle explication dans tous ses détails, mais l'on peut au moins indiquer quelques éléments qui ont été apportés par les historiens dans les dernières années et qui changent très profondément notre regard sur la question.

Comme y a insisté Paolo Mancosu, nous avons tendance à projeter le fait que les mathématiques connaissent des transformations très importantes au tournant du XVIème et du XVIIème s. (ce qui est indéniable), avec le fait que les questions philosophiques qui accompagnent cette pratique changent également profondément. Or ce n'est pas le cas. Un trait tout à fait étonnant d'une étude appuyée sur les sources est précisément de montrer que les discussions philosophiques restent ancrées dans certaines questions développées à la Renaissance, voire dans la scolastique tardive. Ceci remet déjà en question l'image habituelle que nous avons d'un humanisme renaissant qui se serait démarqué des obscurités de la scolastique d'influence aristotélicienne (image qui peut rester tout à fait vraie par ailleurs sans l'être dans le domaine de la philosophie des mathématiques).

Une des questions (au sens scolastique de la *quaestio*) qui eut une influence considérable à ce sujet est celle de la « certitude » des mathématiques. Il s'agit d'une question technique qui consiste à savoir si les mathématiques peuvent être considérées comme la plus certaine des sciences. En contexte aristotélicien, ceci est rapporté à un type d'explication qui fournirait à la fois l'établissement de certains faits (*to oti*, le « quoi »), mais aussi l'explication de ces faits (*to dioti*, le « pourquoi »). Un des auteurs qui fit le plus pour la diffusion de cette question est Alessandro Piccolomini qui publie en 1547 un petit traité sur le sujet où il entend montrer que les mathématiques ne remplissent pas

[34] Bien plus, il paraît lié à un domaine particulier, la géométrie sphérique, où l'on cherche à éviter les raisonnements indirects (Rashed y voit même une anticipation des géométries non-euclidiennes, cf. *op. cit.*, p. V).

cette condition[35]. Cette critique eut une influence décisive dans la mesure où elle amena les auteurs qui voulaient défendre la certitude des mathématiques à donner aux preuves une fonction très fortement explicative (la présentation d'un « pourquoi »). Or pour nombre d'auteurs modernes, cette explication est fournie, sur le modèle avancé par Proclus, par le fait que ces preuves explicatives montrent à voir la *genèse* des faits qu'elles décrivent. Ultimement, elles devraient pouvoir s'appuyer sur des définitions elles-mêmes « génétiques » et déployer ainsi un savoir suivant pas à pas la construction progressive des objets et de la découverte de leurs propriétés caractéristiques. Ce modèle se retrouve très clairement dans les critiques de Descartes contre les démonstrations qui ne montrent pas « à l'esprit pourquoi ces choses sont ainsi, et comment on les trouve », mais il se trouve aussi, sous des formes diverses, chez Hobbes ou Spinoza[36]. Il est également présent chez des mathématiciens de première importance comme Leibniz ou Newton (qui en hérite de son maître Barrow)[37].

On voit qu'une norme dominante de raisonnement mathématique que Detlefsen appliquait aux anciens (le modèle « causal » de la preuve), par différence avec les Modernes, est en fait… typique de notre modernité. Or c'est elle qui commande clairement une méfiance à l'égard des preuves indirectes, qui ne sont ni génétiques ni explicatives. Ceci ne signifie évidemment pas que tous les mathématiciens modernes partagent ce point de vue. Pensons à Pascal, grand défenseur des raisonnements par l'absurde, ou à Leibniz, qui ne voit aucune incompatibilité entre les deux modèles, qu'il valorise à droit égal. Reste que se développe clairement à l'âge classique, et contre toute attente, un nouveau regard sur la preuve qui a la particularité de se placer dans un idéal d'origine clairement… aristotélicienne. Sans la saisie de cet étrange développement, où des auteurs anti-aristotéliciens se mettent à défendre une norme typiquement aristotélicienne, on ne peut guère comprendre, me semble-t-il, l'évolution des vues sur les raisonnements par l'absurde dans les périodes modernes et contemporaines.

4. Ce que les démonstrations par l'absurde nous disent des objets mathématiques et de leur représentation

Les conclusions de la section précédente invitent naturellement à inverser l'approche habituelle et à demander en retour ce que *l'acceptation* très répandue des preuves par l'absurde chez les géomètres anciens nous dit sur la manière dont ils se rapportaient à leur pratique et à leurs objets. Ici aussi, nous allons voir qu'une révision historiographique d'importance semble appelée par une telle étude. Si le tableau que j'ai commencé à dresser est correct, nous devons en effet nous départir du modèle « présentiste » attribué aux Anciens selon lequel un objet mathématique n'existe que s'il est donné « en présence » au praticien – modèle qui aurait volé en éclat avec l'acceptation de plus en plus répandue d'un usage « non représentationnel » du langage. De fait, les démonstrations par l'absurde ont précisément ceci de singulier qu'elles font appel à des

[35] A. Piccolomini, *Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum*, Rome, Antonium Bladum Asulanum, 1547.

[36] Sur la fortune de la *quaestio de certitudine*, voir P. Mancosu, *op. cit.*, chap. 1. Sur Spinoza dans ce contexte et plus généralement sur la fortune de la *quaestio*, je me permets de renvoyer à D. Rabouin, « Spinoza. Quelle norme mathématique ? », dans J.-P. Cléro (dir.), *Les chemins mathématiques vers le scepticisme*, Paris, Hermann, 2021, p. 27-50.

[37] Voir N. Guicciardini, *Isaac Newton on mathematical certainty and method,* Mit Press, 2009, p. 4. Sur la fortune de la question de la certitude au XVIIème s., voir plus également E. Sergio, *Verità matematiche e forme della natura da Galileo a Newton*, Rome, Aracne editrice, 2006.

représentations dont on montre justement qu'elles ne peuvent *pas* représenter des situations mathématiques acceptables. Elles jouent donc exactement le même rôle que le *P(a)* à qui j'avais demandé de représenter un « cercle carré » dans mes exemples précédents (ou de la formule qui représentait les classes de notre *p*-groupe).

Pour mener cette réflexion, je m'appuierai sur deux études consacrées à la géométrie grecque ancienne et qui se sont l'une et l'autre trouvées confrontées très vite à cette question. La première est l'ouvrage de Reviel Netz intitulé *The shaping of deduction in Greek mathematics* (Cambridge, CUP, 1999). Dans ce livre, Netz insiste beaucoup à la fois sur le fait que les lettres qui entrent dans le discours géométrique grec ne fonctionnent justement pas comme des symboles (mais plutôt comme des index) et sur le fait que le texte, à la syntaxe très rigide, est inséparable d'un diagramme qui constitue l'objet propre du discours géométrique. Tout ceci semble d'abord conforter l'idée d'un raisonnement faisant peu appel à l'appareil symbolique et fortement appuyé sur la présence d'un diagramme donné à l'intuition. Or une telle assertion se heurte immédiatement à ce que Netz présente lui-même comme une forme d'impasse. À partir du moment où nous nous trouvons devant une preuve par l'absurde, nous rencontrons, en effet, un diagramme qui ne peut justement *pas* être « l'objet » (ou une configuration acceptable d'objets) du discours du mathématicien.

L'exemple qu'il donne est la proposition célèbre où Euclide démontre par l'absurde que deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points[38]. Pour cela, Euclide suppose par impossible que ce n'est pas le cas et qu'on peut se donner deux cercles s'intersectant en plus de deux points. Mais comme la preuve géométrique grecque a besoin d'un diagramme pour avancer, il doit bien alors proposer une représentation de ces « cercles ».

Nous ne possédons des *Éléments* que des copies tardives, mais les traditions manuscrites s'accordent pour proposer un diagramme du type suivant :

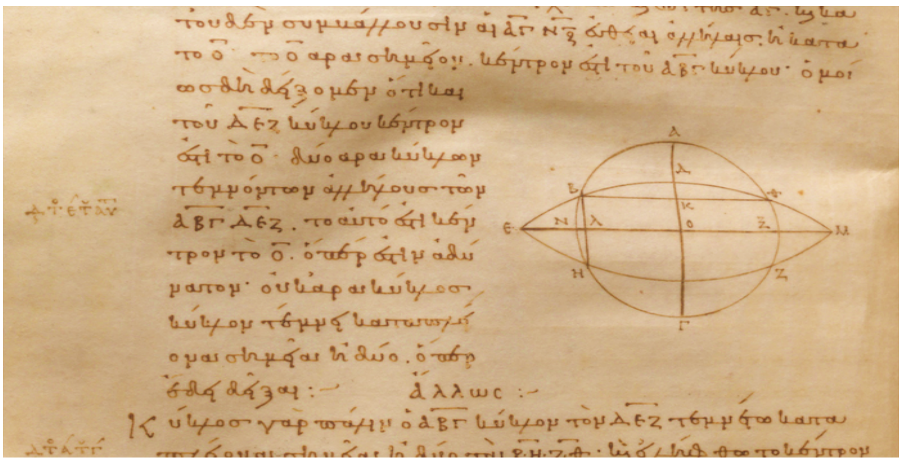


Figure 1 – MS D'Orville 301, fol. 53 (Bodleian Library)

On voit ici très clairement qu'il faut rompre le pacte référentiel ordinairement attaché aux représentations géométriques. Car s'il est une chose qui est immédiatement évidente aux lecteurs, c'est que l'un des objets représentés n'est pas, ne peut pas être un cercle – et ceci

[38] Voir Annexe.

est d'autant plus évident que les compas étaient justement utilisés dès les périodes anciennes pour représenter les cercles (comme en témoigne d'ailleurs l'illustration ci-dessus)[39]. Or il n'est pourtant pas possible de s'exclamer pour autant : « ceci n'est pas un cercle ! » sous peine de bloquer la preuve avant même qu'elle n'ait commencé.

Netz propose de voir ce procédé comme un détour par une fiction, un « faire semblant » (*make believe*). Il compare le « cercle » de la démonstration au carrosse de Cendrillon qui redevient citrouille quand le minuit de la fin de la preuve sonne[40]. Il y a là une piste très intéressante pour étudier le rôle des représentations en mathématiques. Mais, qu'on recoure au modèle de la fiction ou pas, une chose est sûre : il y a une ambiguïté à parler de « représentations » en mathématiques, qu'il s'agisse de formules symboliques ou de diagrammes, dans la mesure où nous recourrons très souvent à cette connaissance que Leibniz appelait justement « aveugle » (sans distinguer pour sa part entre les symboles algébriques, les mots du langage naturel ou les figures géométriques – tous exemples de ce qu'il appelait des « caractères »). Dans ce cas, le « faire semblant » autorise à utiliser des procédés ordinairement conçus comme représentationnels dans un cadre non-représentationnel – si du moins, on veut prendre au sérieux le fait que le diagramme qui illustre une démonstration par l'absurde ne représente littéralement, selon l'approche ordinaire des relations sémantiques, « rien ».

Cet échec des relations sémantiques dans le cas des preuves par l'absurde est au départ d'une autre étude sur la géométrique grecque (cette fois limitée à la géométrie plane euclidienne, présentée dans les livre I à IV des *Éléments*), celle de Ken Manders sur les diagrammes euclidiens[41]. La première section de l'article se demande si les diagrammes doivent être abordés comme des artéfacts qu'on contrôle ou au travers de relations sémantiques (des représentations qu'on interprète), l'auteur entreprenant précisément de favoriser la première approche aux dépens de la seconde, pourtant plus traditionnelle. Voici comme il introduit la sous-section qu'il dédie à ces questions :

> Les artéfacts utilisés dans la pratique, qui nous donnent prise sur notre vie sont parfois pensés en terme de sémantique – typiquement comme représentation de quelque chose dans la vraie vie. Il existe, bien sûr, un débat très ancien sur la question de savoir comment les diagrammes géométriques doivent être traités dans cette perspective.
>
> Nombre de difficultés anciennes sur la nature des objets géométriques et la connaissance que nous en avons proviennent de ce qu'on tient pour acquis le fait suivant : le texte géométrique serait vrai, au sens le plus ordinaire du terme, à propos du diagramme ou d'une contrepartie idéale du diagramme. Or, sans même toucher à ses difficultés, on voit qu'une authentique relation sémantique entre le diagramme géométrique et le texte est incompatible avec la réussite de l'usage des diagrammes dans les preuves par l'absurde : les contextes de *reductio ad absurdum* servent précisément à assembler un corps d'affirmations qui, de manière évidente, ne peuvent pas être vraies simultanément ; il en résulte qu'aucune situation géométrique ne pourra sérieusement illustrer le fait qu'elles le soient. (Manders 2008, p. 84).

Cette remarque, comme le précise Manders, n'a rien de spécifique aux diagrammes et vaut en fait, plus largement, pour toutes les représentations mathématiques au moyen desquelles on peut produire une *reductio ad absurdum*. C'est pourquoi j'ai commencé

---

[39] Dans les autres familles de diagrammes pour cette preuve, un des cercles est représenté non par une ogive, tracée avec un compas, mais par une forme elliptique – ce qui ne change rien au fait qu'elle n'apparaît donc pas comme un cercle.

[40] R. Netz, *op. cit.*, p. 55-56.

[41] K. Manders, « The Euclidean diagram », dans P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, OUP, 2008, p. 80-133.

par donner l'exemple d'une formule algébrique, qui pose exactement les mêmes questions. Par principe, un raisonnement par l'absurde conjoint un ensemble d'énoncés qui ne peuvent pas être vrais en même temps. Du point de vue de la sémantique standard, on dira donc qu'un tel ensemble d'énoncés n'a pas de « modèle » ou que son « modèle » est vide, ce qui revient à dire qu'il ne représente « rien ». Tandis que cette approche ne nous choque pas quand il s'agit du langage (je peux bien parler de l'actuel roi de France et dire qu'il est chauve, même si rien de tout cela n'existe), elle devient beaucoup plus problématique dès lors que nous mobilisons ce qui nous apparaît comme des « représentations » – ce qui est typiquement le cas des diagrammes.

Ainsi les preuves par l'absurde nous donnent accès à des représentations qui ne représentent pas – ou tout du moins pas ce qu'elles prétendent représenter. Si nous voulons les interpréter dans les termes de la sémantique ordinaire, nous devons dire qu'elles ne représentent « rien ». Une différence importante avec « l'actuel roi de France » est que dans le cas des représentations mathématiques, nous ne pouvons pas imaginer un autre monde où la situation représentée serait vraie. Un monde où deux cercles euclidiens s'intersectent en plus de deux points est n'est pas un autre monde mathématique, c'est un monde « non-mathématique », pour reprendre l'expression de Wittgenstein.

Or se saisir de ce problème, c'est précisément ouvrir une perspective complètement nouvelle sur l'usage des diagrammes qui se révèlent alors être des artéfacts *avec lesquels* on raisonne, plutôt que *à propos desquels* on raisonne. L'objectif que se donne Manders est alors d'expliciter ce rôle des diagrammes comme porteurs d'inférence. S'il ne parle pas de fictions, comme Netz, il rejoint néanmoins en ce point un aspect très important des théories récentes de la fiction, comme celle qu'a développée Kendall Walton[42]. On y met, en effet, l'accent sur le fait que le mécanisme du « faire semblant » recourt très souvent à des auxiliaires (*prop*) – comme le balai que l'enfant enfourche en faisant « comme si » il s'agissait d'un cheval. Il ne s'agit pas tant de nier le fait que certains aspects de ces auxiliaires doivent être représentationnels et que n'importe quel objet ne peut certainement pas donner prise au « faire semblant » dans n'importe quelle condition (il faut, par exemple, prendre un objet qui, comme le balai et le cheval puisse être « enfourché »), mais plutôt d'insister sur le fait que la relation sémantique ordinaire, qui suppose une évaluation globale de la cohérence des données, n'a pas besoin d'être satisfaite ici. Ces auxiliaires sont des outils *avec* lesquels nos preuves racontent leurs histoires – plutôt que *ce sur quoi* porte l'histoire elle-même.

Quoi qu'il en soit de ces pistes très intéressantes à poursuivre pour mieux percer les ressorts de nos raisonnements, un point ne peut manquer de nous arrêter : chez Netz comme chez Manders, il apparaît que les raisonnements par l'absurde anciens nous mettent immédiatement face à des formes de connaissances « aveugles » et cela bien avant qu'on ait fait usage du symbolisme moderne. C'est d'ailleurs exactement ce que rappelait Leibniz, lorsqu'il introduisit l'idée de connaissance aveugle en prenant comme premier exemple celui d'un diagramme géométrique (en l'occurrence le célèbre « chiliogone », dont on avait déjà fait usage Descartes). C'est donc à tort que nous croyons que quelque chose a changé sous ce point de vue avec l'intervention des symbolismes au sens étroit qu'a pris ce terme par la suite.

---

[42] K. Walton, Mimesis as Make-Believe: On the Foundations of the Representational Arts, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

Conclusion

J'espère avoir donné dans ce qui précède une motivation pour entreprendre une histoire des preuves par l'absurde, qui ne se contenterait pas, comme on le fait trop souvent, de répéter les critiques des auteurs classiques pour les rapporter à celle d'Aristote et conclure à un modèle « présentiste » de la preuve que notre modernité – qu'on s'en félicite ou qu'on le déplore – aurait progressivement chassé. C'est tout l'inverse qui semble vrai et une telle révision historiographique a beaucoup à nous apprendre à la fois sur les normes qui ont été attachées à la preuve depuis l'âge classique et sur la manière dont les mathématiciens grecs antiques se rapportaient à leurs objets. Si je n'ai fait qu'esquisser quelques traits que pourrait prendre une telle histoire, j'espère tout du moins avoir éveillé quelques questions qui pourraient heureusement nourrir dans le futur les discussions entre historiens, philosophes et didacticiens des mathématiques.

Annexe – Un exemple classique de démonstration par l'absurde dans la géométrie grecque ancienne, la proposition III, 10 des *Élements* (trad. fr. B. Vitrac)[43]

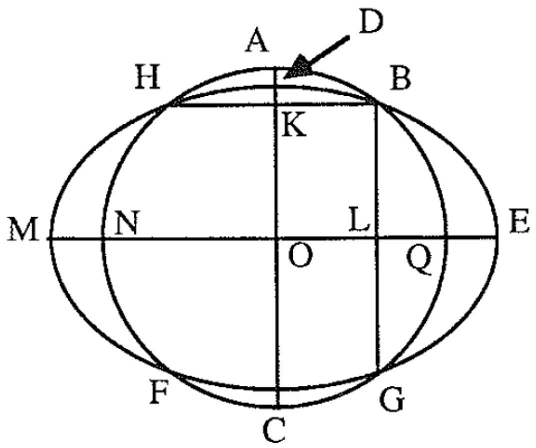


Figure 2 – Figure de la démonstration qu'un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points

Car si c'est possible que le cercle *ABC* coupe le cercle *DEF* en plus de deux points : *B, G, F, H,* et que *BH, BG,* étant jointes, soient coupées en deux parties égales aux points *K, L* ; et que *KC, LM*, ayant été menées à angles droits avec les [droites} *BH, BG* à partir des points *K, L*, soient conduites jusqu'aux points *A, E*. Or puisque dans le cercle *ABC* une certaine droite *AC* coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite *BH,* le centre du cercle *ABC* est donc sur *AC* (III. l, Por.).

Ensuite, puisque dans le même cercle *ABC*, une certaine droite *NQ* coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite *BG*, le centre du cercle *ABC* est donc sur *NQ*. Or il a aussi été démontré qu'il était sur *AC* et les droites *AC, NQ* ne se rencontrent en aucun point sinon *O*. Le point *O* est donc le centre du cercle *ABC*.

[43] Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments*, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale Maurice Caveing, trad. et comm. Bernard Vitrac, Paris, PUF, 1990-2001, 4 vol., vol. 1., p. 412-413.

Alors semblablement nous démontrerons que le centre du cercle *DEF* aussi est *O*. Donc le même point *O* est le centre de deux cercles se coupant l'un l'autre, *ABC* et *DEF*. Ce qui est impossible (par Ill. 5).

Donc un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Ce qu'il fallait démontrer.

LE RAPPORT ENTRE DISTANCE ET LONGUEUR : ENJEU DE VOCABULAIRE OU ENJEU DE RAISONNEMENT ?

Aurélie CHESNAIS, Véronique CERCLE, Céline CONSTANTIN, Nathalie DAVAL, Aurélien DESTRIBATS, Sophie DUTAUT, Julie LEFORT, Nazha LAHMOUCHE, Jérémie LEFAUCHEUR, Louise NYSSEN

Résumé. L'atelier visait à mettre en évidence que l'articulation entre les notions de longueur et de distance ne se réduit pas à une « question de vocabulaire », mais suppose un réel travail de raisonnement, source de difficultés pour les élèves et probablement sous-estimé par les enseignants. Nous donnons des exemples de travail possible autour de cette articulation, et montrons qu'il est porteur d'enjeux d'apprentissages cruciaux sur le raisonnement, sur le langage mathématique, mais aussi sur les objets de la géométrie.

Introduction

Notre groupe a travaillé pendant plusieurs années sur les enjeux didactiques et les difficultés de la géométrie repérée, ce qui nous a amenés à nous interroger sur la notion de distance et sur le rôle du langage dans l'activité mathématique et dans l'apprentissage. L'objectif de l'atelier était de montrer comment un regard sur le langage donne un autre point de vue sur le rapport entre le travail du raisonnement mathématique, la compréhension des objets mathématiques, et le rôle du langage mathématique dans le raisonnement et dans l'apprentissage.

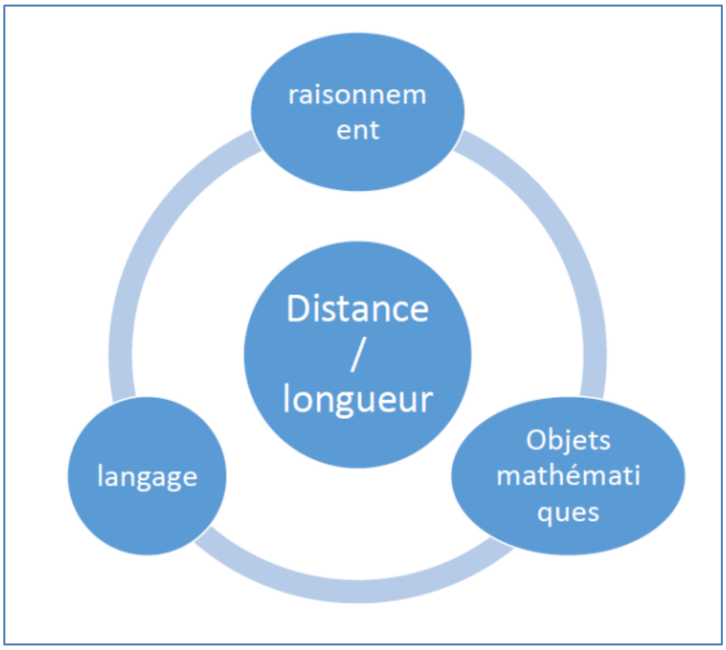


Figure 1– Enjeux de l'atelier

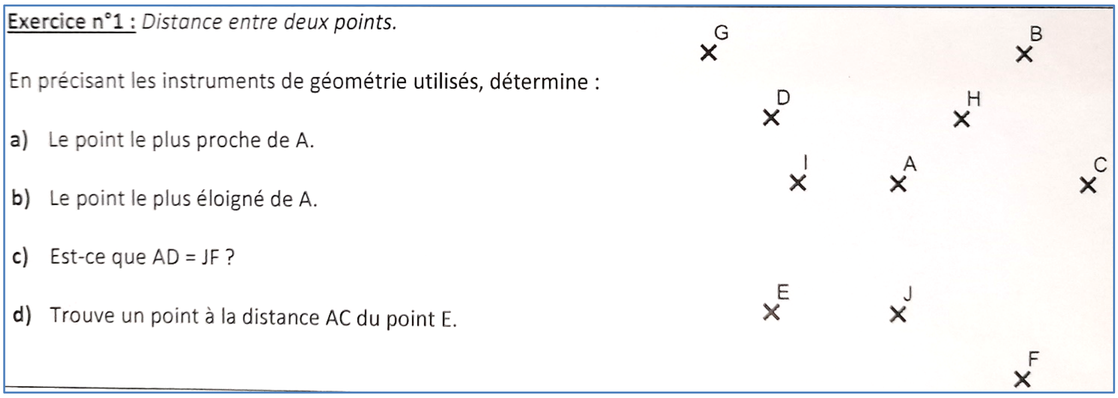
Notre attention s'est portée sur les notions de distance et longueur. En effet, nous pensons que, si pour beaucoup l'emploi de l'un ou de l'autre se résume à une « question de vocabulaire », cela cache en réalité de véritables enjeux mathématiques et didactiques importants, au début du secondaire et jusqu'au lycée.

Notre atelier s'est organisé autour de trois exemples, dans le but de mettre en lumière que le rapport entre distance et longueur est bien porteur d'enjeux multiples autour du raisonnement, du langage et des objets mathématiques : le premier exemple porte sur la notion de distance entre deux points en sixième, le deuxième sur le rapport entre distance et cercles en sixième, le troisième sur les notions de coordonnées, distance et longueur en seconde. Chaque exemple est l'occasion d'illustrer à la fois les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves et les opportunités de les mettre en travail.

La conclusion sera l'occasion de revenir sur les enjeux de formation dévoilés par ce travail : ces enjeux d'enseignement sont souvent transparents pour les étudiants futurs professeurs et la formation doit leur permettre d'en prendre conscience.

Exemple 1 – Distance entre deux points en sixième

Un exercice sur la notion de distance



Exercice n°1 : *Distance entre deux points.*

En précisant les instruments de géométrie utilisés, détermine :

a) Le point le plus proche de A.

b) Le point le plus éloigné de A.

c) Est-ce que AD = JF ?

d) Trouve un point à la distance AC du point E.

Figure 2– Enoncé d'un exercice en sixième sur la distance entre deux points

Cet exercice s'inscrit dans la progression de la classe de sixième comme travail sur la notion de distance, en amont du travail sur la notion de cercle. La notion de distance entre deux points apparaît en effet dans les programmes, dans les « Repères de progressivité » : « Les longueurs : En 6e, le travail sur les longueurs permet […] d'établir la notion de distance entre deux points […]. ».

Nous nous sommes en particulier focalisés, lors de l'atelier, sur la question d) dans laquelle il s'agit de trouver un point à distance donnée d'un autre point.

Le travail des participants à l'atelier a tourné autour des questions suivantes : Quelle est la réponse attendue à la question d) ? Suppose-t-elle un raisonnement ? Quels types d'objets met-elle en jeu ? Quels sont les enjeux langagiers associés et difficultés attendues ?

La discussion a fait apparaître que la réponse attendue est le point *D*, ce que les élèves peuvent établir à l'aide du compas ou avec la règle (en supposant qu'un travail a été fait avant pour que les élèves ne se contentent pas d'une réponse fondée sur une simple estimation visuelle).

En considérant que les élèves doivent mettre en travail la notion de distance entre deux points (et qu'elle n'est pas encore maîtrisée), il apparait qu'établir cette réponse suppose de la part des élèves un raisonnement reposant sur la mobilisation de la définition de la distance entre deux points comme étant la longueur du segment qui joint ces deux points. Elle suppose ainsi d'établir l'équivalence suivante : « Le point D est à la distance AC du point E » est équivalent à « Le segment [DE] a la même longueur que le segment [AC] » qui fait intervenir l'énoncé tiers : « la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points ».

Notons que ce raisonnement suppose également d'identifier des relations entre des objets de dimension 1 (des segments et leur longueur) et des objets de dimension 0 (des points et la distance entre eux), s'inscrivant ainsi dans un enjeu didactique important en sixième, lié à la déconstruction dimensionnelle des figures. Il nous semble en effet indispensable de considérer que la conception des figures géométriques comme ensembles de points et, de fait, la notion de point elle-même, dans ce type de tâche, n'est pas tout à fait disponible en début de sixième. Elle constitue même un enjeu du cycle 3 au lycée puisque la conception d'une ligne comme un ensemble de points ne peut être achevée qu'avec la mise en bijection de la ligne avec *IR*, en seconde (*cf.* notamment Chesnais et Mathé, 2018, repris également dans Cerclé et al., 2020).

Nous nous sommes ensuite intéressés à la formulation de la réponse, en appui sur des productions d'élèves.

Analyse de quelques productions d'élèves : difficultés langagières

La formulation de la justification (qui était systématiquement demandée aux élèves) de la question d) supposerait *a priori* de répondre en termes de distance entre deux points. Toutefois, au-delà du fait que cette formulation porte sur des éléments de dimension 0 et la notion de distance qui est en cours d'acquisition, elle suppose de fait une construction grammaticale qui rende compte du statut logique des objets : le fait que la distance est une relation entre objets quand la longueur est une propriété d'objet. La réponse suppose de fait de rendre compte d'une relation entre 4 objets : les points A, D, C et E dont Vergnaud (1981) pointait la grande difficulté.

Plusieurs formulations correctes et « équivalentes » du point de vue mathématique :

- $DE = AC$ (qui peut s'interpréter comme : la longueur du segment [DE] égale la longueur du segment [AC] ou la distance entre les points D et E égale la distance entre les points A et C).
- La distance de D à E est égale à la distance de A à C.
- Le point D est à la même distance du point E que A de C.

On notera que les deuxième et troisième formulations supposent des constructions grammaticales relativement complexes en français, du fait qu'elles supposent la prise en charge de relations entre objets (Auger et Chesnais, 2022). La première en revanche est très élémentaire, mais fait appel à une notation qui est en cours d'acquisition chez les élèves ; de plus, elle présente l'intérêt, mais aussi la difficulté, de référer pour les mathématiciens à la fois à la longueur d'un segment et à la distance entre ses extrémités, et elle permet précisément d'éviter de formuler les choses en langage verbal (avec les mots), notamment qui évite l'utilisation du mot « distance » (Chevallard et Johsua, 2003).

L'analyse de productions d'élèves, proposées aux participants, a permis de mettre en évidence plusieurs faits intéressants. Tout d'abord, le fait que les élèves qui produisent une phrase correcte sont ceux qui la formulent en termes de longueur et de segments (*cf.* figure 3).

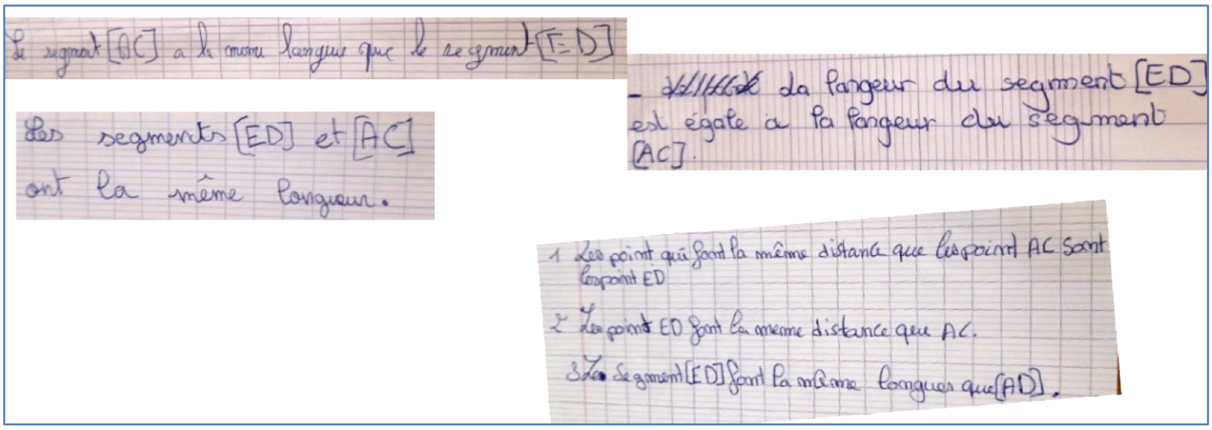


Figure 3 – Productions d'élèves avec une phrase correcte

L'analyse des autres productions d'élèves (cf. figure 4) montre que toute la difficulté de formuler la justification en termes de distance entre des points, à la fois du point de vue de la désignation des objets en lien avec leur notation et de la correction grammaticale de la phrase (sans compter la question de l'orthographe). Certaines erreurs (cf. figure 4) nous paraissent particulièrement révélatrices d'une difficulté à manipuler la notion de distance et en même temps du lien qui est en cours d'élaboration avec la notion de longueur. Nous interprétons notamment ainsi les confusions entre points et segments, mais aussi la confusion entre « a » et « à » ou encore entre les verbes avoir et être comme résultant du fait qu'un segment « a » une certaine longueur (le verbe avoir traduit une propriété de l'objet), quand deux points « sont » « à » une certaine distance l'un de l'autre. On note enfin des difficultés dans les usages des connecteurs « de »[1] et « que » dans l'expression de la relation.

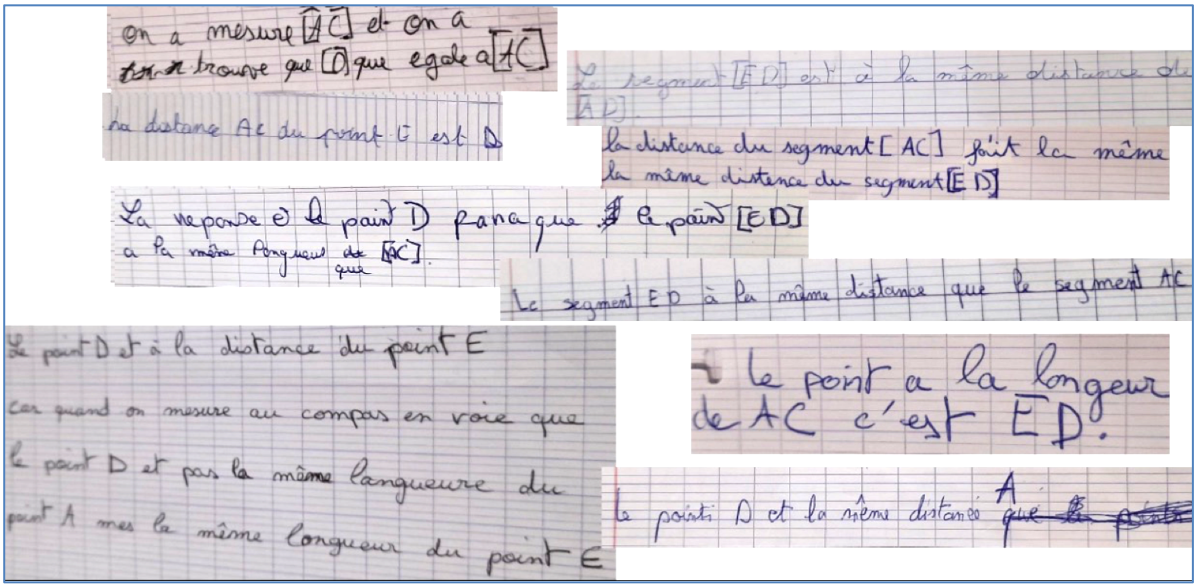


Figure 4 – Productions d'élèves de 6ème contenant une ou plusieurs incorrections

[1] Les difficultés liées aux usages de la préposition « de » ont été documentées plus largement et en lien avec d'autres relations dans Auger et Chesnais (2022).

Ce travail montre que la notion de distance – et y compris la capacité à la manipuler langagièrement – constitue un enjeu d'apprentissage en soi, au regard des enjeux d'apprentissage de la géométrie au début du collège. Cela montre également les difficultés d'apprentissage à prendre en charge par l'enseignement et ce, malgré le fait que la notion de distance soit présente dans les programmes depuis le cours moyen (et qu'elle ait aussi une acception courante dont on peut supposer que les élèves sont familiers, mais c'est là aussi une source de difficulté potentielle (*ibid.*).

Or une étude de manuels de sixième montre que la distance entre deux points est traitée comme un objet supposé être déjà maîtrisé par les élèves. Un seul manuel sur les six consultés introduit explicitement cet objet et en donne une définition. Notons que nous avions déjà montré dans des travaux précédents que la notion de distance n'est pas non plus questionnée en général dans le travail sur la droite graduée (Chesnais et *al.*, 2017 ; Chesnais et Destribats, 2019) : notamment lien entre abscisse et distance à l'origine, entre distance entre points et distance entre nombres.

Cet enjeu est enfin d'autant plus crucial qu'il apparaît comme outil (au sens de Douady, 1984) dans de nombreuses tâches et en lien avec de nombreuses autres notions et ce, tout au long de la scolarité. Nous donnons dans la suite deux exemples en sixième et un exemple en seconde.

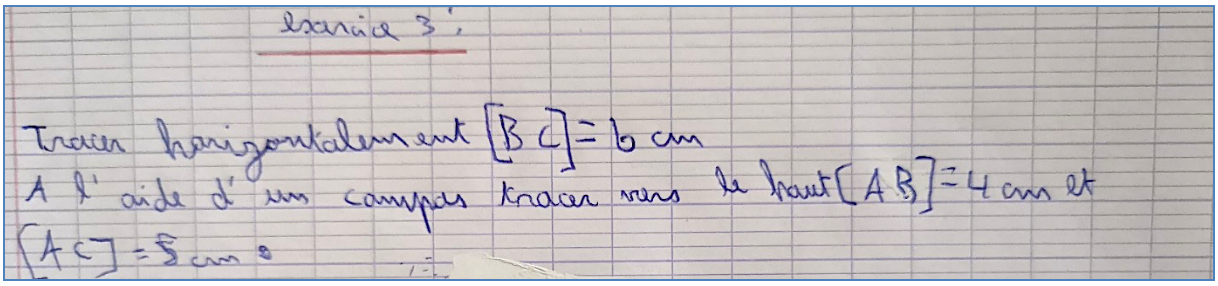
La construction du triangle à partir des longueurs des côtés

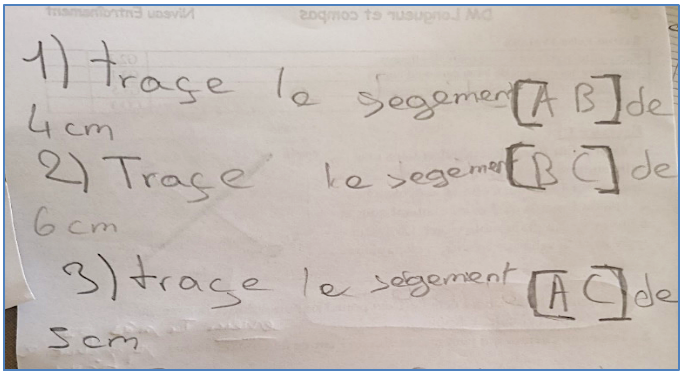
Cette construction, en utilisant le compas, est travaillée dès le cours moyen. Sa justification s'appuie sur la définition du cercle comme ensemble de points à distance donnée d'un point donné. Le fait d'en faire prendre conscience aux élèves (au-delà d'une « méthode pour construire un triangle »), est donné en exemple, dans les programmes du collège, de travail sur le raisonnement :

> Le raisonnement : À partir du CM2, on amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner uniquement sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle. […] (MENESR, 2015, p. 212).

Là encore, le rapport entre longueur de segments et distance entre points joue un rôle essentiel puisque le raisonnement attendu suppose d'identifier que construire un segment de telle longueur revient à placer un point à cette distance d'un autre, puis de chercher à placer un point à distance donnée de deux points donnés (obtenu donc comme l'intersection de deux arcs de) cercles) comme extrémité commune de deux segments de longueurs données.

Il nous semble ainsi que l'absence de prise en charge de ce lien en tant qu'enjeu d'apprentissage pourrait contribuer à expliquer les difficultés rencontrées par les élèves à comprendre la construction (et notamment à mobiliser le compas). On voit ainsi par exemple en figure 5 des productions d'élèves de 6ème dans lesquelles les élèves restent sur la construction d'un triangle comme construction de trois segments, sans passer à la construction des points-sommets, et ce, même s'ils évoquent l'utilisation du compas.





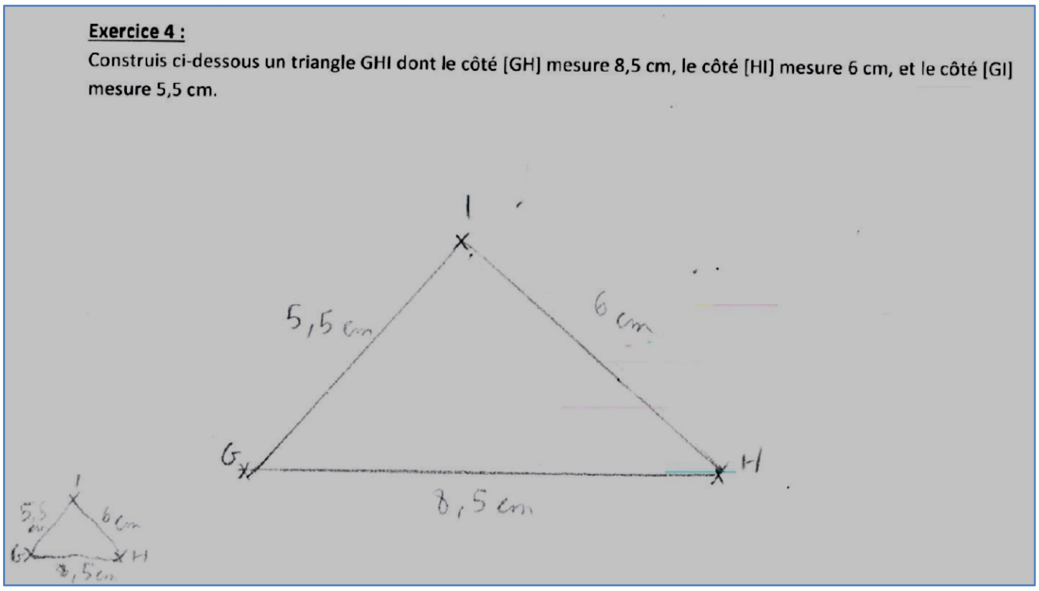
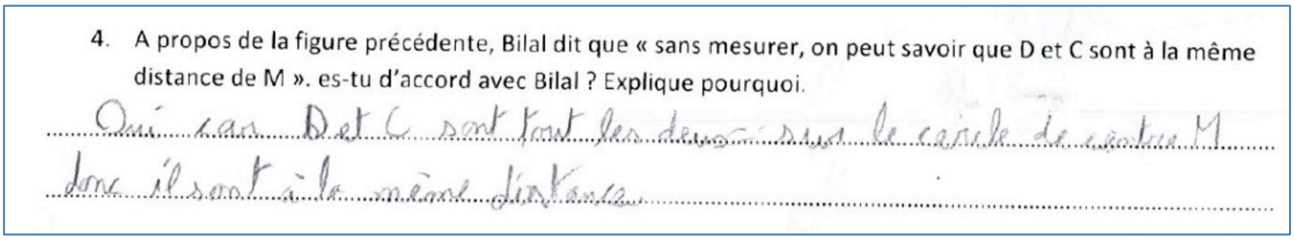


Figure 5 – Productions d'élèves sur la construction d'un triangle à partir des longueurs des côtés

Par exemple, pour la troisième production même si cela n'est pas très visible sur l'image scannée, l'élève a fait plusieurs tentatives de tracés de segments d'extrémité G : l'élève a procédé par approximation. Pourtant dans un autre exercice, on voit que cet élève connait le lien entre le rayon d'un cercle et le fait qu'un point appartenant au cercle est à une distance du centre égale au rayon (voir figure 6).



4. A propos de la figure précédente, Bilal dit que « sans mesurer, on peut savoir que D et C sont à la même distance de M ». es-tu d'accord avec Bilal ? Explique pourquoi.

Oui car D et C sont tout les deux sur le cercle de centre M donc il sont à la même distance.

Figure 6 – Production d'un élève dans un exercice de preuve à propos du cercle en 6ème

Nous conjecturons que la difficulté de cet élève vient plutôt de l'absence de mobilisation du pas déductif suivant qui justifie l'utilisation du compas :

GI = 5,5 cm donc *I* est à 5,5 cm du point *G*

On reconnaît là l'utilisation de la définition de la distance entre deux points comme énoncé-tiers : « la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points ».

Un échange oral en classe

Nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de transcription d'un échange oral en collectif, dans une autre classe de sixième, dans le cadre d'une tâche similaire, dans laquelle on demande ensuite aux élèves de « trouver tous les points qui sont à la distance *EM* d'un point *E*, sans mesurer ». Ces extraits correspondent au début de la phase de mise en commun, après que les élèves ont travaillé sur la tâche individuellement. L'enseignante montre au tableau la production d'une élève qui a tracé des segments joignant *E* et d'autres points.

P Tu vas expliquer. Vous arrivez à voir ? la première partie, qu'est-ce que tu as tracé ici ?
E1 J'ai pris ma règle et j'ai regardé tous les points qui étaient à 4 cm.
P Tu as regardé, mais qu'est-ce que tu as tracé ?
E J'ai tracé la distance.
P Elle a tracé la distance, est-ce que vous êtes d'accord ? Est-ce qu'on peut tracer une distance ?
Es Non.
Hamza Moi je pense que ça sert à rien.
P Est-ce qu'on trace une distance ?
Es Non.
P Qu'est-ce qu'on trace ?
E Un rayon.
E Segment.
P […] Est-ce qu'on peut dire qu'on a tracé des distances ? Comment on peut corriger ?
Sam Non parce que la distance, c'est l'écartement [fait le signe des guillemets] enfin c'est la longueur qu'il y a entre les deux points.
P C'est la longueur. De quoi ?
E *Z* et *F*.
E C'est la longueur du segment.
P C'est la longueur du segment par exemple *ZJ*.

Cet échange révèle à nouveau les enjeux conceptuels : comprendre qu'une distance est une propriété d'un couple de points, qui correspond à la longueur du segment qui joint ces deux points. Ces enjeux conceptuels sont associés à des enjeux langagiers : on retrouve d'une part la question de la désignation des segments et des longueurs en fonction des points, ainsi que le fait que l'on ne peut pas « tracer » une distance et qu'on ne parle pas de la « longueur entre des points ».

Exemple 2 – Travailler le rapport entre distance entre deux points et cercle en sixième

Un énoncé en sixième

Voici l'énoncé que nous avons proposé dans une classe de sixième ainsi que la figure obtenue par un élève. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés, lors de l'atelier, à la question e.

Énoncé

a) Tracer un segment [AB] de longueur 5,5 cm.

b) Tracer le cercle (C_1) de centre A et de rayon 4 cm.

c) Tracer le cercle (C_2) de centre B et de rayon 3 cm.

d) Nommer D et E les points d'intersection des deux cercles.

e) Quelle est la longueur AD ? Justifier votre réponse.

f) Quelle est la longueur BE ? Justifier votre réponse.

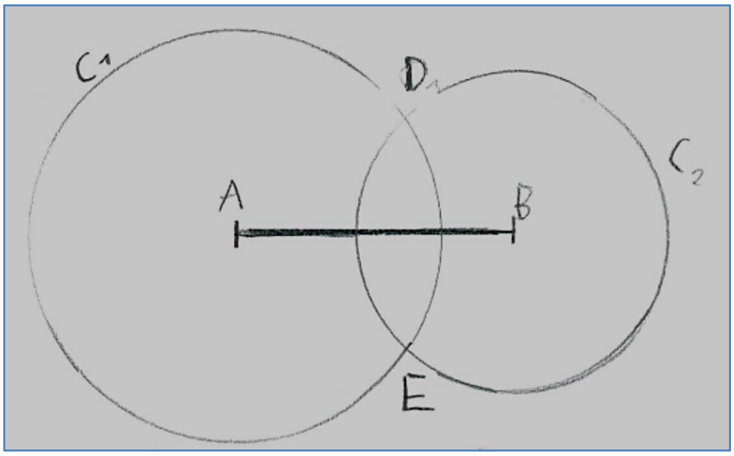


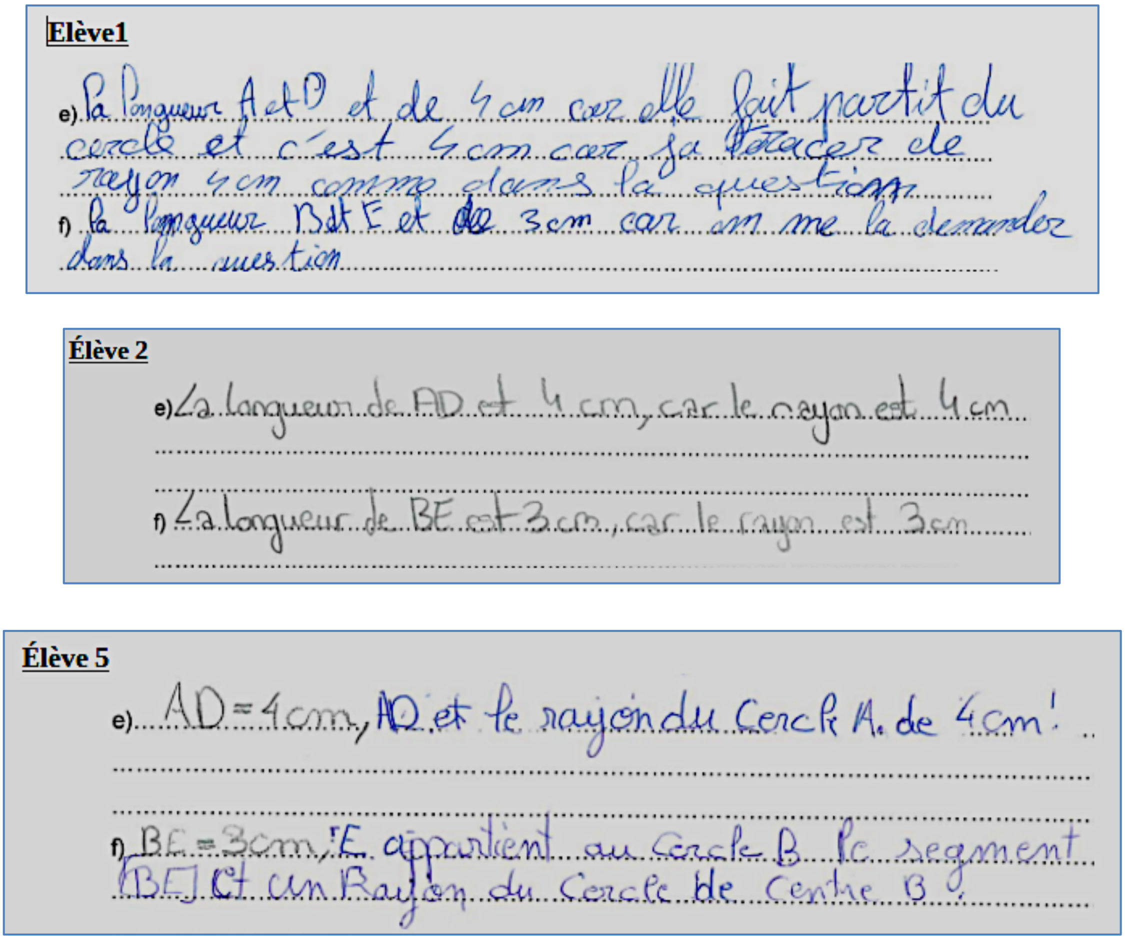
Figure 7– Enoncé de l'exercice et figure produite par un élève de 6ème

Il a été proposé aux participants à l'atelier d'analyser la tâche en cherchant la réponse attendue, se demandant si elle supposait un « raisonnement » (en laissant les participants interpréter à leur façon cette question), ainsi que le type d'objets qu'elle mettait en jeu, les enjeux langagiers associés et les difficultés attendues.

La discussion avec les participants a permis de mettre en évidence que répondre à la question e) supposait un raisonnement (au sens de la production d'un pas de déduction) pour un élève de sixième et que deux raisonnements différents (type 1 et type 2) étaient possibles.

Le raisonnement de type 1 suppose deux pas de déduction. Le premier pas établit, à partir de l'appartenance de D au cercle C_1, que le segment $[AD]$ est un rayon du cercle en s'appuyant sur la définition du rayon d'un cercle, en tant que segment. Le deuxième pas consiste ensuite à appliquer la propriété selon laquelle tous les rayons-segments du cercle ont pour longueur le rayon-mesure[2] du cercle, soit ici 4 cm. Ce raisonnement porte sur des longueurs de segments.

Les productions d'élèves suivantes (figure 8) relèvent de ce raisonnement de type 1, et on peut identifier certaines difficultés liées à sa formulation. Par exemple les expressions « la longueur A et D » ou « la longueur de AD » montrent encore une fois que l'utilisation des notations en même temps que la différenciation et le lien entre les objets segment, points et longueur est en cours d'acquisition.


Elève1

e) la Longueur A et D et de 4 cm car elle fait partit du cercle et c'est 4 cm car ja tracer de rayon 4 cm comme dans la question

f) la longueur B et E et de 3 cm car on me la demander dans la question

Élève 2

e) La longueur de AD et 4 cm, car le rayon est 4 cm

f) La longueur de BE est 3 cm, car le rayon est 3 cm

Élève 5

e) AD = 4 cm, AD et le rayon du Cercle A de 4 cm !

f) BE = 3 cm ; E appartient au Cercle B. le segment [BE] et un Rayon du Cercle de Centre B.

Figure 8 – Productions d'élèves avec raisonnement de type 1 en réponse à la tâche de la figure 7

Le raisonnement de type 2 consiste à appliquer au point D appartenant au cercle C_1 la définition du cercle comme ensemble des points à distance donnée (le rayon-mesure) du centre. Ce raisonnement porte sur des distances entre des points.

Les productions suivantes (figure 9) relèvent de ce raisonnement de type 2.

[2] Nous reprenons ici la désignation différenciée des deux sens du mot rayon proposée par Mathé et ses collègues (Mathé, Maillot et Ribennes, 2020) : ils proposent de les désigner par « rayon-segment » et « rayon-mesure ».

Élève 3

e) La longueur AD est de 4cm car AD est un rayon du cercle. Tout les points du cercle sont à même distance du centre et cette distance s'appele le rayon.

f) La longueur BE est de 3cm car AD est un rayon du cercle. Un cercle est constitué de tout les points qui sont situé à une même distance d'un autre point qui s'appele le centre du cercle. Cette distance s'appele le rayon

Élève 4

e) la distance entre les point A et D est de 4 cm car le poin D et sur le cercle (C1) de centre A et le rayon du cercle (C1) et de 4 cm.

f) la distance entre les poin B et E est de 3 cm car le poin E et sur le cercle (C2) de centre B et le rayon du cercle (C2) et de 3 cm.

Élève 6

e) ~~B~~ E est à 3 cm de B c'est le seul point avec ~~B~~ D qui ~~est~~ sont à 3 cm de B est à 4 cm de A

f) ~~D est le seul~~ D est à 4 cm de A c'est le seul point avec E qui sont à 4 cm de A ~~et~~ et à 3 cm de B

Figure 9 – Productions d'élèves avec raisonnement de type 2 en réponse à la tâche de la figure 7

Exemple 3 – Coordonnées, distances et longueurs en seconde

Un énoncé en seconde

Cet énoncé est issu du travail fait précédemment par le groupe IREM de Montpellier sur l'enseignement de la géométrie repérée (cf. Chesnais et *al.*, 2019 et Cerclé et *al.*, 2021).

Il s'agit de demander aux élèves de « Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x)=\sqrt{(25-x^2)}$ ». Après clarification du domaine de définition de la fonction et le placement de quelques points (à partir du calcul de l'image de quelques valeurs), les élèves obtiennent une figure du type suivant.

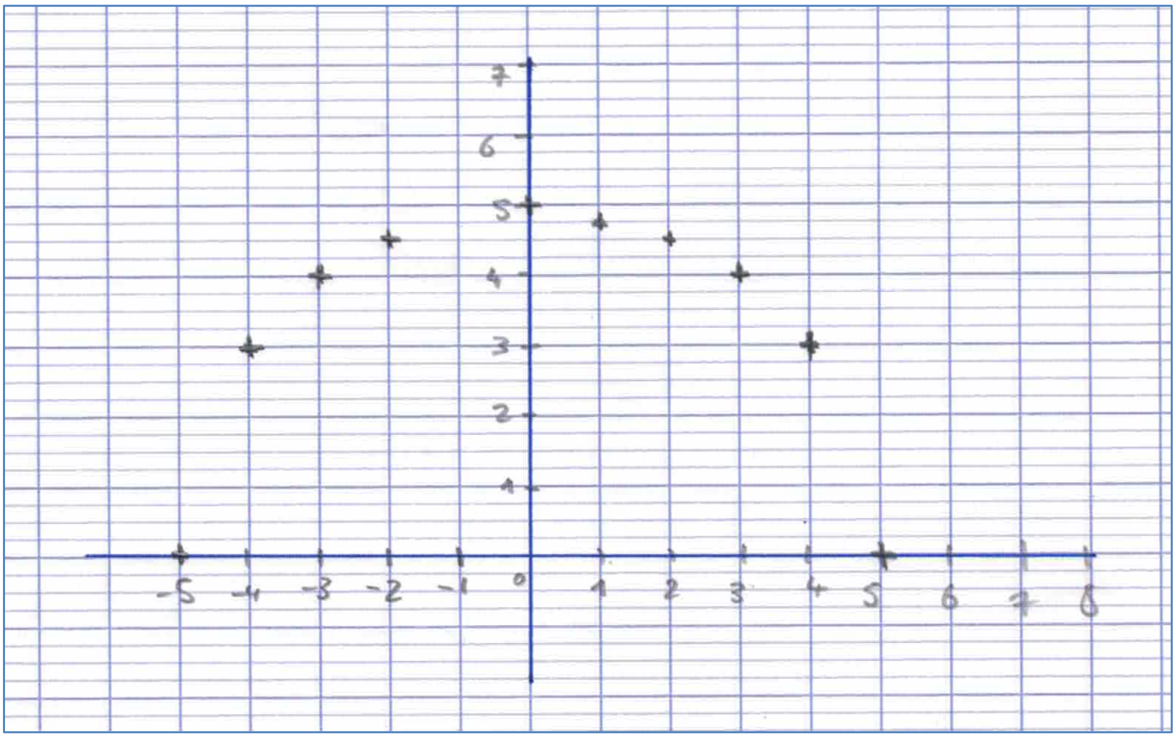


Figure 10 – Dessin produit par un élève en réponse à la tâche

La question qui est alors posée aux élèves est celle de démontrer s'il s'agit d'un demi-cercle ou non. Certains élèves arrivent à déterminer que, pour prouver qu'il s'agit d'un demi-cercle, il faut prouver que la distance de tous les points à l'origine du repère est constante. Un premier extrait vidéo permet de montrer aux participants à l'atelier que les élèves utilisent d'abord la règle (qu'ils font tourner pour mesurer les rayons), puis le compas. L'enseignante relance la recherche en demandant une preuve par le calcul, sachant qu'à ce stade de la progression, les élèves ne disposent pas encore de la formule donnant la distance entre deux points en fonction de leurs coordonnées[3].

Une deuxième vidéo nous permet d'illustrer les difficultés à déterminer la distance d'un des points à l'origine, dans ce cas précis, la longueur *OA*, où *A* a pour coordonnées (4 ; 3). En effet, deux coups de pouce successifs du professeur vont être nécessaires pour débloquer les élèves : tracer « *OA* », puis tracer « ça » où le « ça » est le segment reliant *A* et son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, que nous nommerons ici *H*). Les élèves reconnaissent alors les modalités d'application du théorème de Pythagore du fait qu'un triangle rectangle est rendu visible, mais elles butent sur l'identification des longueurs de ses côtés :

Mathilde	faut prendre Pythagore
Zélia	[elle montre le segment [*OH*]] là y a combien,… y a 4
Mathilde	non y a pas 4 [et elle prend sa règle pour mesurer]
Zélia	ah oui non, y a 3,2 au carré plus [elle mesure l'autre côté] 2,5 au carré

Les élèves continuent à raisonner sur leur dessin, d'abord en s'appuyant sur l'unité donnée par les carreaux de leur cahier, qui ont pour côté 0,8 cm, puis sur un mesurage à la règle.

[3] C'est un choix de l'enseignante de la classe. Il est possible aussi de faire travailler cette situation après avoir traité la formule. On pourra se reporter à Cerclé et *al.* (2021) pour une discussion autour des différents choix et des mises en œuvre possibles de cette situation.

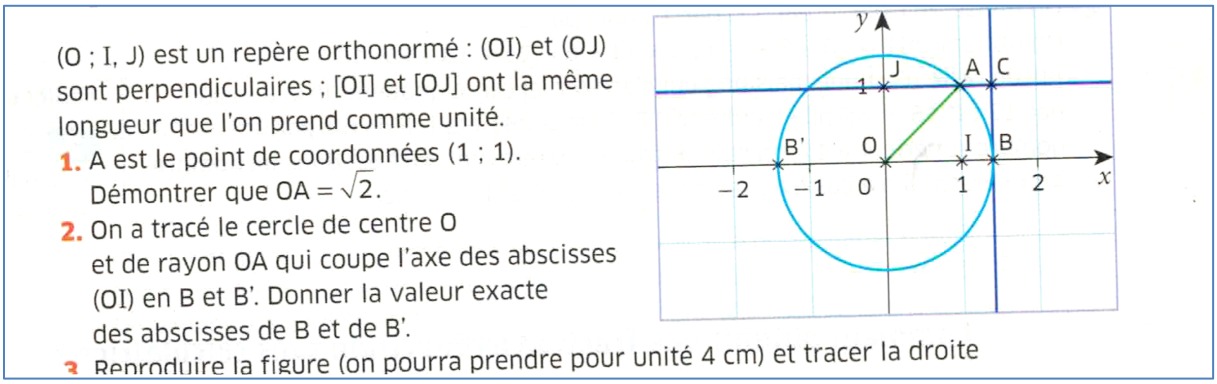
La troisième vidéo montre comment elles prennent conscience que, pour traiter la question, il faut raisonner sur la figure, et donc sur les mesures théoriques (Chesnais et Munier, 2016)[4] des objets représentés :

P pourquoi vous avez pris 3,2 ? Cette longueur [le prof montre [*OH*]], elle fait combien ?
Mathilde elle fait … 3,2
P non.
Zélia 4 ? … 4 ?
P pourquoi 4 ?
Mathilde mais non 4 c'est …
Zélia parce qu'il y a quatre unités
P et là [le prof montre [*HA*]] il y a combien ?
Mathilde 3 […] 3 parce qu'on a calculé avant.

Ces trois extraits vidéo nous ont ainsi permis de mettre en évidence les deux pas déductifs en jeu ici. Le premier fait appel au rapport entre distance et longueur (*cf.* exemples en 6ème) : « la distance entre les points *A* et *B* est la longueur du segment [*AB*] ». Il a nécessité une aide du professeur pour passer de la distance entre deux points à la longueur du segment, en suggérant d'introduire le segment en le traçant. Le second pas repose sur la propriété suivante, découlant de la définition de l'abscisse d'un point : « sur la (demi) droite graduée, si *H* a pour abscisse *a* (positif) alors $d(O\,;H) = OH = a$ ». Nous conjecturons par ailleurs que la connaissance du rapport entre longueur (ou distance) et abscisse d'un point n'est pas disponible, même si elle est mobilisable[5] avec l'aide du professeur.

Longueur, distance, abscisse

Notre conjecture est confirmée par cette production dans un devoir-maison donné quelque temps auparavant dans la même classe de seconde (figure 11).


(O ; I, J) est un repère orthonormé : (OI) et (OJ) sont perpendiculaires ; [OI] et [OJ] ont la même longueur que l'on prend comme unité.

1. A est le point de coordonnées (1 ; 1). Démontrer que $OA = \sqrt{2}$.
2. On a tracé le cercle de centre O et de rayon OA qui coupe l'axe des abscisses (OI) en B et B'. Donner la valeur exacte des abscisses de B et de B'.
3. Reproduire la figure (on pourra prendre pour unité 4 cm) et tracer la droite

Figure 11 – Enonce du devoir-maison

Une (bonne) élève a produit la réponse suivante (figure 12).

[4] Chesnais et Munier proposent d'appeler « mesure empirique » une mesure obtenue par mesurage, à l'aide d'un instrument sur un dessin et « mesure théorique » la mesure exacte, que l'on peut déduire d'un énoncé ou d'un raisonnement (incluant éventuellement un calcul) sur les propriétés de la figure.

[5] Rappelons que Robert distingue une connaissance « disponible », lorsque l'élève est capable de la mobiliser spontanément dans une situation qui la requiert et une connaissance « mobilisable », lorsque l'élève peut l'utiliser si on le lui indique.

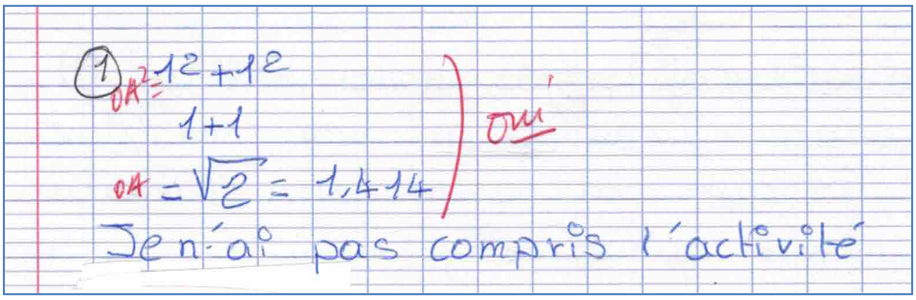


Figure 12 – Production d'une bonne élève dans le devoir-maison

L'élève a bien su calculer la longueur *OA*. On peut conjecturer que, comme les élèves des vidéos précédentes, elle peut en déduire la longueur *OB* ([*OB*] étant un autre rayon du cercle), mais qu'elle ne fait pas le pas déductif qui permet de conclure quant à l'abscisse de *B*.

Notons que nos travaux précédents avaient déjà permis de mettre en évidence cette difficulté chez les élèves dans la conceptualisation de la notion d'abscisse (comme correspondant à une distance), ainsi que la sous-estimation de cet enjeu d'apprentissage, dans les programmes et les manuels au collège (Chesnais et Destribats, 2016, Cerclé et *al.*, 2020, 2021).

Des enjeux de formation

Des connaissances et un raisonnement transparents

Lors d'une séance de formation de M1 MEEF Mathématiques (avec des étudiants se préparant à passer le CAPES de mathématiques), on a proposé aux étudiants d'analyser l'exercice suivant (figure 13) en y cherchant quels pouvaient être les enjeux d'apprentissage en les reliant aussi à des enjeux plus globaux de l'enseignement de la géométrie au collège, ainsi que les réponses possibles des élèves et leurs difficultés éventuelles.

Partie n°1

Sur le nuage de points ci-dessus,

a) Trouver la distance entre les points Z et C.

b) Repasser en rouge les points situés à la distance ZC du point Z.

c) Placer 10 points à la distance ZC du point Z (il n'est pas nécessaire de les nommer).

Figure 13 – Situation du nuage de points

Un étudiant dit :

> Par exemple, la question a, je pense ils vont quand même le faire, ils vont prendre *Z* et *C*, ils vont mesurer avec la règle, ah ça fait 4 cm. Ça je pense globalement que ce sera réussi, parce qu'en sixième, le segment…

Cette intervention révèle bien que, pour l'étudiant, le lien entre distance, longueur et segment est totalement évident, et qu'il considère que cela doit l'être, y compris pour un élève de sixième ; cela ne constitue donc pas pour lui un enjeu d'apprentissage. Par ailleurs, le même étudiant a été filmé en classe (dans le cadre d'un stage) sur la situation du demi-cercle (*cf.* notre exemple 3 ci-dessus). La vidéo montre que, face aux difficultés rencontrées par les élèves pour identifier les distances en jeu, pour lui, là encore, il est évident que la longueur OH est x : il n'explicite pas qu'il y a un passage de l'abscisse de H à la distance entre O et H, puis à la longueur OH. Ce pas déductif est transparent. Notons qu'il traite aussi comme étant évident le fait que la longueur HA est $f(x)$.

Nous soutenons qu'il y a donc là, autour du lien entre distance et longueur, des enjeux de formation relevant des contenus mathématiques eux-mêmes et des connaissances didactiques associées en ce qui concerne les trois pôles suivants : le raisonnement déductif, le langage et les objets mathématiques eux-mêmes.

Les enjeux langagiers autour de distance / longueur

Du point de vue des enjeux langagiers, il s'agit de favoriser un processus de « dénaturalisation »[6] des connaissances et du langage mathématiques nécessaires à

[6] Robert et *al*. (2012) qualifient par ce terme le fait de « faire prendre conscience que ce qui est devenu naturel pour l'enseignant, qui lui paraît évident, ne l'est pas (encore) pour les élèves » (p. 79), ce caractère évident rendant souvent transparents ou invisibles certains enjeux d'apprentissages pour les enseignants, sources alors de difficultés pour les élèves (p. 12).

l'activité d'enseignant. Pour ce qui concerne le langage, il s'agit de faire prendre conscience aux étudiants de la complexité des formes langagières mathématiques expertes, ainsi que du rôle qu'elle peut jouer (comme difficulté et comme levier) dans l'apprentissage, enfin de l'importance du travail langagier dans l'apprentissage des mathématiques (Chesnais, *à paraître*).

Dans le cas du rapport entre distance et longueur, plus précisément, on peut ainsi pointer la nécessité d'identifier des enjeux liés à l'analyse logique du langage, c'est-à-dire à la prise en charge dans le langage du statut logique des énoncés, du nombre et de la nature des objets en jeu dans un énoncé, des propriétés de ces objets et de leurs relations entre eux (Vergnaud, 1990, Durand-Guerrier, 2013, Barrier, Durand-Guerrier et Mesnil, 2018, Barrier, Chesnais et Hache, 2014). Il s'agit notamment, du point de vue du langage, de dépasser la question du lexique pour s'intéresser aux constructions syntaxiques, comme les usages de la préposition « de » (Auger et Chesnais, 2022).

La question de l'« erreur de catégorie »[7] en particulier, est intéressante : par exemple, pour ce qui nous intéresse ici, parler de longueur d'un point (ou d'un couple de points) ou de distance d'un segment. Ces erreurs témoignent d'une étape de l'apprentissage : les élèves commencent à utiliser de nouveaux mots mais sans en maîtriser encore les usages. Explorer ces usages constitue un des éléments essentiels du processus de « secondarisation des discours »[8], c'est-à-dire du processus d'évolution des discours qui accompagne l'apprentissage.

Les enjeux didactiques autour du raisonnement

Un travail en formation d'enseignants autour du raisonnement semble indispensable pour permettre, là encore, aux étudiants, de dépasser leur propre maîtrise des raisonnements dans le cadre de leur propre activité mathématique pour aller vers une « dénaturalisation », incluant une prise de conscience et de distance, nécessaire à l'enseignement.

Il nous semble notamment nécessaire de travailler en formation la notion de démonstration mathématique comme fondée sur des pas déductifs. Nous nous intéressons ici plus spécifiquement à des pas déductifs qui s'appuient sur des « énoncés-tiers » (Duval, 1992-93) quantifiés universellement que l'on instancie à un cas particulier. Ici, l'énoncé tiers est « pour tous points X et Y, la distance entre les points X et Y est égale à la longueur du segment $[XY]$ ». Dans un tel énoncé, les lettres X et Y représentent des points quelconques (ce sont en réalité des variables libres mutifiées par le quantificateur), qu'on peut remplacer par les points A et B de l'exercice ou par d'autres points singuliers : ce changement de statut des lettres lors de la substitution est souvent transparent (d'autant plus lorsque les lettres utilisées pour l'énoncé tiers dans sa formulation générale sont les

[7] En appui sur le travail du philosophe Ryle, on appelle erreur de catégorie ce qui consiste à ranger un terme dans une catégorie qui ne lui correspond pas. (https://fr.wikipedia.org/wiki/Gilbert_Ryle, consulté le 2 janvier 2022).

[8] Cette notion vient des travaux de linguistes et didacticiens du français (Jaubert, Rebière et Bernié, 2012) et a été reprise ces dernières années en didactique des mathématiques par différents auteurs (Chesnais et Coulange, 2022). Les auteurs qualifient ainsi l'évolution de discours au cours du processus d'apprentissage vu comme insertion progressive dans une communauté discursive. Ils s'appuient pour cela sur la distinction faite par Bakhtine entre discours de genre premier et de genre second. Le processus identifie l'évolution du langage lors du processus d'apprentissage comme une évolution de discours fortement liés à l'action, au contexte de l'échange et à une appréhension « première » des objets à partir de connaissances précédentes voire de connaissances quotidiennes, vers des discours de « genre second », qui réélaborent l'action et les objets, les mettent à distance avec une forme de réflexivité selon des normes et conventions plus proches de celles de la discipline, correspondant ainsi à une appréhension « plus scientifique » des objets.

mêmes que celles du cas particulier auquel on l'instancie), et peut donc représenter un obstacle pour les élèves, invisible (ou non conscientisé) pour le professeur.

Ce travail de clarification permet d'insister à la fois sur la quantification universelle de l'énoncé-tiers (travail sur le statut logique des énoncés, sur les différentes façons de formuler ces énoncés-tiers), et sur l'instanciation de cet énoncé-tiers au cas particulier de l'exercice (travail sur la substitution).

Cette prise de distance doit permettre aux étudiants de devenir capables d'expliciter les raisonnements attendus par les élèves et d'analyser ceux – souvent imparfaits – produits par ceux-ci. Il s'agit également de leur faire prendre conscience que certains pas déductifs sont nécessaires à expliciter à un certain niveau, puis ne le sont plus à un niveau ultérieur. Le pas déductif articulant distance et longueur dans les raisonnements présentés dans l'atelier en est un bon exemple.

Les enjeux didactiques autour des objets mathématiques

Le travail mené lors de l'atelier a permis de mettre en évidence certains enjeux liés à l'apprentissage de la géométrie, en particulier la question de la « déconstruction dimensionnelle des figures » (Duval, 2005).

L'identification des enjeux d'apprentissage liés à la conception des figures géométriques comme ensembles de points, notamment du lien entre lignes – objets de dimension 1 – et points – objets de dimension 0 – au collège et jusqu'au début du lycée nous semble constituer un enjeu de formation majeur. Il s'agit notamment d'identifier les difficultés liées à la conception d'un cercle comme ensemble de points, mais aussi le fait qu'un segment est défini (et donc, désigné par) ses extrémités, de même qu'un polygone est désigné par ses sommets. Il s'agit également de faire le lien avec la maîtrise des nombres, dans le cadre du travail en géométrie repérée, d'abord avec la demi-droite graduée et l'introduction des décimaux et rationnels, puis le repère, enfin la droite numérique (droite comme ensemble continu de points, en bijection avec IR) au lycée.

Enfin, un autre aspect conceptuel des objets mathématiques qui peut également être travaillé à l'occasion du travail sur les notions de distance et longueur est la distinction entre les objets, les grandeurs et les mesures, qui est, elle aussi, associée à des enjeux de langage relevant des « erreurs de catégories ».

Conclusion

Nous espérons que l'atelier a permis de mettre en évidence le fait que la distinction et l'articulation entre distance et longueur constituent des enjeux didactiques importants au début du collège et même au-delà, en lien avec des enjeux de raisonnement, de langage et conceptuels.

Nous espérons par ailleurs avoir montré qu'une entrée par les questions de langage peut permettre de renouveler un certain regard sur ces enjeux, pour les formateurs comme pour les formés.

Nous considérons en effet que ces enjeux sont cruciaux en formation et permettent de (re-)travailler à la fois les contenus mathématiques eux-mêmes et les connaissances didactiques afférentes à ces contenus et nécessaires aux enseignants, comme en témoignent certaines productions d'étudiants-professeurs, que nous avons montrées en clôture de l'atelier et qui témoignent que certains d'entre eux produisent des erreurs proches de celles d'élèves de collège.

Références

Auger, N. et Chesnais, A. (2022). Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme. In P. Escudé, C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.). *Plurilinguisme et mathématiques*. Editions Lambert Lucas.

Barrier, T. Chesnais, A. & Hache, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – revue de recherches en éducation*, 54,175-193.

Barrier T., Durand-Guerrier V. & Mesnil Z. (2019). « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique*, 13-1, p. 61-81. URL: http://journals.openedition.org/educationdidactique/3793.

Cerclé, V., Chesnais, A. et Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x, 113*, 59 à 88. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x4_1633083537539-pdf.

Cerclé, V, Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Gosselin, E., Leberre, J. et Nyssen, L. (2021). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (deuxième partie), *Petit x, 115*, 29-63.

Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S. & Herrmann, E. (2018). La géométrie dans le cadre repéré : une occasion de travailler les liens entre objets géométriques, grandeurs et nombres. *Atelier au XXIIIe colloque CORFEM*, Nîmes, 10-11 juin 2016. http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_01.pdf (consulté le 15/11/20).Chesnais, A. et Destribats, A. (2019). Construire le repère cartésien comme objet mathématique au collège. Atelier au colloque de la *COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques* (Bordeaux, 2018).

Chesnais, A. (à paraître). Actions de formation concernant le rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

Chesnais, A. & Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques, *Revue française de pédagogie, 214*, 85-121.

Chesnais, A. et Mathé, A.-C. (2018). Construire les objets élémentaires de la géométrie, de l'école au lycée : une cohérence possible ? *Conférence donnée au XXVème colloque de la COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (Bordeaux, 11 et 12 juin 2018).*

Chesnais, A. & Munier, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathé A.-C. et Mounié E. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2014-2015*.

Chevallard, Y. et Johsua, M.-A. (2003). Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3/2.*, p. 159-239.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des mathématiques, 7.2*, 5-32. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In Alain Bronner et al. (Ed.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 233-265). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives, 10*, 5-55.

Duval R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Jaubert M., Rebière M. & Bernié J.-P. (2012). « Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative » - in : forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf.

Mathé, A.-C., Maillot, V., Ribennes J. (2020). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2, *Grand N, 108*, p. 27-58.

MENESR. (2015). Programmes pour les cycles 2, 3 et 4. Ministères de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne : P. Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3)*, 133-170.

Le raisonnement par l'absurde a la transition Lycee-Universite : que savent faire les eleves et les etudiants ?

Denis GARDES, Marie-Line GARDES, IREM de Dijon, IREM de Lyon

Résumé. Dans cet article, nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde. Nous proposons deux formes de raisonnement par l'absurde que nous illustrons par des exemples. Nous présentons ensuite un questionnaire qui a été proposé à des élèves et des étudiants et nous analysons leurs réponses selon plusieurs critères (connaissance de la définition d'un raisonnement par l'absurde, connaissance d'exemples, mobilisation du raisonnement dans une démonstration, etc.). Les résultats mettent en évidence une non-maîtrise du raisonnement par l'absurde par les élèves et les étudiants mais également de nombreuses notions de logique.

Dans cet article, nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde mené par un sous-groupe de la C2i Lycée. A partir de travaux de mathématiciens et philosophes (Gardies, 1991 ; Lombardi, 1997 ; Lombard, 1997), nous avons identifié de multiples intérêts du raisonnement par l'absurde, tant pour son efficacité dans certaines démonstrations que pour son apport dans la compréhension de concepts logiques. Du point de vue didactique, il nous a semblé intéressant de questionner la pertinence ainsi que la place et le rôle du raisonnement par l'absurde, en tant qu'outil de preuve d'une part, et en tant qu'objet d'apprentissage de la logique d'autre part (Bernard et *al.*, 2018).

Dans une première étude (Gardes & Gardes, 2019), nous avons proposé une analyse d'extraits de manuels scolaires du lycée sur la place et le rôle attribués au raisonnement par l'absurde. Trois éléments essentiels ressortent de cette analyse.

Premièrement, les définitions proposées par les manuels du raisonnement par l'absurde sont énoncées pour des propositions « quelconques », sans distinguer le cas d'une proposition élémentaire et d'une proposition composée, en particulier implicative. Ces définitions sont rarement opérationnelles, et parfois mal articulées avec l'exemple proposé, c'est-à-dire qu'il est difficile de les appliquer. Par exemple, le manuel *Le Livre scolaire* de la classe de Terminale donne la définition suivante :

> **Principe**
>
> On s'intéresse à deux propositions A et B et on veut démontrer que A implique B (autrement dit, si A est vraie, alors B l'est aussi).
>
> Le **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer que A est vraie et que B est fausse. On aboutit alors à une contradiction, ce qui entraîne que B doit être nécessairement vraie.

Figure 1. Le livre scolaire 2020 Terminale p.23

Les deux exemples qui suivent cette définition sont : démontrer que « $\sqrt{2}$ est irrationnel » et démontrer que « $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal ». Les auteurs se rendent compte que leur définition n’est pas opérationnelle pour leur premier exemple puisqu’ils rajoutent dans un encadré « l’implication est cachée ici. On peut reformuler la proposition ainsi : Soit x un réel positif. Si $x^2 = 2$, alors x est irrationnel ». Pour le deuxième exemple, dont la démonstration est détaillée, ils effectuent un raisonnement par l’absurde classique concernant une proposition élémentaire, sans faire référence à la définition donnée quelques lignes plus haut.

Deuxièmement, le vocabulaire de logique n’est pas toujours utilisé à bon escient (par exemple, *contraire* à la place de *négation*) et il est d’une grande diversité (*proposition*, *affirmation*, *énoncé*, *résultat* sont employés comme des synonymes dans certains manuels). De plus, de nombreux implicites ont pu être relevés ; par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation* ; on dit qu’il faut étudier « P et *non* Q » sans dire que c’est la négation de « P implique Q ». Dans l’extrait ci-dessous, le mot *contraire* est employé à la place du mot *négation*. La notion d’*absurdité* n’est pas précisée.

Raisonner par l’absurde

- On suppose que le contraire de ce que l’on veut démontrer est vrai.
- On utilise cette hypothèse et des définitions et/ou des propriétés du cours pour faire des déductions jusqu’à arriver à une absurdité.
- La supposition de départ conduisant à une absurdité, elle ne peut être que fausse, donc son contraire est vrai.

Figure 2. Collection Barbazo Seconde, p.31

Troisièmement, nous avons pu mettre en évidence une grande diversité dans la complexité et la pertinence des exemples choisis. Certains ne semblent pas éclairants sur l’utilité d’un raisonnement par l’absurde et d’autres peu pertinents, notamment lorsqu’un autre type de raisonnement (direct, par contraposition ou par équivalence) permet une démonstration plus accessible. Dans l’exemple ci-dessous, un raisonnement direct utilisant les mêmes arguments démontre que, pour tout réel x, e^x est positif.

On veut démontrer la propriété mathématique suivante notée P :

Pour tout réel x, $e^x > 0$.

On veut utiliser un raisonnement par l’absurde.

1. Écrire la propriété contraire de P.
2. Soit a un réel. En utilisant l’égalité $a = 2 \times \frac{a}{2}$, exprimer e^a en fonction de $e^{\frac{a}{2}}$.
3. Montrer qu’il existe une contradiction entre les résultats des questions **1** et **2**.

Raisonnement par l’absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition $\overline{P}$ (proposition contraire de P) est vraie et on montre qu’elle conduit à une contradiction.

Figure 3. Collection Barbazo Première 2019, p.183

Suite à ces analyses, nous avons mis en évidence plusieurs points de vigilance pour l’enseignement de ce raisonnement en classe : vocabulaire à utiliser, séparation des cas proposition élémentaire, proposition composée, articulation de la définition et des exemples, *etc.* Nous avons également fait quelques propositions pour l’enseignement du raisonnement par l’absurde au lycée et au début de l’université.

Nous avons poursuivi cette recherche avec une seconde étude portant, cette fois, sur les connaissances d’élèves en 2019 (classe de Terminale scientifique du lycée) et d’étudiants (en classe préparatoire aux grandes écoles et en première année de licence) sur le raisonnement par l’absurde. C’est l’objet de ce présent article. Dans une première partie, nous rappelons les différentes formes du raisonnement par l’absurde. Dans une seconde partie, nous présentons la conception du questionnaire proposé aux élèves et étudiants. Dans une troisième partie, nous détaillons l'analyse des productions d'élèves et étudiants selon plusieurs critères : connaissance de la définition d'un raisonnement par l'absurde, connaissance d'exemples, mobilisation du raisonnement, *etc.* En conclusion, nous résumons les résultats obtenus dans ces premières analyses sur l'état des connaissances des élèves et des étudiants sur le raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde : principe et exemples[1]

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation est fausse.

Ce raisonnement repose sur :

- le principe du tiers exclu : une proposition ou sa négation est vraie ;
- le principe de non-contradiction : la conjonction d'une proposition et de sa négation est une proposition fausse.

Ainsi, pour démontrer qu'une proposition A est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que sa négation (*non A*) est fausse.

L'analyse des nombreux exemples de raisonnement par l'absurde nous a amenés à distinguer deux cas qui permettent de mettre en évidence deux formes de contradiction (Bernard et *al.*, 2018) :

(1) [(*non A*) ⇒ *C*] vraie et *C* fausse ou autrement dit [(*non A*) ⇒ *C*] et *non C*
(2) [(*non A*) ⇒ (*C et* (*non C*)] vraie ou autrement dit [*non A*) ⇒ (*C et* (*non C*)].

Nous allons illustrer chacun des deux cas selon que la proposition A est élémentaire ou non.

Cas où la proposition est élémentaire

Exemple 1 - Cas (1) : l'ensemble des nombres premiers est infini

Démonstration – On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers.

On les note $p_1, p_2, \dots, p_n$ et on considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$. Par définition $N \geq 2$, il admet donc un diviseur premier appartenant à l'ensemble $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Soit p_i ce diviseur premier ($1 \leq i \leq n$). Alors, p_i divise N et $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, donc la différence de ces deux nombres qui est 1. On en déduit que $p_i = 1$ et que 1 est un nombre premier.

On a bien le schéma (1) avec : A est la proposition [l'ensemble des nombres premiers est infini] et C la proposition [1 est un nombre premier].

Exemple 2 - Cas (2) : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Démonstration – On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Il existe p et q deux entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et p et q *premiers* entre eux.

Ainsi $p^2 = 2q^2$, p^2 est alors divisible par 2 et par suite p est pair.

[1] Cette partie est reprise du texte produit pour les actes de la CORFEM 2019 (Gardes & Gardes, 2019).

Il existe un entier r tel que $p = 2r$. On en déduit que $q^2 = 2r^2$, ce qui implique que q est pair.

Ainsi p et q ne sont pas premiers entre eux, étant pairs tous les deux.

On a bien le schéma (2) avec : A est la proposition [$\sqrt{2}$ est irrationnel] et C la proposition [p et q premiers entre eux].

Cas où la proposition est une implication

On rappelle que l'on veut démonter une proposition de la forme $P \rightarrow Q$. La négation de $P \rightarrow Q$ étant [P *et (non* Q*)*], on obtient les deux cas suivants, cas particuliers de (1) et (2) :

(1bis) [(P *et* (*non* Q)) $\rightarrow C$] vraie et C fausse
(2bis) [(P *et* (*non* Q)) $\rightarrow$ (C *et non* C)] vraie

Exemple 3 - Cas (1bis) :
Quels que soient les entiers relatifs a et b, $a+b\sqrt{2} = 0 \rightarrow b = 0$

Démonstration – On suppose qu'il existe a et b entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2} = 0$ et $b \neq 0$.

Ainsi $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ et est alors rationnel. Cette proposition est fausse.

On a bien le schéma (1bis) avec : P est [il existe a et b entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2} = 0$] , Q la proposition [$b = 0$] et C la proposition [$\sqrt{2}$ est rationnel].

Exemple 4 - Cas (2bis) :
Dans l'ensemble des suites réelles, si $u_0 > 1$ *et* $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$ *alors* (u_n) *diverge.*

Démonstration – On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$ et (u_n) converge (vers une limite notée L).

Comme $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout n, on en déduit $L^2 = L$, *c'est-à-dire* $L = 0$ ou $L = 1$. Ainsi on obtient $L \leq 1$.

D'autre part, la suite (u_n) est minorée par 1 (démonstration par récurrence immédiate) et est croissante. Sa limite vérifie $L \geq u_0 > 1$. On aboutit aux deux propositions : [$L \leq 1$] et [$L>1$]. Donc la suite (u_n) diverge.

On a bien le schéma (2bis) avec : P est [$u_0 > 1$ *et* $\forall\, n \in N, u_{n+1} = u_n^2$] et Q la proposition [(u_n) diverge] et C la proposition [$L>1$].

Notre étude de ces deux formes du raisonnement par l'absurde et des exemples qui les illustrent montre la richesse de ce raisonnement, comme outil de preuve d'une part, et comme objet d'apprentissage de la logique d'autre part. Ainsi, le raisonnement par l'absurde est particulièrement adapté pour démontrer des propositions élémentaires écrites sous forme négative. Par exemple, pour démontrer $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (*cf.* exemple 2 ci-dessus). Notons que les domaines mathématiques dans lesquels le raisonnement par l'absurde est largement utilisé sont l'arithmétique et la géométrie euclidienne non repérée, mais il est pertinent aussi pour l'étude des fonctions et de l'ensemble des nombres réels, et particulièrement adapté pour les problèmes concernant l'infini. Pour l'apprentissage de la logique et du raisonnement, le raisonnement par l'absurde présente de nombreux points d'intérêt. Premièrement, il mobilise de nombreux concepts de logique : proposition, négation d'une proposition, connecteurs (et, ou), quantificateurs (quel que soit, il existe), etc. Deuxièmement, il nécessite de travailler sur une hypothèse fausse (la négation de la proposition à démontrer). Troisièmement, il permet d'aborder une proposition sous des points de vue opposés, ce qui élargit l'exploration et donc la connaissance de cette proposition.

Dans le cadre de notre recherche, après avoir analysé les programmes et des documents institutionnels ainsi que des manuels scolaires et des sujets de bac (Gardes & Gardes, 2019), nous nous sommes intéressés aux connaissances effectives des élèves et des étudiants sur le raisonnement par l'absurde. Pour cela, nous avons conçu un questionnaire pour des élèves de Terminale et des étudiants de début de l'université. Lors de l'atelier proposé à la CORFEM 2022, nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de productions d'élèves de Terminale S et d'étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles.

Présentation du questionnaire proposé aux élèves et aux étudiants

Le questionnaire comporte six questions :

Q1. *Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?*
Q2. *Connaissez-vous des exemples de démonstration utilisant un raisonnement par l'absurde ? Si oui, pouvez-vous en citer ?*
Q3. *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = {u_n}^2$. On admet que la suite (u_n) est croissante. Démontrez par l'absurde que la suite (u_n) n'admet pas de limite finie.*
Q4. *Voici une démonstration.*
** Selon vous, utilise-t-elle un raisonnement par l'absurde ? Justifiez.*
** Est-elle convaincante ? Pourquoi ? Si non, comment la modifieriez-vous ?*

On veut démontrer que quel que soit n entier, (n^2 pair) implique (n pair).

On suppose que n^2 pair et n impair.

Comme n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. On en déduit que n^2 est un nombre impair. Contradiction.

Q5. *Mêmes questions avec la démonstration suivante* :

On veut démontrer par l'absurde que *zéro n'a pas d'inverse dans* $\mathbb{R}$.

On suppose que 0 a un inverse dans $\mathbb{R}$. On le note a.

Par définition de l'inverse, $0 \times a = 1$.

Or on sait que pour tout réel x, $0 \times x = 0$.

On en déduit que $0 = 1$. Ce qui est faux.

Q6. *Mêmes questions avec la démonstration suivante* :

> On admet qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ et telle que pour tout x réel, $f(x) \neq 0$.
>
> On veut démontrer que cette fonction f est unique.
>
> On suppose qu'il existe une fonction dérivable g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
>
> Comme f ne s'annule pas, on pose $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. On a alors pour tout réel x :
>
> $$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0$$
>
> La fonction k est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
>
> Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc pour tout x réel, $k(x) = 1$.
>
> On a donc pour tout réel x, $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $f = g$.

La *première question* avait pour objectif de recueillir les définitions d'un raisonnement par l'absurde données par des élèves et des étudiants et d'en examiner le caractère opérationnel. Nous avons choisi cette forme de question (explication à un pair) afin d'éviter de recueillir la définition éventuelle du cours de mathématiques ou de philosophie. Nous cherchions en effet à recueillir une définition personnelle qui nous renseigne bien davantage sur la compréhension de l'élève à propos du raisonnement par l'absurde. En appui sur nos travaux précédents sur le raisonnement par récurrence (Gardes et *al.*, 2016) et sur l'analyse de la place et du rôle du raisonnement par l'absurde dans les manuels scolaires (Bernard et *al.*, 2018 ; Gardes & Gardes, 2019), nous avons fait l'hypothèse que le vocabulaire de logique ne serait pas mobilisé par les élèves et les étudiants dans leurs définitions et qu'ils mettraient davantage en avant la structure du raisonnement. Le but d'un raisonnement par l'absurde (prouver la vérité d'une proposition) ne nous paraissait pas forcément identifié par les élèves et les étudiants.

La *deuxième question* visait à recueillir des exemples, connus des élèves et des étudiants, de propositions se démontrant avec un raisonnement par l'absurde. Nous avons fait l'hypothèse que les exemples figurant dans les programmes seraient les plus cités, notamment l'irrationalité de racine de 2, l'unicité de la division euclidienne, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'unicité de la fonction *exp*.

La *troisième question* demandait aux élèves et aux étudiants de produire une démonstration par l'absurde. L'objectif de cette question était de recueillir la manière dont ils mettaient en œuvre un raisonnement par l'absurde, tant sur le fond (contenu mathématique et règles de logique) que sur la forme (écriture de la démonstration). Nous voulions également étudier l'adéquation entre leur définition d'un raisonnement par l'absurde (question 1) et la mise en œuvre effective de celle-ci sur un exemple. En appui sur nos travaux précédents, nous avons fait l'hypothèse que la structure du raisonnement par l'absurde serait visible et prégnante dans les productions des élèves et des étudiants, sans toutefois s'appuyer sur les notions de logique nécessaires pour construire la démonstration. Par exemple, nous avons anticipé des difficultés pour repérer et écrire l'implication à démontrer et reconnaître la négation d'une implication. Notons qu'*a priori* les connaissances en jeu étant des notions classiques sur les suites, elles ne devaient pas faire obstacle.

Les *questions 4 à 6* sont construites sous la même forme : une démonstration rédigée d'une proposition est proposée et il est demandé aux élèves et aux étudiants de repérer si la démonstration utilise un raisonnement par l'absurde ou non, et s'ils sont convaincus ou non de la démonstration proposée. Nous avons choisi des propositions classiques, dans le sens où elles sont présentées dans la plupart des manuels scolaires et donc *a priori* déjà vues ou connues des élèves et des étudiants. L'objectif était d'identifier sur quels critères les élèves et les étudiants repèrent un raisonnement par l'absurde dans une démonstration. Nous avons fait l'hypothèse que les élèves repèreraient un raisonnement par l'absurde grâce à la structure syntaxique (avec appui sur les mots « On suppose (non P) », « contradiction »), sans toujours prendre en compte l'aspect sémantique.

La démonstration de la question 4 porte sur la proposition suivante : quel que soit n entier, n^2 pair implique n pair. Nous avons choisi cette proposition pour deux raisons : d'une part pour identifier comment les élèves et les étudiants repèrent un raisonnement par l'absurde dans le cas d'une proposition implicative, et d'autre part s'ils distinguent un raisonnement par l'absurde d'un raisonnement par contraposition. Nous avons fait l'hypothèse que les élèves et les étudiants n'identifieraient pas nécessairement que ce raisonnement pouvait se faire par contraposition. Nous avons également anticipé la difficulté pour les élèves et les étudiants d'écrire la négation de l'implication.

La démonstration de la question 5 porte sur la proposition suivante : 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$. Nous avons choisi cette proposition pour identifier comment les élèves et les étudiants repéraient un raisonnement par l'absurde dans le cas d'une proposition élémentaire.

La démonstration de la question 6 porte sur la proposition suivante : il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : $f' = f$; $f(0) = 1$ et pour tout x réel, $f(x) \neq 0$. Nous avons choisi cette proposition pour identifier si les élèves et les étudiants repéraient que la démonstration n'utilisait pas un raisonnement par l'absurde. Nous avons fait l'hypothèse qu'ils s'arrêteraient à la structure du raisonnement par l'absurde (par le marqueur « on suppose que… ») et ne repèreraient pas qu'il manquait l'hypothèse « f différent de g » pour écrire cette démonstration avec un raisonnement par l'absurde.

La passation du questionnaire est individuelle, sur un feuillet dédié et d'une durée de 45 minutes à 1h. Le questionnaire a été passé auprès de 8 classes de Terminale S et de 5 classes préparatoires aux grandes écoles de différentes filières (ECS, PC, PTSI, MPSI, MP).

Analyse et résultats

Nous exposons ici les premiers résultats des analyses des productions des élèves de Terminale S et des étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles, recueillis durant l'année scolaire 2018-2019. Notre analyse se porte plus en détails sur les questions 1, 4 et 5.

Résultats pour la question 1

Nous avons classé les définitions proposées par les élèves et les étudiants en quatre catégories :

1. Les *réponses correctes* qui décrivent la structure du raisonnement : *on veut montrer P, on suppose non P et on arrive à une contradiction. Donc on a P.* La figure 4 est un exemple d'une réponse de cette catégorie. On remarque que la structure du raisonnement est détaillée et que deux formes de contradiction sont mentionnées. En revanche, le vocabulaire de logique est très peu utilisé, contrairement à la réponse de la figure 5, proposée par un étudiant en MP*.

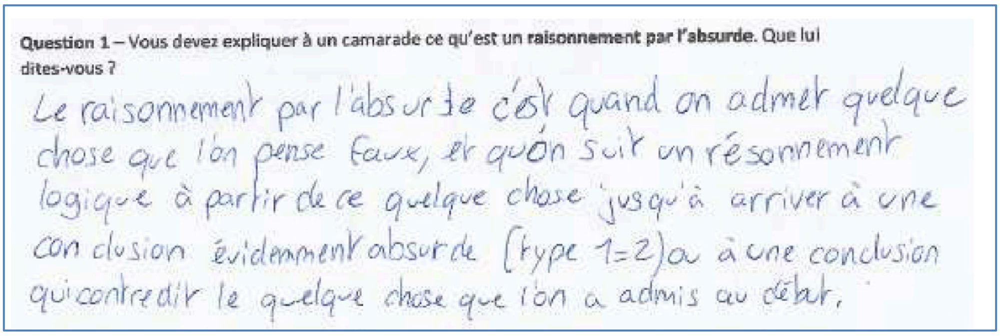


Figure 4. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses correctes »

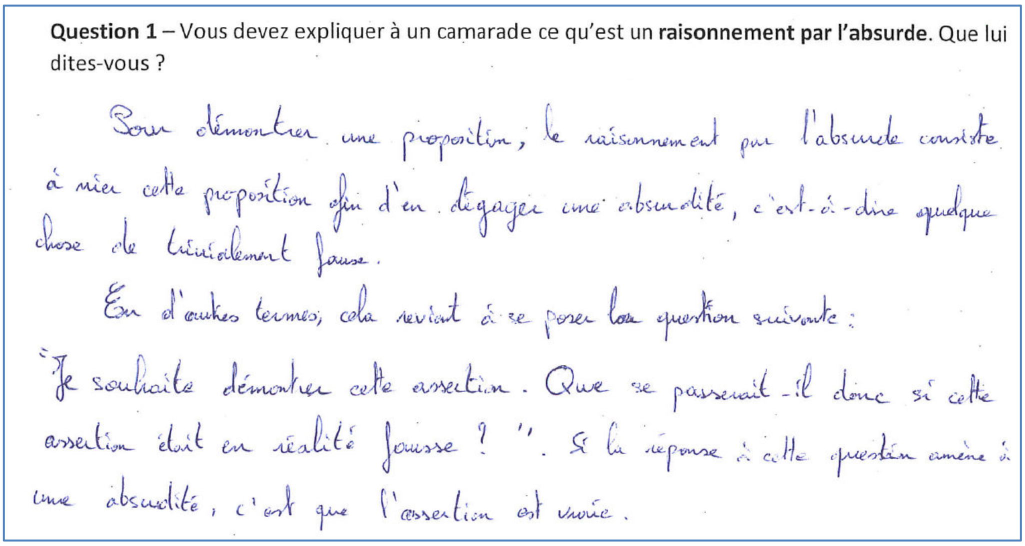


Figure 5. Réponse d'un élève de MP à la question 1, catégorie « réponses correctes »*

2. Les *réponses qui portent uniquement sur la négation* sans détailler la structure du raisonnement, par exemple : démontrer *P* vraie revient à démontrer (*non P*) fausse. La figure 6 est un exemple emblématique des réponses que nous avons classées dans cette catégorie : il est juste évoqué la première étape du raisonnement par l'absurde (on cherche à montrer (*non P*) faux) mais il n'est pas explicité comment le raisonnement par l'absurde permet d'y parvenir. Nous pouvons également constater que le vocabulaire de logique n'est pas bien mobilisé (prouver quelque chose, contraire, *etc.*).

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un type de démonstration qui prouve quelque chose en montrant que son contraire est faux.

Figure 6. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui portent uniquement sur la négation »

3. Les *réponses qui témoignent d'une compréhension partielle* du raisonnement. Les réponses montrent que les élèves et les étudiants n'ont pas compris, outre la structure du raisonnement, le but du raisonnement (prouver qu'une proposition est vraie), comme en témoigne la réponse de la figure 7.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui aboutit à quelque chose de non cohérent. On cherche à mettre en évidence une incohérence.

Figure 7. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

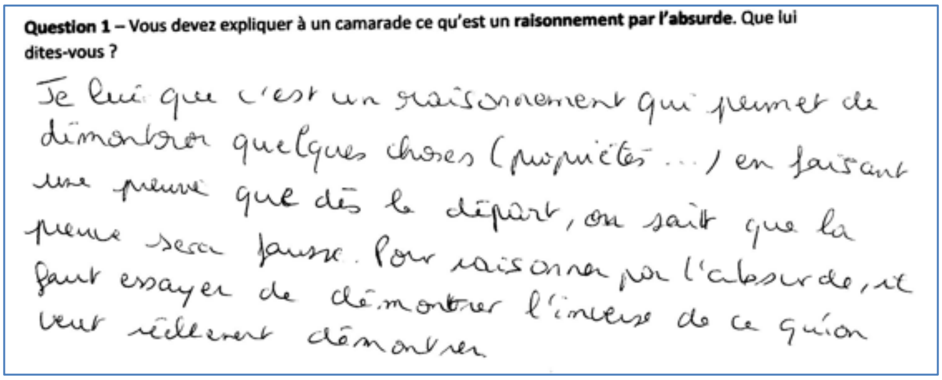
Le fait que l'on démontre que (*non P*) est fausse pour en déduire que *P* est vraie n'est pas repéré dans un certain nombre de réponses. Le lien entre *P* et (*non P*) n'est pas intégré comme l'atteste la figure 8.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde c'est le fait de démontrer quelque chose de faux pour en déduire le vrai.

Figure 8. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

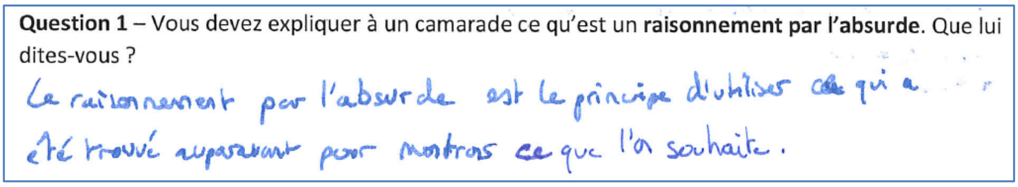
Dans cette catégorie, nous relevons aussi des réponses où la confusion entre « raisonnement/démonstration » et « proposition » est présente. Cela amène les élèves à dire que la démonstration, lors d'un raisonnement par l'absurde, est fausse (figure 9), au lieu de dire que (*non P*) est fausse.


Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Je lui que c'est un raisonnement qui permet de démontrer quelques choses (propriétés ...) en faisant une preuve que dès le départ, on sait que la preuve sera fausse. Pour raisonner par l'absurde, il faut essayer de démontrer l'inverse de ce qu'on veut réellement démontrer

Figure 9. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

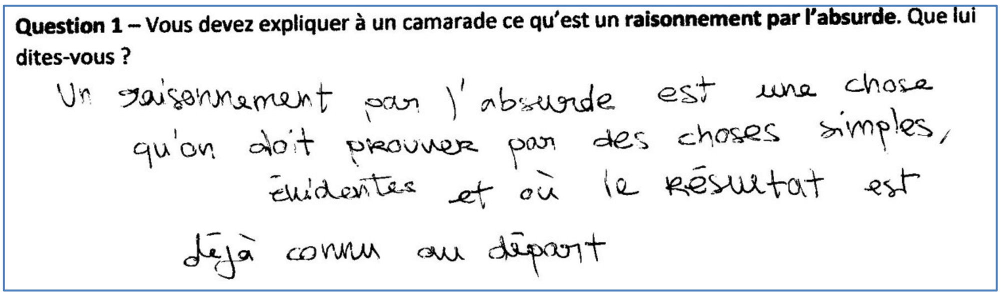
4. Les réponses *qui témoignent d'une totale incompréhension du raisonnement.* Dans ce cas, les réponses ne mentionnent ni l'idée de négation, ni l'idée de contradiction comme le montre la réponse de la figure 10.


Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Le raisonnement par l'absurde est le principe d'utiliser ce qui a été trouvé auparavant pour montrer ce que l'on souhaite.

Figure 10. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une totale compréhension »

On repère aussi des réponses où des conditions au raisonnement sont ajoutées, par exemple « prouver par des choses simples » (figure 11) ou « utiliser des calculs pas compliqués », comme marqueurs du raisonnement par l'absurde.


Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est une chose qu'on doit prouver par des choses simples, évidentes et où le résultat est déjà connu au départ

Figure 11. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une totale incompréhension »

Certaines incompréhensions du raisonnement proviennent de la confusion entre « démontrer une proposition fausse » et « résultat absurde », comme le montre la figure 12.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est lorsque au debut, nous savons pas si la conjecture ou hypothèse qu' on n'eret est juste ou fausse. Il faut donc la demontrer pour obtenir un resultat qui sera ~~et~~ validé soit juste ou faux c'est à dire absurde.

Figure 12. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une totale incompréhension »

5. Les *réponses qui qualifient le raisonnement par l'absurde de raisonnement absurde* ou non logique. Elles expriment une association du qualificatif « absurde » au sens commun de « absurde » (*i.e.* contraire à la raison, à la logique). Les figures 13 et 14 montrent un exemple de réponses classées dans cette catégorie.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un raisonnement sans logique ~~et~~ qui et/ou se contredit lui-même et/ou qui ne prouve pas ce qu'on cherche à prouver au départ.

Figure 13. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, « catégorie raisonnement absurde »

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un **raisonnement par l'absurde**. Que lui dites-vous ?

Je lui dirai que l'on sait que quelque chose est faux, mais on va admettre qu'il est vrai pour pouvoir prouvé l'authenticité d'une propriété.
C'est absurde car on sait déjà à l'énoncé que l'hypothèse de départ est fausse.

Figure 14. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, « catégorie raisonnement absurde »

En Terminale S, la majorité des réponses relèvent des catégories 2 à 4, très peu d'élèves écrivent une définition correcte d'un raisonnement par l'absurde. Chez les étudiants, on trouve davantage de réponses relevant de la première catégorie. Cependant, à l'exception des étudiants de MP*, les élèves et les étudiants ne mobilisent pas le vocabulaire approprié de la logique. Comme nous l'avions mis en évidence dans nos études précédentes sur l'analyse des manuels, le vocabulaire de logique n'est pas utilisé à bon escient (par exemple, *contraire* ou *inverse* à la place de *négation*) et de nombreuses confusions ont pu être relevées (par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation*). Ajoutons également que les élèves ont beaucoup de difficultés à expliciter le but d'un raisonnement par l'absurde (de nombreuses réponses disent qu'il sert à « démontrer un résultat faux »). Ceci est probablement dû au fait que la notion de *proposition* n'est pas dégagée et travaillée.

Résultats pour la question 2

L'analyse des réponses à cette question a consisté à catégoriser l'exemple proposé (exemple issu des programmes ou autre exemple) et analyser la pertinence de leur proposition.

Les élèves de Terminale S donnent très peu d'exemples et lorsqu'ils en mentionnent, ces exemples sont pertinents et majoritairement issus de leurs cours de mathématiques et des programmes (par exemple unicité de la limite d'une suite, unicité de la fonction exponentielle). Les étudiants, en revanche, proposent presque tous des exemples classiques, corrects et pertinents. La démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est très souvent mentionnée.

Résultats pour la question 3

L'analyse s'est effectuée sur trois points : la justesse de leur raisonnement, l'utilisation des notions de logique (implication, négation) et l'articulation entre la mise en œuvre de leur démonstration et leur définition proposée à la question 1.

En Terminale S, cette question est peu effectuée et quand elle est abordée, les élèves commencent la démonstration par « si (u_n) a une limite finie l » et tentent de mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde, en s'appuyant sur sa structure. Les étudiants effectuent presque tous la question et abordent la démonstration de la même façon. Cependant, très peu d'élèves et d'étudiants arrivent au bout de la démonstration. Les difficultés relevées sont : l'écriture de l'implication à démontrer, l'écriture de la négation de l'implication et la traduction de « l est la limite de la suite ». Ces difficultés impliquent qu'ils ne peuvent pas mobiliser les hypothèses pour élaborer leurs démonstrations, qu'ils essaient de chercher d'autres contradictions (par exemple avec l'unicité de la limite ou la fonction carrée) sans y parvenir et donc échouent à mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

Résultats pour les questions 4 à 6

Nous avons analysé ces trois questions avec deux critères communs : identification d'un raisonnement par l'absurde et justification apportée. Pour la question 4, nous avons ajouté un critère : la reconnaissance de la contraposition.

Pour *la question 4,* la majorité des élèves et des étudiants reconnait un raisonnement par l'absurde. La justification apportée est très souvent liée à la structure du raisonnement : "on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer et on aboutit à une contradiction" (figure 15). On voit souvent les mots « on suppose … » et « contradiction » soulignés ou surlignés (figure 17).

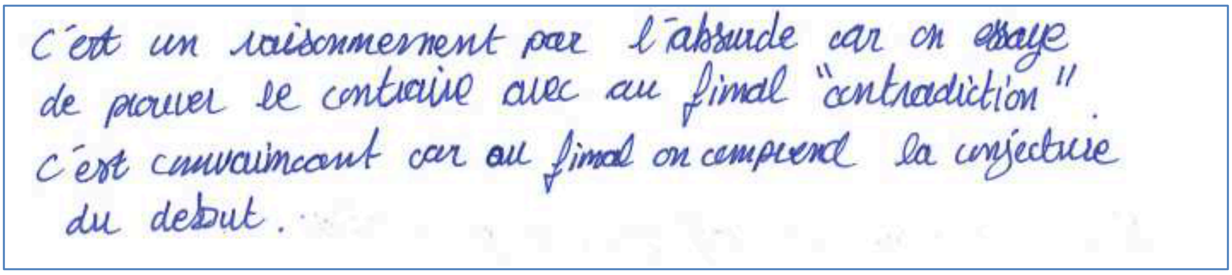

C'est un raisonnement par l'absurde car on essaye de prouver le contraire avec au final "contradiction". C'est convaincant car au final on comprend la conjecture du debut.

Figure 15. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

Mais affirmer que l'on est bien en présence d'un raisonnement par l'absurde ne garantit pas la compréhension de la démonstration. La difficulté ici provient très souvent de l'implication : l'équivalence avec la contraposée ou la négation de l'implication ne sont pas acquises (figures 16 et 17).

- Oui, car elle part d'une idée fausse pour ensuite la contredire.
- Non, elle montre que si n est impair, n^2 est impair, ce qui n'implique pas forcément que si n est pair n^2 est pair ou l'inverse.

Il faudrait désormais montrer que si n est pair, n^2 est pair

Figure 16. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

Question 4 - Voici une démonstration.

- Selon vous, utilise-t-elle un raisonnement par l'absurde ? Justifiez.
- Est-elle convaincante ? Pourquoi ? Si non, comment la modifieriez-vous ?

On veut démontrer que quel que soit n entier, (n^2 pair) implique (n pair).
On suppose que n^2 pair et n impair.
Comme n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
On en déduit que n^2 est un nombre impair. Contradiction.
Donc que quel que soit n entier, n^2 pair implique n pair.

Oui elle utilise un raisonnement par l'absurde car si n^2 pair implique n pair. Donc par l'absurde cela devient si n^2 impair alors n impair

Figure 17. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

Le quart des réponses restantes mentionnent qu'il ne s'agit pas d'un raisonnement par l'absurde et apportent majoritairement comme justification « l'implication n'est pas dans le bon sens » ou « on ne part pas de n^2pair » (figure 18). Ces justifications révèlent une difficulté des élèves et des étudiants à reconnaître la négation d'une implication.

- Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde parce qu'on ne part pas de "n^2 pair" mais de "n impair". On ne prouve pas.
- Pas convaincante

Figure 18. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur l'implication

Notons que parmi les réponses « non », quelques étudiants apportent comme justification « non car c'est un raisonnement par contraposition » (figure 19). En effet, en vérifiant la négation, ils arrivent à repérer que la proposition n^2 n'est pas utilisée. Les élèves de Terminale S ne semblent en revanche pas faire de distinction entre un raisonnement par l'absurde et un raisonnement par contraposition.

· Non : on veut montrer que $A \Rightarrow B$, on suppose que A et $\overline{B}$ (soit $\overline{A \Rightarrow B}$), et on arrive à une contradiction, mais cette contradiction porte sur le présupposé. C'est donc plutôt un raisonnement par contraposition (pour montrer que $A \Rightarrow B$, on montre $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$)

Figure 19. Réponse d'un élève de CPGE à la question 4
avec justification sur la contraposition

Une grosse surprise pour nous a été de constater qu'un nombre non négligeable d'élèves était incapable de repérer ce qui était démontré : si n impair alors n^2 est impair (figure 20). C'est vrai que repérer l'objet d'une démonstration n'est pas un exercice habituel dans l'enseignement.

Cette démonstration ne me semble pas utiliser à proprement parler un raisonnement par l'absurde, puisque, pour démontrer que n^2 pair implique n pair, elle ne fait que prouver le contraire, c'est-à-dire que n^2 impair implique n impair, supposant au départ une propriété dont elle ne montre pas totalement l'absurdité.

Figure 20. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4,
ne repérant pas ce qui est démontré

Pour la *question 5*, la quasi-totalité des élèves et des étudiants reconnaissent un raisonnement par l'absurde et les justifications s'appuient sur la structure du raisonnement. La majorité des justifications des élèves de TS mentionnent uniquement le fait de supposer (*non P*) : « on suppose l'inverse de ce qu'on veut démontrer » (figure 21). Cela est cohérent avec les définitions proposées à la question 1 qui relèvent de la catégorie 2 (voir résultats de la question 1).

- Raisonnement par l'absurde puisque l'on suppose l'inverse de ce que l'on veut démontrer
- Convaincante à mon avis puisque utilisant des propriétés connues

Figure 21. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 5
avec justification sur la structure (présence de non P)

Les justifications des étudiants mentionnent en plus la notion de contradiction : « on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer et on aboutit à une contradiction » (figure 22), mais toujours sans l'utilisation du vocabulaire de logique. Ceci est également cohérent avec les définitions proposées à la question 1 qui relèvent davantage de la catégorie 1 (voir résultats de la question 1).

> C'est un raisonnement par l'absurde car on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer pour arriver à une contradiction. Cette démonstration est convaincante pour moi car elle suit une logique.

Figure 22. Réponse d'un élève de CPGE à la question 5 avec justification sur la structure (présence de non P et d'une contradiction)

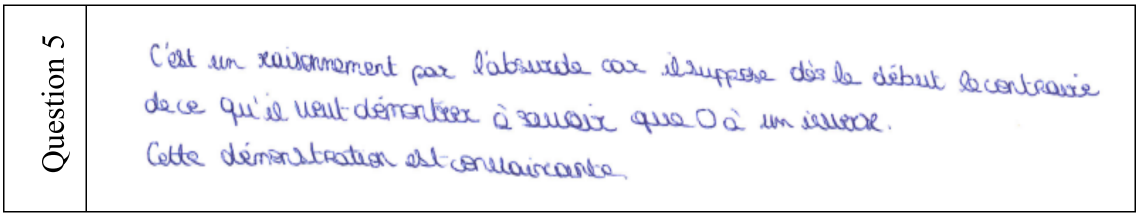
Notons également que plusieurs élèves et étudiants trouvent la démonstration convaincante et justifient avec des arguments de clarté, de précision, de logique ou de simplicité (figure 23). Peu d'arguments mathématiques sont avancés.

> - Oui car on a montré que 0 n'a pas d'inverse en montrant que "0 a un inverse" est faux
>
> - Oui elle est convaincante de par sa structure ("Or", "Donc") et dans le fond, elle s'appuie sur une propriété basique des nombres, logique.

Figure 23. Réponse d'un élève de CPGE à la question 5 avec justification sur la clarté, précision, logique, simplicité

En analysant conjointement les réponses aux questions 4 et 5, nous avons relevé que les élèves et les étudiants reconnaissaient mieux un raisonnement par l'absurde dans la démonstration de la vérité d'une proposition simple (question 5) que dans celle d'une proposition implicative (question 4). La difficulté se situe autour de la connaissance de la négation (figure 24) : ils ne parviennent pas à reconnaitre la négation d'une proposition implicative et ne repèrent donc pas que le raisonnement pose (*non P*) au départ, un critère qu'ils utilisent pour déterminer s'il s'agit d'un raisonnement par l'absurde ou non.

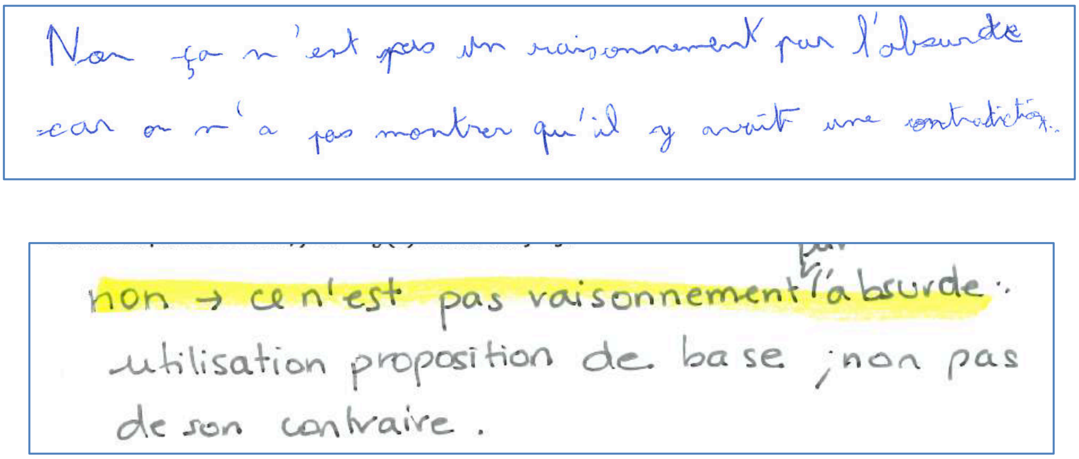
Question 4	Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde car ici on démontre que (n^2 impair) implique (n impair). Pour que le raisonnement soit . il aurait fallu montrer que (n^2 pair) implique (n impair).


Question 5

C'est un raisonnement par l'absurde car il suppose dès le début le contraire de ce qu'il veut démontrer à savoir que 0 a un inverse.
Cette démonstration est convaincante

Figure 24. Réponse d'un élève de Terminale S aux questions 4 et 5, sur la reconnaissance d'un raisonnement par l'absurde

Pour la *question 6*, la majorité des élèves et des étudiants pensent qu'il ne s'agit pas d'un raisonnement par l'absurde. Les justifications portent majoritairement sur la structure du raisonnement par l'absurde, comme pour les questions 4 et 5 : « il n'y a pas de contradiction », « on ne part pas de l'hypothèse inverse » (figure 25). De même, ceux qui pensent que c'est un raisonnement par l'absurde le justifient avec des explications portant sur la structure (figure 26).


Non ça n'est pas un raisonnement par l'absurde car on n'a pas montrer qu'il y avait une contradiction.

non → ce n'est pas raisonnement par l'absurde.
utilisation proposition de base ; non pas de son contraire.

Figure 25. Réponse de deux élèves de Terminale S à la question 6, justification sur la structure (supposer (non P), avoir une contradiction)


Oui, c'est un raisonnement par l'absurde car on suppose quelque chose et on cherche à montrer une contradiction.

Figure 26. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur la structure (supposer (non P), avoir une contradiction)

Quelques élèves et étudiants évoquent un raisonnement direct (figure 27) et d'autres mentionnent qu'il faudrait ajouter « $f \neq g$ » pour avoir un raisonnement par l'absurde (figure 28). La plupart sont convaincus par la démonstration, les justifications sont très diverses et on retrouve les critères de clarté, de précision, de logique ou de simplicité, avancés aussi pour la question 5.

Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde, l'unicité de cette fonction est montré de manière directe : soit deux fonctions f et g admettant des hypothèses[...] alors $f = g$. (il n'y a pas de contradiction)

Figure 27. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur le type de raisonnement (direct)

Cette démonstration n'utilise pas un raisonnement par l'absurde, car elle n'aboutit pas à une contradiction, elle montre simplement que $f = g$. Elle reste convaincante, néanmoins, il faudrait ajouter au début que f et g sont différentes, ce qui nous permettrai, par le même raisonnement, d'obtenir une contradiction

Figure 28. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur l'ajout de f différent de g

Conclusion et perspectives

Nous pouvons conclure de ces premières analyses que les élèves et les étudiants ne comprennent pas réellement ce qu'est un raisonnement par l'absurde. En effet, dans les définitions proposées, on constate qu'ils essaient de décrire sa structure mais ils n'en comprennent pas les principes logiques (non-contradiction et tiers exclu) sur lesquels il s'appuie. On relève également une ambiguïté, pour plusieurs élèves de Terminale S, sur la signification du mot « absurde ». Ils avancent alors qu'un raisonnement ne peut pas être par l'absurde s'il est logique.

Comme nous l'avions déjà mis en évidence pour le raisonnement par récurrence (Gardes et *al.*, 2016), pour reconnaître un raisonnement par l'absurde, les élèves et les étudiants cherchent à identifier les différentes étapes de sa structure, c'est-à-dire la négation de la proposition à démontrer, la contradiction et la conclusion. Certains, dans le cas d'une implication (voir question 4), ne parviennent pas à repérer ce qui est démontré.

Le vocabulaire de logique est rarement mobilisé par les élèves et les étudiants. Dans les définitions proposées, le terme *proposition* est peu utilisé. A sa place, on trouve *hypothèse*, *quelque chose*, *ce qu'on veut démontrer*. De même, le terme *négation* est rarement employé, ils utilisent les termes *contraire* et *inverse*. Ces résultats ne sont pas surprenants, ce sont aussi ces termes que l'on retrouve dans de nombreux manuels scolaires (Gardes et *al.*, 2016 ; Gardes & Gardes, 2019). Nous pouvons souligner à nouveau l'importance d'utiliser le vocabulaire adéquat (*i.e. proposition, négation* et *contradiction*) dans le processus de conceptualisation, d'autant plus que ce vocabulaire est au programme (Grenier, 2015).

Les réponses des élèves et des étudiants mettent également en évidence une non-maîtrise des notions de logique. En effet, on peut relever des confusions entre la valeur de vérité d'une proposition et sa négation, par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation*. La notion de contradiction, qui n'est jamais explicitée dans les manuels scolaires, ne semble pas comprise par de nombreux élèves et étudiants, certains l'associent à un raisonnement faux.

La négation d'une proposition implicative n'est pas connue de nombreux élèves et étudiants (Ben Kilani, 2005 ; Deloustal-Jorand, 2004 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Mesnil, 2014), ce qui les empêche de comprendre et reconnaître un raisonnement par l'absurde dans une démonstration mais également de le distinguer d'un raisonnement par contraposition. En effet, comme ils s'appuient sur le repérage de la structure du raisonnement par l'absurde, ils cherchent la négation de la proposition à démontrer, ne la repèrent pas et donc concluent que ce n'est pas un raisonnement par l'absurde. Cette difficulté pourrait être renforcée par les contenus des manuels scolaires qui proposent majoritairement des définitions du raisonnement par l'absurde pour des propositions « quelconques », sans distinguer le cas d'une proposition élémentaire et d'une proposition implicative.

Les connaissances sur le raisonnement par l'absurde entre les élèves de Terminale S et les étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles ne sont pas très différentes. On peut néanmoins relever que les étudiants ont une idée un peu plus précise de la structure d'un raisonnement par l'absurde, sans toutefois parvenir à le formaliser avec des notions et du vocabulaire de logique. Ils connaissent tous des exemples pertinents se démontrant avec un raisonnement par l'absurde et certains parviennent à distinguer un raisonnement par l'absurde d'un raisonnement par contraposition grâce à leur maîtrise de la négation d'une implication.

Des analyses complémentaires sont toujours en cours, notamment l'analyse des questions 2, 3 et 4 à 6. Pour la question 2, nous cherchons à lister et quantifier les exemples proposés par les élèves et les étudiants. Pour la question 3, nous cherchons à analyser plus finement les démonstrations produites par les élèves et leur articulation avec les définitions données à la question 1. Pour les questions 4 à 6, nous cherchons à catégoriser les justifications données par les élèves et les étudiants pour reconnaitre un raisonnement par l'absurde et pour le trouver convaincant. Ce travail permettrait, d'une part d'affiner nos premiers résultats qualitatifs et d'autre part d'apporter des données quantitatives, notre échantillon étant assez important (8 classes de TS et 5 CPGE).

Notons que les points de vigilance et les propositions pour l'enseignement que nous avions faites en 2019 suite à l'analyse des manuels scolaires (Gardes & Gardes, 2019) prennent davantage de sens. Il serait ainsi intéressant de les mettre en place réellement dans des séquences d'enseignement et d'étudier les apprentissages des élèves et des étudiants.

Bibliographie

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Université Claude Bernard Lyon 1.

Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2018). Le raisonnement par l'absurde. Une étude didactique pour le lycée. *Petit x, 108,* 5-40.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des* *ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Université Joseph Fourier Grenoble.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Gardes, D., & Gardes, M.L. (2019). Le raisonnement par l'absurde à la transition lycée-université. *XXVIe Colloque de la CORFEM*, Strasbourg, France.

Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2016). Etat des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x, 100,* 67-98.

Gardies, J. L. (1991). *Le raisonnement par l'absurde.* Paris: PUF.

Grenier, D. (2015). De la nécessité de définir les notions de logique au lycée. *Repères IREM, 100,* 65-83.

Lombard, P. (1996). A propos du raisonnement par l'absurde. *Bulletin APMEP, 405,* 445-455.

Lombardi, H. (1997). Le raisonnement par l'absurde. *Repères IREM, 29,* 27-42.

Mesnil, Z. (2014). Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation. *XXIe Colloque de la CORFEM.* Grenoble, France.

THEME 2

DECRIRE ET COMPRENDRE LES PRATIQUES ENSEIGNANTES – IMPACT SUR LA FORMATION

La mission de formation – initiale et continue – d'enseignants confronte le formateur au besoin d'outils pour décrire et comprendre les différentes facettes de l'activité enseignante, leurs tensions, leurs interactions, leurs déterminants. Ces outils d'analyse des pratiques peuvent en outre permettre l'identification de leviers de formation.

Une réflexion sur ces outils et sur leurs usages (possibles ou effectifs) en formation s'avère régulièrement nécessaire au sein de la communauté des formateurs, à la fois pour tenir compte de l'émergence et de la stabilisation de cadres théoriques généraux et pour permettre l'étude d'enjeux spécifiques : formats d'enseignements particuliers (séances TICE, problèmes ouverts, moments de démonstration), usage des ressources, publics particuliers (ZEP, ASH), pratiques de différenciation, pratiques d'évaluation, enseignement distanciel ou hybride.

Penser l'accompagnement du developpement professionnel des enseignants de mathematiques a partir de la recherche en didactique des mathematiques : le cas des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s

Aurélie CHESNAIS

Résumé.
La conférence vise à montrer la manière dont certaines recherches menées en didactique des mathématiques peuvent outiller la conception de contenus et dispositifs de formation, et à livrer une réflexion sur le rôle, dans certains de ces dispositifs, des formateurs pour l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques, en formation initiale et continue. Je m'appuierai en particulier sur des études, dont je donnerai quelques éléments détaillés, sur des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s conçus et réalisés en appui sur des principes issus de la recherche en didactique des mathématiques.

Cette conférence visait à apporter des éléments sur la manière dont la recherche en didactique des mathématiques peut nourrir une réflexion et fournir des pistes pour un certain nombre de questions de formateurs·trices / de formation. En voici un certain nombre, « en vrac », et sans viser l'exhaustivité :

- Comment faire pour que la formation professionnelle soit « utile » (à la fois aux apprentissages des élèves et au bien-être des enseignants) ? Pour faire se questionner les professionnels, faire « bouger », faire comprendre, faire essayer… ?
- Il y a pour les formateur·trice·s à la fois des questionnements très locaux, sur les déroulements : Que dire ? À quel moment ? À partir de quel support ? Quelles questions poser ? Quels conseils donner ? Sur quoi attirer l'attention ? Et des questionnements globaux, qui conditionnent les précédents, sur les scénarios et dispositifs : compte tenu des contraintes, quels choix faire pour engager au mieux les participants ?
- Comment faire pour que la formation aide à dépasser la reproduction des pratiques existantes, si besoin est ?
- Comment répondre aux besoins immédiats (en particulier en formation initiale), tout en visant plus loin ?
- Comment s'adapter à la diversité des publics ? Comment préparer le travail d'équipe ?
- Comment s'appuyer sur sa propre pratique (d'enseignant·e, de chercheur·e, de formateur·trice), voire sur ses connaissances, pour que cela serve la formation ?
- Comment arriver à faire s'articuler les interventions de différents intervenants, notamment en formation initiale, avec les enseignants-chercheurs (didacticiens ou mathématiciens), les Professeurs Formateurs Associés, et autres ; mais aussi en formation continue ; et les différents types d'interventions (en collectif, en visites…) ?
- Que faire en formation des « ressources » produites par la recherche pour

l'enseignement ?
- Quel fonctionnement des collectifs d'enseignant·e·s (comme les équipes pédagogiques en établissement ou les laboratoires de mathématiques ou autres) pour favoriser/soutenir le développement professionnel de chacun ?

Cette conférence s'inscrit ainsi dans la continuité de la table ronde proposée au colloque de la CORFEM en 2021, dans laquelle plusieurs collègues du bureau de la CORFEM avaient présenté des exemples d'actions de formation, plutôt en formation initiale, en mettant l'accent sur la manière dont la recherche nourrissait les choix de formateurs (Chesnais, Coulange, Gandit et Train, 2021). J'ai choisi pour cette conférence de prendre un autre angle pour aborder cette problématique, en m'intéressant à des dispositifs collaboratifs entre des chercheur·e·s en didactique des mathématiques (DDM par la suite) et des enseignant·e·s, visant plutôt le développement professionnel d'enseignants déjà expérimentés.

La première partie de ce texte propose un bref historique établissant des liens entre l'ingénierie didactique telle qu'elle a émergé en même temps que la didactique des mathématiques s'est développée comme discipline de recherche, et les dispositifs actuels existants organisés autour d'une collaboration entre chercheur·e·s et enseignant·e·s. Je montrerai que l'avènement de tels dispositifs coïncide avec le fait de repenser le rôle de la recherche en didactique des mathématiques pour contribuer à l'amélioration du fonctionnement du système scolaire et la formation des enseignant·e·s. J'évoquerai ensuite quelques exemples de ces dispositifs tels qu'ils sont décrits actuellement et leurs liens avec la recherche en didactique des mathématiques. Je m'appuierai enfin sur la description plus précise de trois dispositifs très proches, pour exemplifier un certain nombre de « principes » issus de la recherche et qui pourraient permettre d'enrichir la réflexion sur l'accompagnement du développement professionnel enseignant·e·s. La conclusion permettra de revenir aux questions posées en introduction.

Petit historique : des ingénieries didactiques aux dispositifs collaboratifs chercheurs-enseignants

L'origine de la DDM des maths comme discipline de recherche est très liée au développement de l'ingénierie didactique (ID par la suite) : des chercheur·e·s construisaient des situations qui étaient mises en œuvre dans des classes par des enseignant·e·s, dans un cadre « contrôlé »[1] pour identifier des phénomènes didactiques, en particulier au COREM[2], sous la houlette de Guy Brousseau.

---

[1] On trouve, sur la page de présentation de « rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire », (Brousseau et Brousseau, 1987), sur le site de Guy Brousseau, la mention suivante : « Avertissement : La couverture porte l'annonce : « Document pour les enseignants et pour les formateurs ». En réalité ce document n'était pas utilisable sans l'aide de formateurs avertis et les auteurs ont très vite déconseillé aux enseignants d'entreprendre de réaliser seuls ces leçons. « Nous ne considérons pas ce processus comme un modèle destiné à toutes les classes ». Il s'agissait d'un dispositif destiné à provoquer des apprentissages et des phénomènes didactiques qui étaient des objets de recherches. Les mesures extrêmement sévères prises pour protéger les enfants d'abord, et pour surveiller le dispositif de recherches n'ont jamais été reproduites dans un système d'observation comparable. Elles étaient indispensables. » https://guy-brousseau.com/1883/rationnels-et-decimaux-dans-la-scolarite-obligatoire-1987-2/, consulté le 28 Juin 2022

[2] COREM : Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques mis en place à l'école Jules Michelet à Talence, près de Bordeaux. Dirigé par Guy Brousseau de 1973 à 1998. Les archives vidéos du COREM sont disponibles sur http://visa.ens-lyon.fr/visa ; les archives « papier » sont

La plus emblématique de ces ingénieries est certainement celle portant sur les « rationnels et décimaux », menée dans les années 70 et présentée dans Brousseau et Brousseau (1987). La séquence produite contient 65 situations dont la célèbre situation du puzzle. L'ingénierie didactique est alors conçue comme méthodologie de recherche dont les produits (les séquences pour la classe) ne sont pas *a priori* élaborés pour être diffusés : il est notamment précisé « Nous ne considérons pas ce processus comme un modèle destiné à toutes les classes ». Elle vise à étudier les phénomènes didactiques liés à la production d'apprentissages mathématiques. La mise en œuvre dans des classes de ces ingénieries a servi de terreau à l'élaboration de la Théorie des Situations Didactiques, avec l'émergence d'un certain nombre de concepts (contrat didactique, institutionnalisation *etc*.).

Comme le rappellent Artigue et Perrin-Glorian (1991), l'ingénierie didactique porte en elle dès le départ une forme de « dualité » induisant par la suite une « polysémie du terme », référant à la fois à une méthodologie de recherche et aux productions pour l'enseignement élaborées dans le cadre de la mise en œuvre de cette méthodologie. Elle pose ainsi deux « questions cruciales » (Artigue, 1988) : « celle des rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement » et « le rôle qu'il convient de faire jouer aux « réalisations didactiques » en classe, au sein des méthodologies de la recherche didactique ». (p. 2).

Ainsi, dans les années 80, suite aux résultats encourageants en termes d'apprentissages des élèves obtenus notamment au COREM, plusieurs chercheur·e·s se sont emparés de la question de la diffusion des produits des ingénieries didactiques vers le système d'enseignement, et de la mise en œuvre d'ingénieries didactiques en milieu ordinaire. Toutefois, ces travaux ont débouché sur une certaine désillusion : « La mise en œuvre des ID a rapidement montré, malgré des résultats positifs, des décalages entre le fonctionnement attendu et le déroulement réel des séquences » (Perrin-Glorian, 1993, p. 7). Ces « décalages » observés, qualifiés aussi de « distorsions » (ibid.), sont d'abord vus comme des éléments à éliminer, puis sont pris comme objets d'étude (ibid.), considérés comme inhérents au fonctionnement de certains systèmes didactiques (comme par exemple les classes qui concentrent des élèves en difficultés, pour ce qui concerne les travaux de Marie-Jeanne Perrin-Glorian). Ainsi, certains d'entre eux sont interprétés comme étant liés aux difficultés que rencontraient les élèves, mais d'autres comme étant liés à l'enseignant : « […] certains de ces décalages sont le fait des décisions de l'enseignant comme réponses à la situation réelle de la classe. » (Grenier, 1988, p. 7). Ces constats amènent les chercheur·e·s à revenir sur les conditions nécessaires pour que les situations élaborées « fonctionnent », conditions qui étaient de fait remplies dans certaines classes, mais pas en général dans les classes ordinaires.

Cela constitue en outre l'une des raisons[3] qui va amener la recherche en didactique des mathématiques à s'intéresser davantage au rôle de l'enseignant·e. Une autre raison est la création des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM) : de nombreux didacticiens étant engagés dans ce processus, la question du rôle de la recherche en DDM dans la formation des enseignant·e·s va s'en trouver renouvelée.

disponibles au Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau http://www.imac.uji.es/CRDM/.

[3] Pour une description plus complète des conditions d'émergence de ce thème dans les recherches en DDM, on pourra consulter Margolinas et Perrin-Glorian (1997), Perrin-Glorian (2011), Butlen et Robert (2013), ou encore plus récemment Artigue et *al.* (2018)

Ces conditions vont constituer le terreau de nouvelles recherches avec notamment des recherches sur les représentations des enseignant·e·s (Robert et Robinet, 1989), mais aussi plus largement des recherches cherchant à mieux comprendre le fonctionnement des pratiques enseignantes ordinaires. Ces travaux ont mené soit à l'enrichissement des cadres théoriques existants (Théorie des Situations Didactiques et Théorie Anthropologique du Didactique) pour y intégrer le rôle de l'enseignant encore peu problématisé, soit à développer de nouvelles approches, comme la double approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert et Rogalski, 2002). Par ailleurs, les recherches sur l'ingénierie didactique vont se poursuivre avec des questionnements autour de la reproductibilité des situations et la diffusion de « ressources » (Artigue, 2009). C'est ainsi la question de la « robustesse » des situations qui est posée, par différents chercheur·e·s, c'est-à-dire la question de la résistance des situations aux conditions de mise en œuvre. Cela a également débouché sur une évolution des méthodologies de recherche, pour tenir compte de la question du rôle de l'enseignant·e et de la viabilité des productions de la recherche dans les classes ordinaires, renouvelant ainsi les deux « questions cruciales » identifiées par Artigue à propos de l'ingénierie didactique, à savoir celle des rapports entre la recherche et le système d'enseignement d'une part, celle du rôle des réalisations didactiques en classes au sein des méthodologies de recherche en DDM.

J'essaierai de montrer dans la suite du texte comment l'avènement de certaines de ces méthodologies, le fait qu'elles ont intégré la question de la formation et donné une place plus importante aux interactions entre chercheur·e·s et enseignant·e·s, constitue un renouvellement de la réflexion sur le rôle que peut jouer la recherche en didactique des mathématiques et contribuer à l'amélioration du système d'enseignement via la formation.

Des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s pour repenser le rôle de la recherche en DDM dans la formation

Une remarque préliminaire : j'entends ici « collaboratif » dans un sens « faible », sans rentrer dans la question d'une définition précise mais uniquement avec l'idée d'enseignant·e·s et de chercheur·e·s qui travaillent ensemble ; par ailleurs, j'ai choisi de présenter des dispositifs ayant une dimension recherche et/ou une dimension formation, mais qui entretiennent tous des liens, que je vais préciser, avec la recherche en didactique des mathématiques. Un autre critère de choix des dispositifs décrits est d'être suffisamment formalisés, au moins pour renvoyer à une dénomination spécifique.

Ces dispositifs incluent tous, même si de façon diverse et sauf exception, j'y reviendrai, une double visée pour le collectif, à l'image de l'ID. Ils visent à la fois la production de « réalisations didactiques » (Artigue, 1988) – qu'il s'agisse d'un objectif en soi ou d'un moyen –, l'étude de questions de recherche sur les apprentissages des élèves et/ou les pratiques enseignantes – voire leur développement –, enfin l'étude de questions de formation. La visée d'action sur le système d'enseignement et/ou de formation peut être interne au dispositif ou au contraire externe. Par exemple, certains collectifs incluent des professionnels considérés comme des experts et le dispositif vise à produire des ressources pour l'enseignement dont la diffusion doit améliorer les pratiques d'autres professionnels : le dispositif est alors un moyen de « tester » quelque chose (une ou des « ressource(s) ») avec une visée transformative qui s'opérationnalise dans la diffusion de ces ressources à une beaucoup plus grande échelle (à la fois spatiale et temporelle). La visée de développement professionnel concerne alors plutôt des professionnels extérieurs au dispositif, même si le fait de participer au dispositif peut également amener du développement professionnel pour ses participants (chercheur·e·s et/ou praticien·ne·s). Pour d'autres dispositif, c'est essentiellement le développement professionnel des praticien·ne·s participant au dispositif qui est visé, en interne. La question d'un impact sur le développement professionnel de praticiens en dehors du dispositif, par la diffusion des résultats obtenus (sous une forme ou une autre) est seconde.

Un « premier groupe » de dispositifs

Je propose de distinguer un premier groupe de dispositifs, qui se sont développés dans le contexte français, et affichent d'emblée une double dimension recherche et formation. Ils s'inscrivent chacun dans des arrière-plans théoriques de la recherche en DDM bien identifiés : les Ingénieries Coopératives développées par Gérard Sensevy et ses collègues (Sensevy et al., 2013), les Ingénieries Didactiques de Développement développées par Marie-Jeanne Perrin et ses collaborateurs·trices (Perrin-Glorian, 2009), les Lesson Studies Adaptées proposées par Masselin et Artigue (Masselin, Hartmann et Artigue, 2023), enfin les recherches sur les Parcours d'Etude et de Recherche développées par Chevallard, Matheron et leurs collaborateurs·trices qui ont impliqué des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s (par exemple dans le cadre du projet AMPERES, Equipe AMPERES, 2007)[4]. J'ai regroupé ces dispositifs dans un premier groupe car ils s'inscrivent dans la lignée des travaux précédemment cités concernant la diffusion des produits de l'ingénierie didactique en ce qu'ils visent tous de façon première la production et la diffusion de « ressources » pour l'enseignement étayées par la recherche, avec l'hypothèse que la diffusion dans l'enseignement ordinaire peut contribuer à l'améliorer.

Ainsi Marie-Jeanne Perrin-Glorian décrit-elle les visées communes de l'IDD et de l'IC, mais celles-ci me semblent également bien s'appliquer aux autres dispositifs de ce groupe, quel que soit leur ancrage théorique dans la recherche en DDM (TSD, TAD, TACD) :

> « [Le dispositif vise à] produire des ressources pour les professeurs, acceptables dans l'enseignement ordinaire et susceptibles d'améliorer l'apprentissage des élèves. […] La production de situations d'enseignement n'est donc pas seulement une méthodologie mais fait partie des objectifs de la recherche au même titre que leur adaptation aux conditions ordinaires d'enseignement et aux besoins des enseignants, ainsi que l'étude de la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire via la production de ressources et des besoins de formation et d'accompagnement des enseignants qu'elles nécessitent pour que ceux-ci puissent les utiliser efficacement et améliorer l'apprentissage de leurs élèves. » (2019, p.4)

La collaboration avec des enseignant·e·s (plus ou moins identifié·e·s a priori comme ayant une certaine expertise) sert donc à rendre les situations produites plus « robustes » que si elles avaient été produites par les chercheur·e·s seul·e·s. Il s'agit de viser que leurs effets sur les apprentissages des élèves soient moins dépendants des conditions de mise en œuvre (côté élèves et enseignants), ou encore, qu'elles soient mieux adaptées aux contraintes de l'enseignement ordinaire. L'un des principes sous-jacents, qui pilote la visée transformative, est qu'un bon moyen d'action de la recherche sur le système est la production et la diffusion de « bonnes situations » (au regard de critères issus de la recherche en DDM).

[4] Je dirai « les PER » dans la suite de ce texte par commodité, mais en ne me référant qu'aux recherches sur les PER qui ont impliqué des dispositifs collaboratifs entre chercheur·e·s et enseignant·e·s.

Les recherches collaboratives

Les « Recherches Collaboratives » ont été développées dans le contexte québécois par Desgagné, Bednarz et leurs collègues (Desgagné et al., 2001, Bednarz, 2009). Les dispositifs présentés par Desgagné et ses collègues ambitionnent de faire de la « recherche « avec » plutôt que « sur » les enseignant·e·s, ces derniers étant considérés comme « « partenaire[s] averti[s] » qui contribue[nt], avec le chercheur, dans une réflexivité conjointe, au développement de la pratique ».

L'objectif de recherche, auquel contribuent les deux types d'acteurs à partir de leurs positions différenciées, est la co-construction d'un certain savoir à propos de la pratique : « co-construction dans une perspective de médiation entre deux cultures de savoirs à rapprocher, soit la culture des « savoirs d'action » et la culture des « savoirs savants ».

> « La recherche collaborative s'inscrit, en ce sens, dans le mouvement de substitution de l'image mécaniste de « l'enseignant efficace », conçu comme le « docile exécutant » des prescriptions du chercheur, vers celle, plus constructiviste, du « praticien réflexif » conçu comme le « partenaire averti » qui contribue, avec le chercheur, dans une réflexivité conjointe, au développement de la pratique. Dit autrement, on assiste, depuis le début des années quatre-vingt, à l'appui, entre autres, des travaux de Schön (1983, 1987) sur l'épistémologie du savoir professionnel, à une reconnaissance du « savoir d'expérience » de l'enseignant. » (Desgagné et *al*., 2001, p. 35).

Cet objectif s'articule avec une visée de développement professionnel pour les enseignants, mais qui apparaît comme une conséquence quelque peu secondaire :

> « L'activité réflexive ainsi conçue […] peut constituer une occasion de formation continue pour des enseignants à qui on propose d'effectuer un retour systématique sur leur pratique en vue de l'éclairer et de l'améliorer. » (Desgagné et *al*., 2001, p. 38).

Par ailleurs, contrairement à certains dispositifs cités précédemment, il n'y a pas dans ce dispositif de visée a priori de production d'une « ressource » pour l'enseignement qui aurait vocation à être diffusée à d'autres professionnels. Le développement professionnel auquel ce dispositif entend contribuer est celui des enseignant·e·s qui y participent – soit une visée que j'ai nommée plus haut « interne » (*cf.* supra).

Les « Lesson Studies »

J'évoque ici la version popularisée en France, inspirée de la pratique japonaise des « Jugyo Kenkyu », nommée « préparation collective de leçon » par Miyakawa et Winslow (2009) et diffusée dans la communauté francophone via les recherches anglo-saxonnes puis celles notamment de Clivaz, Miyakawa et Winslow, ou encore Batteau qui présentent des exemples et une réflexion sur l'importation de ce dispositif dans le contexte francophone (*cf.* Miyakawa et Winslow, 2009 ; Clivaz, 2015 ; Batteau et Clivaz, 2016).

A l'inverse du précédent, ce dispositif est initialement essentiellement pensé comme un dispositif de formation, pour un groupe d'enseignant·e·s, éventuellement accompagné par un « knowledgeable other » ou encore « expert externe » qui peut être un chercheur ou un enseignant à l'expertise reconnu, qui fera un retour sur le travail. Le groupe peut aussi être accompagné par un « facilitateur » qui pilote le travail du groupe. Le fonctionnement de ce type de dispositif est formalisé par des cycles (cf. figures 1 et 2) : le groupe choisit un thème sur lequel une leçon va être préparée collectivement sur la base des ressources des enseignant·e·s et d'une étude de documents existants, éventuellement issus de la recherche. La leçon est ensuite mise en œuvre par l'un (voire plusieurs) des membres du groupe, puis analysée.

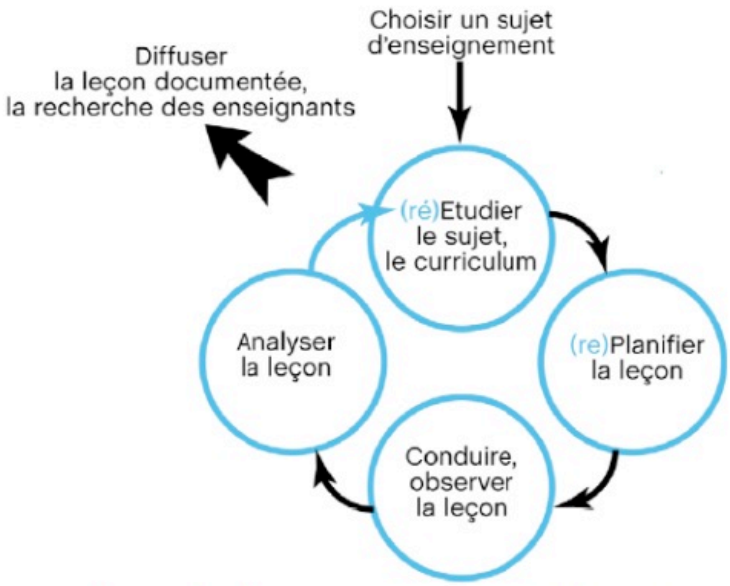


Figure 1. Le processus de LS, tirée de Batteau et Clivaz (2016)
citant Lewis et Hurd (2011)

La visée de développement professionnel des enseignants du groupe – visée interne – en est l'essence. Le dispositif inclut également la production d'une « ressource » rendant compte de la leçon telle qu'elle a été élaborée, qui sera diffusée auprès d'autres enseignants, par exemple dans des revues professionnelles. Cette visée externe apparaît toutefois comme secondaire.

La figure 2, élaborée pour rendre compte plus en détail de mises en œuvre dans le contexte français, précise chacune des étapes. Elle fait également apparaître le rôle de l'« expert externe », qui soutient et enrichit le processus en apportant un support dans le processus, et un commentaire final.

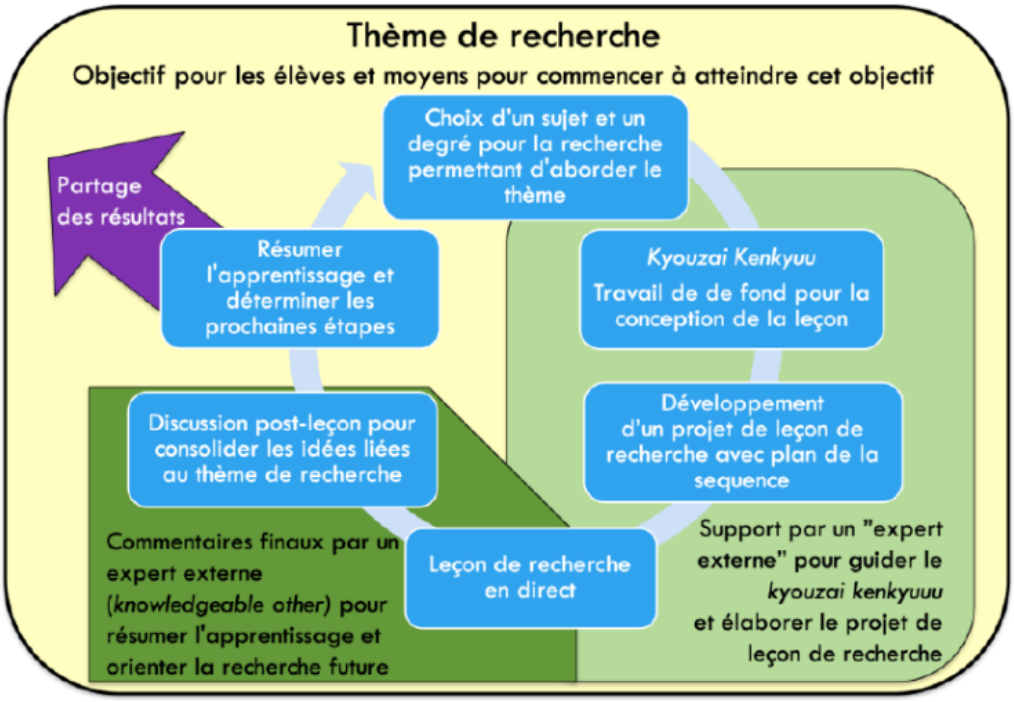


Figure 2. Le processus de LS, tirée de Clivaz et Takahashi (2020)

Ce dispositif de formation est devenu un objet et une méthodologie de recherche, d'abord dans le monde anglo-saxon, puis dans le monde francophone de la recherche en didactique des mathématiques.

> Autour de ce dispositif de formation s'articulent plusieurs projets de recherche en cours visant à étudier le développement professionnel des enseignants, du point de vue de leurs connaissances mathématiques pour l'enseignement (Clivaz, 2012, 2014), de l'évolution de leurs pratiques (Batteau, 2013), de leurs connaissances pédagogiques ainsi que de leurs postures (Clerc, 2013) au cours du dispositif. (Batteau et Clivaz, 2016, p. 30).

J'identifie trois différences principales avec le premier groupe de dispositifs (qui contenait les IDD, les Ingénieries coopératives, les LSA[5] et les PER) : le dispositif n'est pas sous-tendu a priori par des principes issus de la recherche (ni recherche en DDM[6], ni autre) ; la leçon est produite essentiellement par les enseignants, à partir de leurs ressources et éventuellement de ressources introduites par l'expert, mais pas nécessairement en appui sur une proposition de situation issue de la recherche (par exemple, dans Batteau et Clivaz (2016), le groupe part d'une proposition d'un manuel scolaire) ; une autre différence est que, de ce fait, la production qui vise à être diffusée ne prétend pas avoir des propriétés didactiques importantes au regard de la recherche en DDM.

Des dispositifs institutionnels à la charnière entre recherche et formation

L'institution scolaire et les universités, en France, ont par ailleurs développé des dispositifs associant des chercheur·e·s et des enseignant·e·s pour réfléchir à des problématiques liées à l'apprentissage et l'enseignement.

Ainsi, les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) ont été créés dans les universités dans les années 70 en France (Roditi et Trgalova, 2016). Ils fonctionnent avec des groupes de travail qui associent des enseignant·e·s (le plus souvent des enseignant·e·s de mathématiques du secondaire). Ces groupes fonctionnent de façons diverses et entretiennent des liens avec la recherche en didactique des mathématiques, divers également, notamment selon que des chercheur·e·s en mathématiques et/ou en didactique des mathématiques y participent. Certains peuvent fonctionner en appui sur des dispositifs de recherche de types cités précédemment. Le travail sur les PER, par exemple, a pris appui sur des groupes de l'IREM de Marseille ; le travail sur les LSA a pris appui sur l'IREM de Rouen.

L'Institut Français de l'Education – ENS de Lyon a par ailleurs créé depuis plusieurs années le dispositif de Lieux d'Education Associés (LéA) qui

> visent à articuler une production de savoirs, de ressources et de développement professionnel au bénéfice de la communauté éducative et de la communauté scientifique. [Ils] reposent sur l'hypothèse que la réflexivité et la collaboration entre les acteurs peuvent contribuer à la fois au développement de la recherche et du lieu d'éducation. (https://ife.ens-lyon.fr/lea).

Là encore, certains LéA peuvent fonctionner en appui sur des dispositifs de recherche de types cités précédemment. Par exemple, les travaux sur les ingénieries coopératives ont pris appui sur des LéA, notamment le LéA réseau ACE écoles Bretagne Provence (http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/anciens-lea/reseau-ace-ecoles-bretagne-provence).

---

[5] Les LSA sont ainsi dans un autre groupe que les LS car elles s'en sont fortement distinguées si l'on considère les critères que j'ai retenus (visées, formes de travail, rôle des chercheur·e·s).

[6] Notons toutefois que Clivaz (2015) propose de penser un dispositif de LS en appui sur la TSD.

Les différents « dispositifs collaboratifs » cités dans les deux premiers paragraphes articulent tous (à condition de considérer des LS insérées dans des dispositifs de recherche), de différentes manières et en différentes proportions, des visées de recherche et de formation. Ils sont toutefois différents à divers égards : dans la forme des visées compréhensives et transformatives et leur articulation, dans le rôle qu'y joue la recherche ou le(s) chercheur·e·(s) en DDM et, réciproquement, les enseignant·e·s, enfin dans la place et le rôle des « ressources », qu'il s'agisse de ressources en lien avec la recherche ou non. Par ailleurs, certains d'entre eux prennent appui sur des dispositifs institutionnels comme les IREM et les LéA.

Je propose dans la suite du texte de présenter un autre type de dispositif collaboratif, qui n'est pas encore aussi formalisé que les précédents, mais qui pourrait présenter une nouvelle forme de collaboration entre enseignant·e·s et chercheur·e·s, en articulant d'une certaine façon certaines idées issues des recherches collaboratives et des LS, comme je vais le montrer, notamment par la place faite aux pratiques ordinaires des enseignants.

Un autre type de dispositifs collaboratifs de recherche et formation

Cette partie s'articule autour de la présentation d'exemples de dispositifs dont on peut considérer qu'ils partagent un certain nombre de principes de fonctionnement. Je détaille tout d'abord un dispositif auquel j'ai participé personnellement, puis j'en évoquerai ensuite deux autres.

Un premier dispositif de recherche et formation concernant la mesure et la géométrie

Le point de départ de l'élaboration du dispositif est un constat de chercheures : le rôle de la *mesure* dans les difficultés liées à l'entrée dans la géométrie théorique au collège n'est que peu identifié et peu travaillé dans les recherches et les propositions de formation sur le sujet (Chesnais et Munier, 2016). Les difficultés rencontrées sont souvent renvoyées à une problématique liée au numérique. Toutefois, une approche interdidactique mathématiques-physique nous a amenées à faire l'hypothèse qu'un travail sur la mesure pourrait constituer un complément ou un nouveau levier potentiel pour l'enseignement et /ou pour la formation des enseignant·e·s sur cette problématique d'enseignement de la géométrie (*ibid.*).

Le mot « mesure » et sa polysémie

Le constat de départ est que le mot « mesure » renvoie à deux aspects différents, deux « facettes » d'un même concept, l'une renvoyant à un aspect empirique et l'autre à un aspect plus « abstrait ». Par exemple, si l'on considère les deux exercices suivants, représentatifs d'énoncés que l'on peut trouver classiquement dans des classes de sixième, on peut constater que le mot mesure renvoie dans le premier cas (figure 3) à un nombre que l'on doit lire sur un instrument, tandis que, dans le deuxième cas (figure 4), il renvoie à un nombre que l'on doit calculer et que l'on va interdire précisément aux élèves de lire sur le rapporteur.

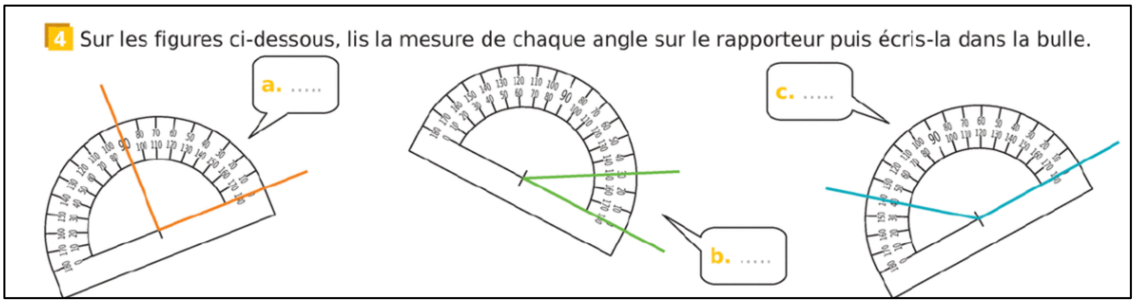


Figure 3. La mesure est un nombre que l'on doit lire sur le rapporteur

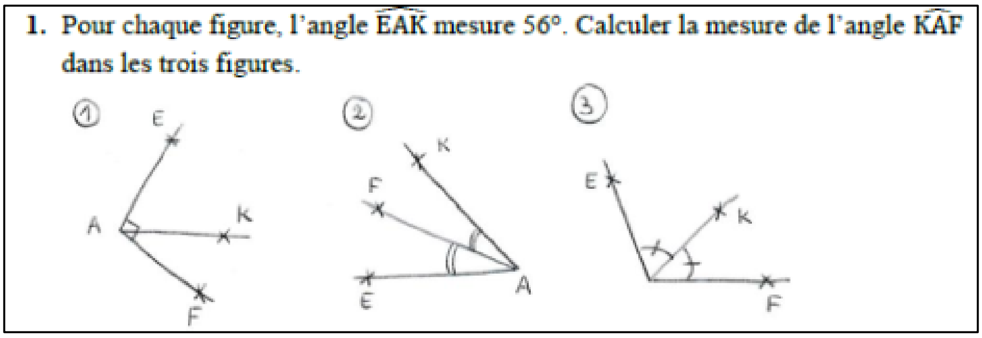


Figure 4. La mesure est un nombre que l'on doit calculer et non pas lire sur un rapporteur

Lorsque des exercices comme ceux de la figure 4 sont traités dans les classes, on peut observer un certain type de discours, dont Houdement (2007) cite par exemple une occurrence dans un manuel : « […] des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai ». On pourrait le reformuler, à propos du deuxième exercice ci-dessus en disant que « des mesures sur le dessin ne suffisent pas pour trouver la mesure de l'angle », car le mot « mesure » renvoie dans ses deux occurrences en réalité à des objets différents : dans le premier cas, ce que l'on obtient à l'aide d'un instrument, qui est par nature décimal et associé à un certain degré de précision ; dans le deuxième cas, il s'agit d'une valeur donnée ou établie à partir de données et de calculs qui ont valeur de démonstration ; elle est par nature réelle et considérée comme valeur exacte. Les valeurs que l'on obtient avec des instruments sont associées au dessin, alors que celles qui sont calculées à partir de données correspondent à la figure, pour reprendre la distinction faite par Laborde et Capponi (1994).

Nous avons alors proposé de qualifier différemment ces deux types de mesures lorsqu'on travaille sur ces phénomènes en didactique, en appelant « mesure empirique » la première et « mesure théorique » la deuxième. Par exemple, on dira que 1,4 est une mesure empirique de la longueur de la diagonale du carré de côté 1, que l'on peut obtenir avec la règle graduée, et $\sqrt{2}$ en est la mesure théorique. Notons que, dans la géométrie experte, seule la mesure théorique est un objet, et le rapport entre les deux est pris en charge par l'idée que 1,4 est une valeur approchée au dixième de $\sqrt{2}$; par ailleurs, même lorsque l'on veut raisonner sur des figures, en géométrie théorique, la réalisation de dessins et le mesurage peuvent fournir des conjectures, tandis que le raisonnement théorique modélise et permet de contrôler l'empirique.

Cette distinction est apparue comme un outil pertinent pour les chercheur·e·s en DDM pour renouveler le regard sur la problématique d'enseignement de la géométrie et notamment des difficultés rencontrées par de nombreux élèves (Chesnais et Munier, 2016). Par exemple lorsqu'on demande, à des élèves de sixième, la longueur d'un quart d'une bande de 9,3 cm, 1/3 d'entre eux proposent 2,325 cm (Chesnais, 2021a). En moyenne, 44% des élèves ne considèrent pas autre chose que le mesurage à la règle. Pour certains, le calcul est même la procédure qui permet de trouver, en l'arrondissant, la valeur 2,3. D'une certaine manière, pour ces élèves, c'est 2,325 qui est une valeur « approximative » de la « vraie valeur » qui ne peut être que celle que l'on trouve en utilisant la règle, le calcul ne fournissant qu'une manière plus économique (d'un certain point de vue du moins) de trouver cette valeur. Ainsi cet élève qui écrit : « J'ai fait 9,3 : 4 = 2,325. Je l'ai arrondi au dixième car sur une règle graduée il n'y a que les centimètres et les millimètres. » Nous dirions alors que pour cet élève, la mesure renvoie à la mesure empirique. L'idée d'une mesure de longueur théorique, non accessible par le mesurage, ne semble pas être encore disponible.

De la même manière, on peut réinterpréter la réponse d'élèves de 4ème ayant obtenu $\sqrt{50}$ pour une longueur en utilisant le théorème de Pythagore dans Jacquier (1995) et qui en concluent qu'« Il faut écrire BD = 7,07 car $\sqrt{50}$, pour une longueur, ça ne veut rien dire ». Si cette réponse a pu être interprétée comme résultant du fait que les élèves ne considèrent pas $\sqrt{50}$ comme un nombre et ne peuvent donc l'accepter comme une mesure, nous avons proposé, dans Chesnais et Munier (2016), d'inverser le raisonnement : si la mesure correspond pour les élèves à la mesure empirique, alors $\sqrt{50}$ ne peut être accepté comme mesure et doit être ramené à une valeur décimale (avec peu de décimales) ; on peut même suggérer que c'est alors parce que $\sqrt{50}$ n'est pas considéré comme une mesure qu'il ne peut être accepté comme étant un nombre, en suivant Lebesgue et l'idée que la mesure « fournit le nombre » (1975, p. 2).

Ces difficultés d'élèves se retrouvent y compris au lycée, par exemple lorsqu'il s'agit de travailler dans le cadre repéré : dans une des situations proposées dans Cerclé et al. (2021), des élèves qui doivent considérer la valeur 10/3 dans le repère disent ne pas pouvoir le placer sur la droite graduée « précisément », ou encore que « racine de 10 c'est trop flou, enfin trop précis du coup on peut pas, […] on peut pas le placer. ». Cela traduit selon nous à nouveau la difficulté de la gestion du rapport entre une valeur théorique et une valeur empirique d'une mesure, en lien avec la distinction entre le dessin et la figure.

Une exploration de manuels de mathématiques et de physique, des programmes scolaires de différents pays et de nombreuses séances de classes, ainsi que des travaux de recherche en didactique des mathématiques nous ont par ailleurs amenées à qualifier la distinction et l'articulation entre les deux aspects de la mesure de savoir « transparent » (au sens de Margolinas et Laparra (2011), repris dans Chesnais (2018), en mettant au jour le fait que cette distinction entre les deux aspects et leur articulation sont non explicites dans les programmes scolaires, dans de nombreuses classes, dans les pratiques et même largement dans les recherches en didactique des mathématiques. La distinction et l'articulation ne sont en effet souvent pas réellement prises en charge. Notamment, on observe souvent, dans les manuels comme dans les classes, soit un amalgame entre les deux (notamment en faisant conjecturer ou appliquer des théorèmes uniquement dans des cas où « cela tombe juste », c'est-à-dire où valeurs théoriques et empiriques sont égales[7]) ; soit qu'on les oppose, en disant que la valeur empirique n'est pas précise. Dans ce dernier cas, on propose par exemple des situations où on pourrait valider certaines

[7] Par exemple en travaillant le théorème de Pythagore à partir du triangle 3, 4, 5

propriétés sur le dessin, via des instruments, mais ces propriétés sont considérées comme « fausses » car non vérifiées par les valeurs théoriques ; on observe parfois même des choix encore plus discutables (Chesnais et Munier, 2016).

Ces résultats ont fait émerger de nouvelles questions : est-ce que la distinction explicite entre les différents aspects de la mesure peut être un outil pour les enseignant·e·s et/ou pour les élèves pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie ? À quelles conditions et sous quelle forme ?

Notre hypothèse est que cette distinction, si elle était prise en charge plus explicitement, pourrait contribuer au développement professionnel des enseignant·e·s sur le plan didactique et à l'amélioration du système. Toutefois, cela suppose de penser une forme de « transposition »[8] de ces résultats de recherche pour en faire un outil pour les enseignants. Il s'agit ici encore de reposer la question des « rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement » posée initialement par la recherche en DDM à propos des travaux sur les ingénieries didactiques (Artigue, 1982).

L'émergence du dispositif

Nous avons ainsi élaboré un dispositif de recherche et formation associant une enseignante chercheure (moi-même) et un groupe de 4 enseignantes (Delphine, Cécile, Justine et Carole). Les quatre enseignantes qui se sont portées volontaires constituaient déjà un groupe habitué à travailler ensemble, pour deux d'entre elles (Delphine et Cécile) depuis plus d'une dizaine d'années ; les deux autres ont moins de 3 années d'expérience. Elles exercent dans 4 établissements différents (mais ont exercé pour trois d'entre elles au départ dans un même établissement) mais se réunissent hebdomadairement pour préparer leurs enseignements en commun. Elles élaborent ensemble tous leurs supports (feuilles d'exercices et supports de cours).

Le projet leur a été présenté lors d'une première réunion et introduit ainsi :

> Il y a un thème sur lequel on travaille beaucoup depuis quelques années qui est la mesure, notamment avec Valérie Munier, qui est didacticienne de la physique. […] On est arrivé à un point où on se dit : « Maintenant, il faudrait aller voir ce qu'on peut faire dans les classes sur ces questions-là ». Donc, on cherche des profs […] pour élaborer des choses ensemble, pour arriver à prendre en charge un certain nombre de difficultés sur lesquelles on a mis le doigt. On est comme vous, on n'a pas les réponses non plus, on cherche. On se dit que ce qu'on peut apporter par rapport aux enseignants, c'est qu'on n'est pas le nez dedans donc, on peut prendre du recul, analyser les choses, pointer des trucs. Après, il faut qu'on retravaille avec les enseignants pour élaborer ensemble des solutions.

Puis j'ai présenté, lors de cette première réunion, l'idée de distinction entre mesure empirique et mesure théorique.

Le fonctionnement du dispositif a ensuite donné lieu à une première discussion, visant à instaurer un début de « contrat ». Il a été clarifié qu'il ne s'agissait pas que la chercheure propose des situations d'enseignement ou encore des progressions que les enseignantes n'auraient qu'à « appliquer ». Le contrat était celui d'une co-construction de tentatives pour mieux prendre en charge la distinction et mettre à l'épreuve son potentiel à améliorer les apprentissages des élèves :

> Delphine Il faut que tu regardes nos progressions, pour dire ce qui est possible, ce qui serait cohérent.

---

[8] Je choisis ce terme, en suivant Robert (2008), plutôt que « diffusion » car se pose la question de l'opérationnalisation de ces résultats de recherche dans les classes et dans les pratiques.

Chercheure	Il faut vraiment que vous compreniez qu'on ne sait pas où on va et que c'est à voir avec vous justement. Voir ce qui est possible dans les progressions, etc. […] ce qu'on se dit avec Valérie, c'est qu'effectivement pour prendre en charge ce qu'on a pointé là, il faudrait repenser tous les programmes du CP au lycée. Pour l'instant, la question c'est déjà d'essayer de voir ponctuellement ce que, en introduisant des petits bouts de choses : qu'est-ce que ça provoque chez les élèves ? C'est aussi le truc. On n'est pas sûr…

Julie, confrontée à cet extrait trois ans plus tard lors d'un entretien[9], confirme le fait que ce contrat a contribué à l'engagement des enseignantes dans le projet :

Julie	En fait je pense que justement, ça me rassurait certainement de dire : « en fait on va tester, on n'a aucune certitude. », voilà. On va expérimenter, donc on ne sait pas trop vers où on va. Enfin en fait elle(s) non plus, voilà c'est ça, c'est ce qui était rassurant, je crois, pour moi (Rire). Voilà, on est tous dans le même bateau, donc on va se casser la gueule ensemble en fait.

Les premières discussions ont fait apparaître également certaines préoccupations, notamment celles liées au coût de ce projet pour les enseignantes (en termes de temps, notamment), pour elles, mais surtout pour la classe :

Chercheure	Je ne sais pas si vous voulez en savoir plus. Il faut que vous me disiez aussi comment vous voyez les choses.
Cécile	Je pense que ça peut nous intéresser parce qu'on est toujours en train de réfléchir à des tas de trucs et à essayer de trouver des solutions à des choses qui ne marchent pas. Moi, c'est sûr, de ce côté-là ça m'intéresse. […]
Delphine	Ça dépend. Ce que je vois surtout c'est la contrainte temporelle parce qu'on est beaucoup à la bourre et qu'on est lents dans l'avancée des progressions. Si c'est très chronophage…
Chercheure	Justement, nous, l'idée, c'est de réfléchir avec les enseignants à comment on insère cette prise en compte-là dans...
Delphine	Ah bien sûr ! Ça doit remplacer, ça ne doit pas se rajouter.
Chercheure	Voilà, c'est ça.
Delphine	On est d'accord là-dessus.

L'adhésion des enseignantes au projet a probablement résulté, au moins en partie, du fait que la problématique de recherche exposée par la chercheure a semblé faire rapidement écho à des préoccupations des enseignantes.

Chercheure	[On dit souvent aux élèves que] l'intérêt de démontrer c'est parce que la mesure n'est pas précise. Mais si depuis le début on les a persuadés que la mesure empirique c'est aussi précis que le théorique, quel est le sens de ce truc-là ?
Julie	On ne les a pas convaincus. Au contraire, on voit bien qu'ils ont le doute. C'est vrai.
Cécile	Je me suis dit, effectivement, comment les faire réfléchir alors qu'on leur fait construire et après, on leur dit « Ton autre mesure, elle n'est pas tout à fait bonne » ? Il y a une incohérence complète.

Toutefois, la construction d'une problématique commune s'est ensuite faite progressivement, tout d'abord avec le choix d'un thème précis pour travailler la question de la mesure : en l'occurrence, le choix du collectif s'est porté sur le chapitre des angles en sixième, d'une part parce que cette notion semblait, pour toutes les participantes, propice à un questionnement sur la mesure et même, selon la chercheure, particulièrement

[9] Nous avons procédé à des entretiens de « remise en situation dynamique à partir de traces matérielles de l'activité » sur un empan temporel long (quatre années), en collaboration avec Serge Leblanc, pour réaliser des auto-confrontations, c'est-à-dire des moments où l'on confronte un acteur à des traces de son activité passée en lui demandant de partager le plus possible la manière dont il avait ressenti les choses à ce moment-là (Chesnais, Constantin et Leblanc, à paraître).

adapté au questionnement sur le rapport entre les deux aspects de la mesure ; d'autre part parce que la sixième était un niveau partagé par les différentes enseignantes qui souhaitaient s'engager dans le projet et la progression commune prévue permettait d'envisager de le préparer ensemble, suffisamment en amont.

Sont également apparues des divergences entre les manières de voir les problématiques d'enseignement et d'apprentissage des élèves. Par exemple, la difficulté des élèves à comprendre qu'il ne fallait pas utiliser d'instrument pour trouver une mesure théorique était attribuée par la chercheure à une difficulté conceptuelle à comprendre la distinction et le rapport entre les deux aspects de la mesure en géométrie théorique ; l'une des enseignantes, au cours de la première réunion, indiquait pour sa part que cette difficulté était réglée par le fait de clarifier la consigne auprès des élèves par l'utilisation des verbes d'action « mesurer » vs « calculer ». Une autre enseignante reconnaissait toutefois les limites de cette réponse aux difficultés des élèves en termes de contrat, en indiquant qu'alors, « c'est juste pour faire plaisir au prof ».

Un fonctionnement sur le long terme

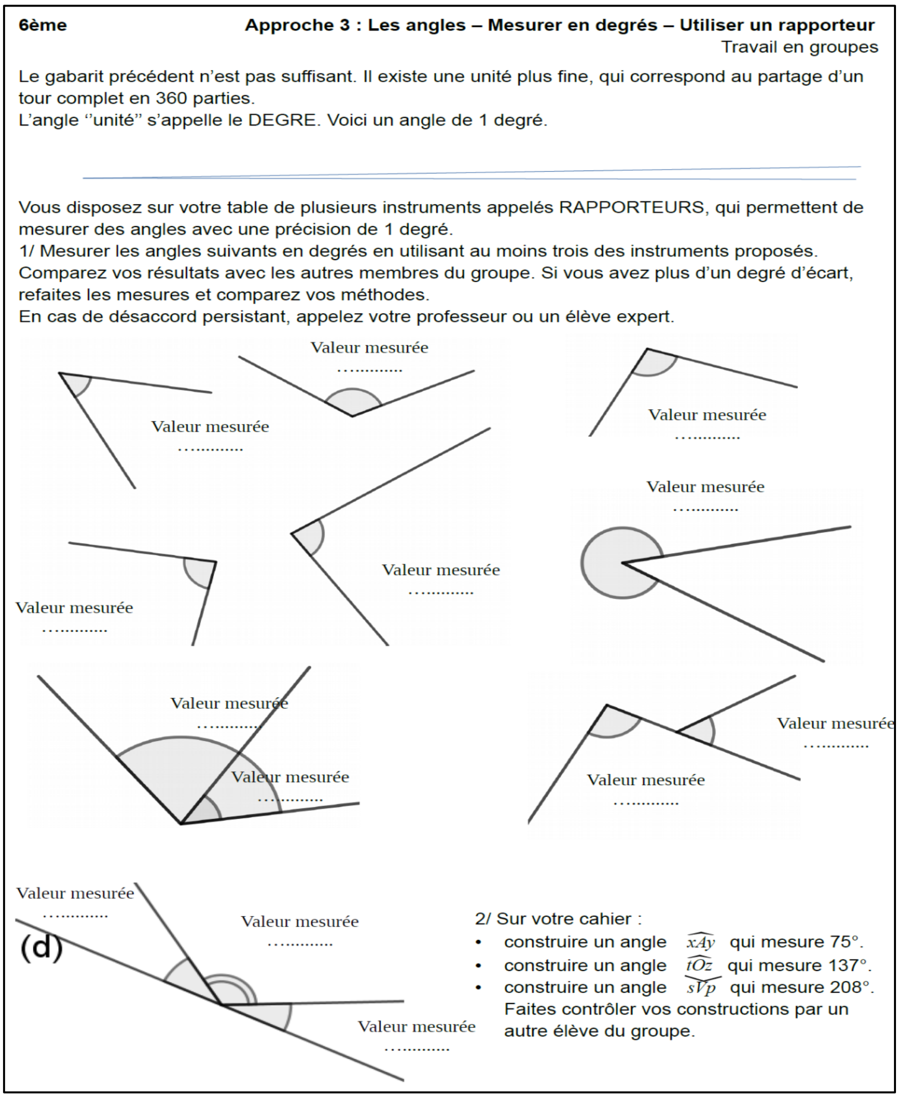
Une fois le dispositif engagé avec l'adhésion des enseignantes et sur la base d'un accord « suffisant » sur la problématique, le travail collectif s'est focalisé sur la préparation commune de la séquence sur les angles en sixième. Le fonctionnement reposait sur des boucles itératives qui incluaient : une préparation conjointe, puis la mise en œuvre en classe par les enseignantes, ensuite une discussion à propos de ces mises en œuvre, et la poursuite du travail de préparation (avec, en tout, 7 séances, de 1H30 à 3H, de travail collaboratif la première année pour une séquence de 12 à 15 séances selon les classes). La préparation de la séquence s'est faite sur la base des supports que les enseignantes avaient utilisés les années précédentes et qu'elles ont l'habitude de réviser chaque année (en y faisant plus ou moins de modifications selon les années). La préoccupation d'y intégrer le questionnement sur la distinction entre aspects empirique et théorique de la mesure a été initialement assumée par la chercheure, puis, rapidement, de plus en plus partagée.

La révision des documents de préparation de l'année précédente lors de la deuxième séance de travail collaboratif a permis de faire émerger plusieurs choses et de faire évoluer le contrat de fonctionnement du groupe, tout en engageant le travail sur les contenus. D'une part, il est apparu que les enseignantes organisaient leur enseignement en proposant aux élèves régulièrement des « questions du jour » sous forme de petits exercices traités en début d'heure sur un thème différent de celui auquel est consacré la séance, mais qui correspond au « chapitre » suivant : ces questions visent à réactiver une partie des savoirs prérequis pour la séquence à venir. Les questions du jour en amont de la séquence sur les angles visaient à (ré)établir une « définition » de l'angle comme partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine, puis les notions d'angle aigu, obtus, droit et plat, enfin la comparaison d'angles. Une des questions incluait des références à des mesures d'angles en degrés. Les échanges ont fait apparaître que les enseignantes considéraient que les élèves savaient déjà de quoi il retournait (il s'est avéré par la suite qu'en effet, certains enseignants de CM2 du secteur apprenaient à leurs élèves à utiliser le rapporteur, malgré le fait que les programmes mentionnaient explicitement depuis 2008 que cela relevait de la sixième). Les enseignantes ont donc supprimé ces tâches des questions du jour. La séquence était ensuite construite comme alternance entre des fiches nommées « approches », jouant le rôle d'« activités d'introduction », et de fiches d'exercices d'entrainements, entrecoupées de moments de cours. Certains temps d'entrainements étaient pensés sous forme de « plans de travail » avec une différenciation selon les élèves.

Sans m'étendre sur la première fiche élaborée conjointement, j'en précise juste rapidement les enjeux : les enseignantes ont été rapidement convaincues de la nécessité d'un travail préalable sur le sens de la notion même de mesure comme nombre d'unités et sur la construction d'une graduation avant l'introduction du rapporteur. Une situation a été élaborée conjointement, menant à la comparaison d'angles avec des gabarits (d'un huitième de l'angle plat) et visant à introduire tout d'abord la graduation (un « rapporteur » gradué en gabarits) pour dénombrer plus rapidement les unités. Il s'agissait aussi de faire réfléchir les élèves à l'imprécision et aux incertitudes inhérentes au processus de mesurage, en faisant comparer des angles dont les mesures étaient proches mais pour lesquelles le gabarit ne permettait pas de trancher lequel était plus grand. Enfin, la situation débouchait sur l'introduction degré comme unité plus petite permettant une plus grande précision des mesures. Il a été convenu de revenir, une fois le rapporteur introduit, sur la mesure du gabarit, que les élèves avaient alors à calculer à partir du fait qu'il avait été construit comme un huitième de l'angle plat. Ce travail a également été l'occasion d'une clarification de la part de la chercheure de la distinction entre l'angle comme objet géométrique et l'angle comme grandeur, ainsi que de la distinction entre grandeur et mesure.

La troisième fiche (« approche 3 »[10]) portait sur l'utilisation du rapporteur. Elle a été là aussi largement amendée par rapport au support existant (voir figure 5).

[10] Les enseignantes de ce groupe appellent « approche » ce que d'autres appellent « activité d'introduction ». Il s'agit d'exercices visant à (ré-)introduire de nouvelles connaissances, qui sont ensuite institutionnalisées dans la leçon.



6ème **Approche 3 : Les angles – Mesurer en degrés – Utiliser un rapporteur**

Travail en groupes

Le gabarit précédent n'est pas suffisant. Il existe une unité plus fine, qui correspond au partage d'un tour complet en 360 parties.
L'angle ''unité'' s'appelle le DEGRE. Voici un angle de 1 degré.

Vous disposez sur votre table de plusieurs instruments appelés RAPPORTEURS, qui permettent de mesurer des angles avec une précision de 1 degré.
1/ Mesurer les angles suivants en degrés en utilisant au moins trois des instruments proposés.
Comparez vos résultats avec les autres membres du groupe. Si vous avez plus d'un degré d'écart, refaites les mesures et comparez vos méthodes.
En cas de désaccord persistant, appelez votre professeur ou un élève expert.

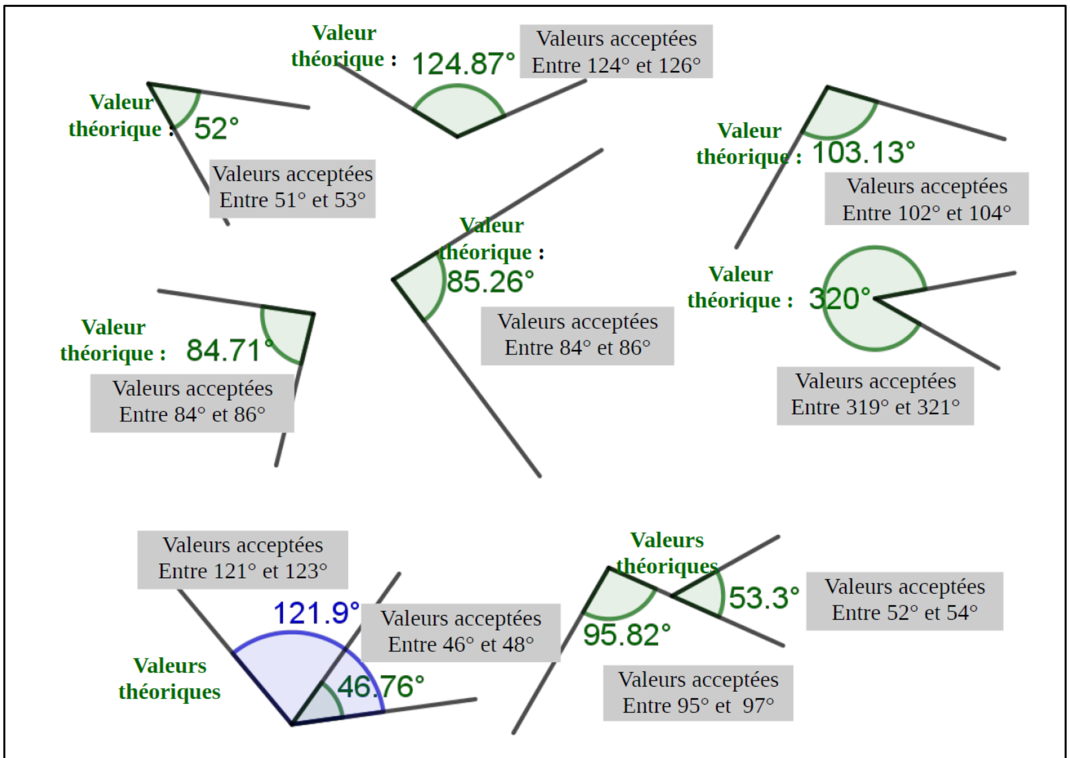
2/ Sur votre cahier :
- construire un angle $\widehat{xAy}$ qui mesure 75°.
- construire un angle $\widehat{tOz}$ qui mesure 137°.
- construire un angle $\widehat{sVp}$ qui mesure 208°.

Faites contrôler vos constructions par un autre élève du groupe.

Figure 5. Fiche « approche 3 » sur la mesure en degrés et l'utilisation du rapporteur

D'une part, les enseignantes ont décidé de travailler davantage l'appréhension de la graduation et de l'objet lui-même en imposant aux élèves d'utiliser différents types de rapporteurs (demi-disques, disques complets, carrés, gradués dans les deux sens ou non…). Cette décision a tenu en partie au travail collaboratif, notamment le constat de la nécessité d'un travail plus important sur le sens de la mesure, mais aussi à la volonté de pallier les difficultés rencontrées les années précédentes dans la manipulation du rapporteur par les élèves. D'autre part, sur la suggestion de la chercheure, une tâche a été introduite pour permettre de travailler la distinction entre mesure empirique et théorique et l'idée que la mesure théorique permettait de contrôler le résultat d'un mesurage : une des tâches préexistantes, comportant 2 angles adjacents à mesurer, a été modifiée pour obtenir 3 angles adjacents formant un angle plat (*cf.* le bas de la fiche « approche 3 », figure 5).

Enfin, il y a eu de nombreuses discussions à propos de la manière de rendre compte du résultat du mesurage, qui constitue un élément critique au regard de la problématique de nature de la mesure ainsi que la question des incertitudes de mesure. Ont été évoquées les solutions suivantes : indiquer un intervalle avec amplitude 1, 2 ou 3 degrés, indiquer « environ » ou utiliser le symbole associé, enfin indiquer « valeur mesurée ». C'est la dernière option qui a été choisie, ainsi que le fait d'afficher ensuite les valeurs avec lesquelles les angles avaient été dessinés dans geogebra, ces valeurs étant pour la plupart non entières, avec jusqu'à 2 décimales (*cf.* document du professeur, figure 6).



Bilan 1 :

1/ Les valeurs mesurées avec le rapporteur sont imprécises.

2/ Les valeurs théoriques ne sont pas forcément entières.

3/ Si l'écart à la valeur théorique est supérieur à 2 degrés, il faut revoir l'utilisation du rapporteur.

Figure 6. Document enseignant associé à l'approche 3

Le bilan prévu pour l'approche 3, enfin (*cf.* bas de la figure 6 et figure 7), dont le contenu a été élaboré largement à l'initiative des enseignantes, visait à introduire explicitement les notions de « valeur mesurée » et de « valeur théorique », avec des considérations sur le contrôle de la valeur mesurée par la valeur théorique. Il introduit en effet l'idée que la valeur mesurée n'est pas forcément exactement égale à la valeur théorique, mais qu'elle doit en être proche.

Côté PROF - Points de vigilance :

1) Sur le dernier cas de mesure demander : **D'après vous lorsque l'on fait la somme des trois mesures que devrait-on obtenir ?**

BILAN : Quand on juxtapose les trois angles on obtient un angle plat, quand on additionne les trois mesures on devrait obtenir une valeur proche de la **valeur théorique** 180°.
On ne trouve pas forcément exactement 180° car les mesures faites au rapporteur sont précises à plus ou moins 1 degré.

Figure 7. Bilan prévu pour la tâche de l'angle plat

Chacune des enseignantes a mis en œuvre dans sa classe la séquence élaborée collectivement, dans des temporalités légèrement différentes qui ont permis d'ajuster au fur et à mesure certains supports. Toutefois, si les supports avaient été élaborés collectivement, le temps de préparation collective n'avait pas permis de discuter en détail les mises en œuvre en classe. Chaque enseignante a ainsi investi les marges de manœuvre restantes et intégré de manière variée, notamment dans ses discours en classe ou dans les aides apportées aux élèves, la distinction entre les deux aspects de la mesure (Chesnais, 2021b). Ainsi, par exemple, les choix des termes par les trois enseignantes ont été légèrement différents : notamment, les expressions « valeur théorique » et « valeur mesurée » prenant le pas dans le discours de Julie, quand l'expression « mesure mesurée » a émergé à un moment dans la classe de Cécile. Dans la classe de cette dernière, j'ai pu observer par ailleurs que ce travail sur les deux aspects de la mesure l'amenait à considérer autrement la problématique de la distinction entre dessin et figure avec ses élèves. Ainsi a-t-elle proposé, sur la fin de la séquence, à ses élèves une réflexion sur cette distinction, les amenant à identifier que, lorsque l'on demande de dire si les points sont alignés dans l'ex 2 de la fiche d'exercices présentée en fig. 7, il s'agit en fait de répondre à propos des points de la « figure imaginaire, idéale et parfaite », ce qu'elle reformulera ensuite en « figure théorique ».

Dès la deuxième année, le travail mené a eu des répercussions sur l'enseignement d'autres notions que les angles en 6ème. Ainsi, par exemple, les enseignantes ont décidé, lors du bilan de la première année, de repenser l'ensemble de leur enseignement de la géométrie en sixième, notamment sous l'impulsion de Cécile, et en particulier les premiers chapitres de l'année, pour introduire dès le début des éléments favorisant la distinction entre le dessin et la figure, en lien avec les mesures. Lors de la troisième séance de travail collectif de la deuxième année, elles racontent ainsi qu'elles sont « trop fières » d'avoir pensé à proposer aux élèves de tracer un segment de 9,67 cm puis de construire sa médiatrice au compas, ce qui a permis des discussions sur le statut du dessin.

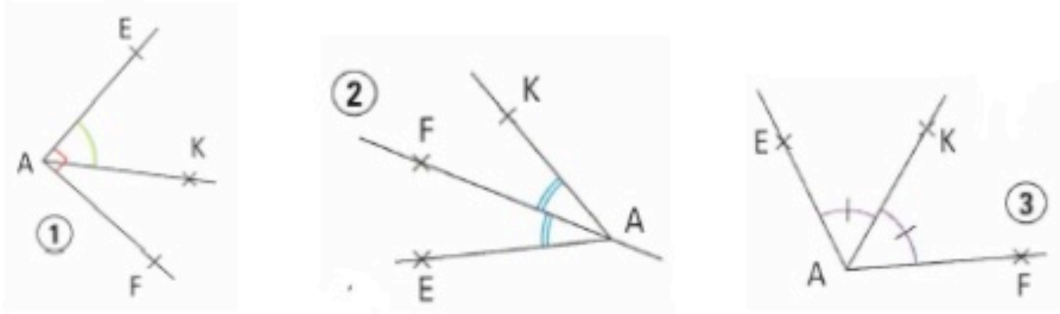
Par ailleurs, le travail a également permis de mettre en évidence, au cours de la deuxième année, la nécessité de faire produire davantage d'énoncés mathématiques écrits aux élèves, en particulier pour formuler les connaissances et raisonnements élaborés.

L'évolution de la fiche d'exercices suivante témoigne ainsi de différents enrichissements des pratiques sur le plan didactique.

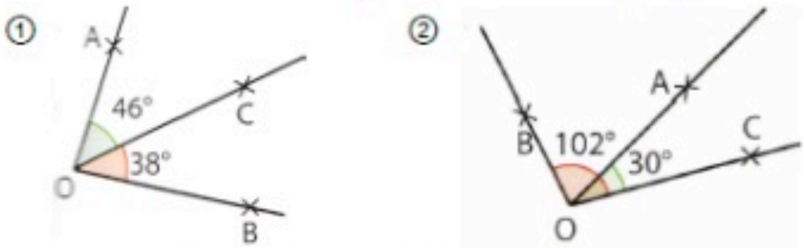
Fiche d'exercices : Calculer un angle

Exercice 1 :

1. Pour chaque figure, l'angle $\widehat{EAK}$ mesure 56°. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans les trois figures.



2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



Exercice 2 : Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

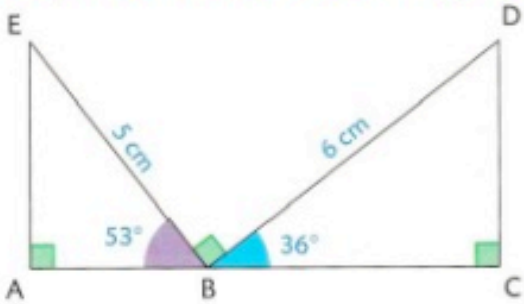
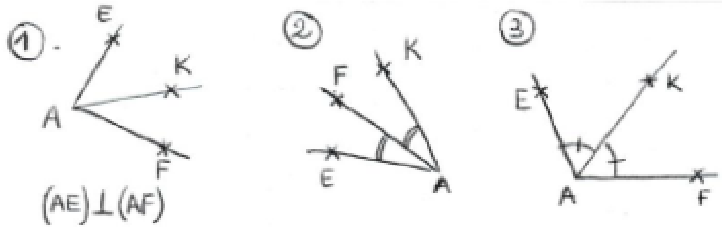


Figure 8. Fiche d'exercices avant le début du dispositif (2017-2018)

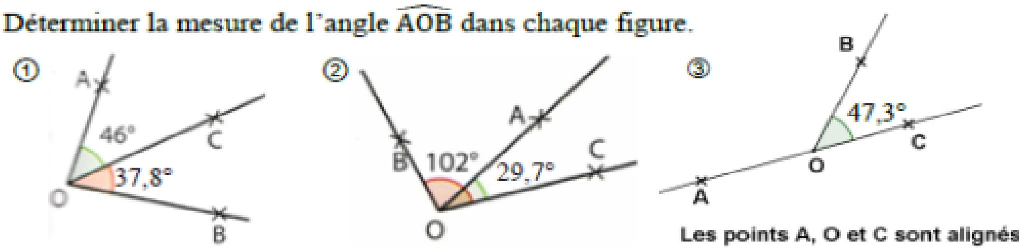
Fiche d'exercices : Raisonner sur les mesures d'angle

Exercice 1 :

1. Pour les trois figures représentées sous forme de croquis, la valeur théorique de l'angle $\widehat{EAK}$ est 55°. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{KAF}$ dans chaque cas.



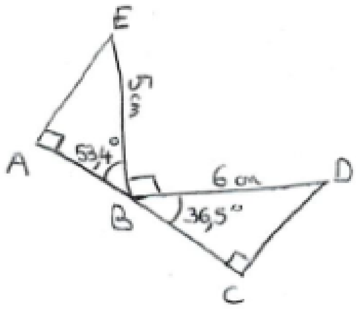
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ dans chaque figure.



Les points A, O et C sont alignés

Exercice 2 :

Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier en détaillant votre raisonnement.



BILAN individuel : Ce que j'ai fait, ce que je retiens :

....

....

....

BILAN de la classe :

....

....

....

Figure 9. Fiche d'exercices au bout de 3 années

On peut noter quatre différences qui sont susceptibles d'enrichir l'activité des élèves et ainsi les apprentissages potentiels, même si ce potentiel reste largement tributaire de la manière dont ces supports sont exploités en classe. D'une part, le titre de la fiche qui était « calculer un angle », est devenu « raisonner sur les mesures d'angles », témoignant d'une part de la distinction plus explicite entre l'angle et sa mesure, d'autre part d'une prise de conscience des enjeux didactiques de ce type de tâche comme étant liés au raisonnement : les enseignantes ne considèrent plus que les difficultés des élèves à réaliser ce type de tâche se règlent uniquement par un effet de contrat en indiquant aux élèves que « s'il est écrit calculer, il faut faire un calcul, alors que s'il est écrit mesurer, il faut utiliser le rapporteur ». Une autre modification est celle d'introduire des mesures d'angles non entières, donc non atteignables par le mesurage. Cela est apparu comme un levier pour questionner et clarifier le statut des mesures et, dans ce cas, clarifier qu'il s'agit de mesures théoriques et non pas de valeurs obtenues par mesurage[11]. Le fait de réaliser certains des dessins à main levée et non pas via un logiciel permet également pour elles encore une fois de questionner le statut du dessin. Dans tous les cas, mais en particulier dans l'exercice 2, il s'agit de travailler sur le fait que le raisonnement sur des mesures théoriques permet un contrôle sur le dessin, et réciproquement, pour créer un point de vue qui permette de dépasser d'une part le point de vue qui amalgame les deux, d'autre part le point de vue qui les met en contradiction (Chesnais, 2021b). Enfin, on peut noter l'introduction d'un espace en bas de la fiche réservée à une production écrite par les élèves, d'abord individuellement puis pour noter la production de la classe, supposée résulter de la mise en commun et de la discussion des productions individuelles.

Ces évolutions des supports sont également liées à des évolutions des objets du travail collectif : la première année, les discussions ont essentiellement porté sur les contenus mathématiques des tâches proposées aux élèves dans les supports prévus pour une notion donnée ; à partir de la deuxième année, le travail a davantage porté sur la question des déroulements en classe, et notamment des productions langagières des élèves et des enseignantes, à l'écrit et à l'oral, mais il a également évolué car il ne portait plus uniquement sur la notion d'angle en sixième, en élargissant à d'autres notions (y compris parfois concernant d'autres niveaux scolaires) et à la question des progressions.

Le fonctionnement du dispositif tient aussi au fait que chacun des membres joue un rôle spécifique, pour une part, dans le collectif. La chercheure pose des questions, soit pour mieux comprendre les pratiques des enseignantes, soit pour alimenter le questionnement du groupe sur certains enjeux d'enseignement et d'apprentissage, voire sur le contenu mathématique lui-même ; elle pointe des éléments qui lui semblent significatifs (par exemple des productions d'élèves) en proposant des interprétations, et fait parfois des suggestions pour des choix à faire concernant l'enseignement. Parmi les trois enseignantes, chacune investit le travail collectif a sa propre manière. Cécile soulève de nombreuses questions et propose des changements ou des nouveautés. Delphine intervient souvent pour revenir sur les choix proposés, demander de justifier, peser le pour et le contre de certains choix et focaliser le groupe sur la concrétisation des supports (c'est presque toujours elle qui prend les notes des décisions prises, puis les enseignantes se répartissent le travail de mise en forme des supports). Quant à Julie, elle attire souvent l'attention sur la question des mises en œuvre, y compris sur le plan plus « pédagogique », l'organisation du travail, les aspects matériels, les durées. Les décisions sont prises collectivement, mais ce sont les enseignantes qui « tranchent » et parfois, qui prennent les décisions seules, même si elles demandent presque toujours l'avis de la chercheure.

Au fur et à mesure des années, les interventions de la chercheure sont devenues à la fois plus ponctuelles et plus globales, s'ajustant encore davantage aux sollicitations des enseignantes, dans une logique de « suiveuse » (Paul, 2009).

Un dispositif « bis »

Une autre chercheure (Céline Constantin) s'est jointe en septembre 2020 au collectif, en accord avec les enseignantes, pour porter un deuxième dispositif du même type, mais

[11] Cette ambiguïté est identifiée comme récurrente et posant des difficultés aux élèves et aux enseignants par Houdement et Kuzniak (2002) (même s'ils ne la formulent pas dans ces termes).

cette fois-ci sur l'enseignement du calcul littéral en 4ème et en 3ème. Seules les 2 enseignantes du dispositif sur la mesure en 6ème ayant en charge des classes de 4ème ou 3ème s'y sont engagées, avec une autre enseignante qui ne participait pas au dispositif sur la mesure car elle n'avait pas en charge de classe de 6ème.

Le mode de fonctionnement du dispositif était tout à fait similaire au précédent. Je n'évoquerai donc ici que le fait que le démarrage du dispositif a révélé certaines conditions à la mise en place d'une collaboration entre chercheure et enseignantes partant des pratiques des enseignantes.

Le point de départ du projet, pour la chercheure, était le fait que ses travaux précédents l'avaient amenée à identifier que certaines difficultés d'apprentissage et d'enseignement en algèbre étaient liées à la transparence du concept de « substitution » (Constantin, 2021). La chercheure s'est appuyée sur l'analyse d'erreurs d'élèves et de supports d'enseignement pour introduire cette problématique auprès des enseignantes du collectif. Mais, si le « contrat » de fonctionnement de la collaboration entre chercheure et enseignants était déjà établi (du fait de leur participation de presque toutes les enseignantes au dispositif précédent), il s'est avéré plus difficile que dans le dispositif précédent de partager des interprétations des erreurs des élèves et d'introduire la notion de substitution comme un concept susceptible d'outiller un développement professionnel favorable aux apprentissages des élèves. Ainsi, comme il est décrit en détail dans Chesnais, Constantin et Leblanc (à paraître), l'objet « égalité » est apparu comme une préoccupation plus facilement partagée, à partir de l'intervention d'une des enseignantes du groupe (Cécile), du fait que le concept de « substitution » apparaissait « trop complexe » et « compliqué à s'approprier » pour les enseignantes. La notion d'égalité est ainsi apparue comme un intermédiaire sur lequel faire porter le travail du collectif, par une réflexion sur le fait qu'une égalité comprenant des variables peut être « toujours, jamais, ou parfois vraie ». Cet intermédiaire a permis, dans un deuxième temps (l'année suivante), de réinterroger la notion de substitution. Le fait de partir des pratiques a ainsi conditionné le fonctionnement du dispositif au fait que la chercheure accepte transitoirement des liens qui ne sont pas tout à fait pertinents du point de vue du savoir pour le didacticien, mais qui constituent une première problématisation d'une question, « suffisante » pour permettre ainsi d'engager un travail commun d'élaboration de séances.

Des dispositifs qui « partent des pratiques »

Je propose pour terminer cette partie de montrer que ces deux dispositifs (sur la mesure en géométrie et sur le calcul littéral) partagent avec le dispositif du LéA Romain Martin du Gard (Allard, Horoks et Pilet, 2022) certaines similitudes, liées à la logique de collaboration qui « part des pratiques », qui en font une catégorie qui se distingue des dispositifs présentés dans le paragraphe précédent.

On constate en effet plusieurs points communs, comme le fait que l'équipe des enseignant·e·s qui s'est engagée dans le travail collaboratif était déjà constituée, un fonctionnement itératif construit collectivement, qui s'est appuyé sur ce que les enseignant·e·s faisaient dans leurs classes (« principe d'appui sur les contextes d'enseignement et les pratiques des enseignant·e·s », Allard et *al.*, *ibid.*). On constate aussi des similitudes sur l'évolution des thèmes abordés par le collectif au fur et à mesure et un élargissement, à partir d'un thème donné (l'algèbre en l'occurrence), vers une problématique plus « transversale », liée à l'évaluation. De même, l'apport de ressources pour l'enseignement (y compris des situations) issues de la recherche s'est fait dans un deuxième temps. Enfin, de la même manière que dans les deux dispositifs décrits ci-dessus, le travail collaboratif a d'abord concerné la dimension cognitive des pratiques, avec un travail sur les tâches à proposer aux élèves puis, dans un deuxième temps, la dimension médiative avec un travail sur les mises en œuvre et notamment les discours.

On observe également quelques différences : l'élaboration du projet était à l'initiative des enseignant·e·s ; le projet s'appuyait sur des résultats de recherche en didactique plus « solides » car nettement plus avancés ; le collectif a acté dès le début du travail une visée de production d'une ressource destinée à être diffusée en dehors du collectif.

Ainsi, ces dispositifs articulent d'emblée, dans leurs objectifs, une visée d'étude des formes et modalités de transposition de résultats de recherche dans l'enseignement avec une visée de développement professionnel des enseignant·e·s qui y participent. Par ailleurs, contrairement aux dispositifs qui s'inscrivent dans la lignée des travaux de recherche sur les ingénieries didactiques évoqués précédemment, la visée de production de ressources afin de contribuer au développement professionnel d'autres enseignant·e·s (en dehors du dispositif), n'est pas première. Enfin, le travail ne se base pas sur l'apport de propositions d'enseignement par les chercheures et l'élaboration de propositions d'enseignement résulte d'une co-construction, elle-même résultant d'une « co-construction d'une problématique conjointe » (Allard, Horoks et Pilet, *ibid.*) ou « processus de problématisation conjointe » (Chesnais, Constantin et Leblanc, *ibid.*).

Je propose ainsi de qualifier les dispositifs de travail collaboratif de ce type de « dispositifs collaboratifs qui partent des pratiques » (DiCo2P), en référence à Robert (2008) et de montrer dans la dernière partie comment ces principes de fonctionnement peuvent être pensés en appui sur les recherches menées en didactique des mathématiques sur les pratiques des enseignant·e·s dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002 ; Robert, 2008) depuis une vingtaine d'années, et ce dans une démarche proche de celle de théorisation de dispositifs de formation de formateurs (mais non collaboratifs), proposée par Abboud, Robert et Rogalski (2022).

Retour sur les dispositifs collaboratifs qui « partent des pratiques » : des « principes » en appui sur la recherche en didactique des mathématiques

De tels dispositifs reposent sur une certaine conception du développement professionnel que je vais dégager et discuter maintenant. Ils partagent l'idée d'un développement professionnel « sur le plan didactique » (Chesnais, Constantin et Leblanc, à paraître), c'est-à-dire d'évolutions des pratiques susceptibles d'avoir des effets relativement directs sur les apprentissages des élèves en mathématiques, voire sur un contenu donné. En particulier, ils se distinguent en cela de dispositifs qui visent une amélioration des conditions de travail des enseignant·e·s, ou dont les visées portent plus sur la dimension pédagogique du rôle de l'enseignant·e (notamment concernant l'amélioration du climat scolaire ou encore la motivation des élèves, voire visant des apprentissages liés davantage à des comportements comme l'autonomie ou l'entraide). Ils partagent ce principe avec tous les autres dispositifs élaborés par des didacticien·ne·s des mathématiques. On retrouve ainsi dans tous l'appui sur certaines hypothèses concernant « ce qui fait apprendre (les mathématiques) », à savoir l'appui sur les activités des élèves, l'importance du fait d'introduire les savoirs à partir de problèmes qui leurs donnent du sens, ou encore l'importance des discours qui accompagnent l'activité mathématique.

En revanche, il me semble que ces dispositifs se distinguent d'autres dispositifs élaborés par des didacticien·ne·s des mathématiques par le fait de penser ce développement professionnel comme un enrichissement des pratiques existantes plutôt qu'une modification (Abboud, Robert et Rogalski, 2022), en partant de ce que les enseignant·e·s proposent déjà dans leurs classes. D'où l'idée de dispositifs qui « partent des pratiques ».

Les formes ou traces de développement professionnel sur le plan didactique sont alors caractérisées par une évolution des scénarios, des déroulements, mais aussi des discours sur la pratique. L'évolution des scénarios est considérée comme relevant d'un développement professionnel sur le plan didactique si les tâches proposées et leur organisation semblent didactiquement plus porteuses en termes d'apprentissages pour les élèves. Cela peut se concrétiser par des évolutions qui peuvent sembler à première vue minimes, comme un jeu sur des valeurs de variables didactiques, tout en conservant des énoncés et supports très proches, comme je l'ai illustré plus haut à propos du dispositif sur la mesure. Il peut s'agir également de conserver certaines tâches, mais en modifiant la formulation des consignes de façon à ce qu'elles engendrent une activité mathématique plus riche des élèves[12]. L'évolution des déroulements se caractérise par un « épaississement » des discours sur les tâches, dans l'idée de contribuer davantage au processus de secondarisation des genres de discours (Jaubert, Rebière et Bernié, 2012 ; Rebière, 2013) qui accompagne le processus d'apprentissage. On considèrera aussi comme trace de développement professionnel une évolution de la place laissée aux élèves, qui fait écho à l'enrichissement du « topos de l'élève » visé dans les dispositifs d'ingénierie coopérative et les dispositifs de diffusion de PER cités dans la première partie. De plus, un aspect critique de l'enrichissement des déroulements est également lié à un accroissement de la prise en compte de l'activité réelle des élèves dans la construction collective du savoir à travers les « proximités-en-actes » (Robert et Vandebrouck, 2014) proposées par l'enseignant·e, c'est-à-dire un enrichissement et une augmentation des tentatives faites par les enseignant·e·s pour mettre en relation le savoir visé et ce que produisent les élèves, dans les phases de recherche ou dans les phases collectives. Enfin, l'évolution des discours des enseignant·e·s sur leurs pratiques (et, éventuellement, celles de leurs collègues) est aussi un indicateur potentiel du développement professionnel que l'on peut relier à des formes de « prise de conscience » d'une part et d'autre part de création ou appropriation de nouveaux moyens langagiers. Ces derniers témoignent d'une part de la construction de nouvelles connaissances ou représentations, d'autre part de co-constructions dans un collectif (discours partagés entre enseignant·e·s ou entre enseignant·e·s et chercheur·e·s) qui accompagnent, voire parfois précèdent (Bertone, Chaliès et Clot, 2009) des évolutions des composantes cognitive et médiative des pratiques.

Ces dispositifs « partant des pratiques » se caractérisent aussi, lorsqu'ils associent des chercheur·e·s et des enseignant·e·s, par le rôle que prennent les chercheur·e·s, pensé davantage comme un « accompagnement » du développement professionnel des chercheur·e·s au sens de Paul (2009) : les chercheur·e·s accompagnent les enseignant·e·s au sens d' « être avec et aller vers », en restant le « suiveur (et non pas le suivant) » : les chercheur·e·s ne sont pas là pour « montrer le chemin » « S'il n'a pas la primauté, il n'est pour autant pas accessoire puisqu'il n'y aurait accompagnement sans ce binôme initial. Sa fonction est de soutenir au sens de valoriser celui qui est accompagné » (Paul, 2009, p. 96). Cette idée d'accompagnement s'articule avec celle de Zone Proximale de Développement Professionnel (ZPDP) proposée par Abboud, Robert et Rogalski (2022),

[12] Robert et Rogalski (2002) avaient montré comment des variations qui semblent limitées dans des consignes peuvent avoir des conséquences très différentes sur les activités des élèves : par exemple, formuler un énoncé avec « montrer que » ne provoque pas du tout la même activité mathématique que de formuler la consigne sous forme d'une question.

en appui sur la notion de Zone Proximale de Développement issue des travaux de Vygotski, repris par Bruner. La ZPDP désigne ainsi ce que quelqu'un n'est pas encore capable de faire seul, mais qui n'est pas « trop loin » de ses pratiques.

Le principe de « partir des pratiques » pourrait ainsi être pensé comme le fait de travailler dans la ZPDP des enseignants. Cela suppose, pour le·a chercheur·e, d'une part de s'appuyer sur les résultats de recherches sur les pratiques ordinaires, d'autre part de s'appuyer sur les pratiques existantes des enseignant·e·s du collectif considéré – ou, du moins, de ce que les enseignant·e·s en question en donnent à voir, qui peut d'ailleurs évoluer au fur et à mesure du fonctionnement du dispositif. Cela suppose également un processus de problématisation partagé entre les différents membres du collectif, qu'il s'agisse d'un collectif uniquement composé d'enseignant·e·s, ou d'un collectif réunissant des enseignant·e·s et des chercheur·e·s. Cette problématisation doit porter sur des objets de travail « suffisamment proches », même s'ils restent différents, avec une forme de négociation, qui peut nécessiter des détours et des renoncements (au moins provisoires), comme dans le cas du « dispositif bis » décrit plus haut.

Le rôle du collectif est également essentiel dans ce type de dispositif. En effet, la composante sociale des pratiques est très liée à la stabilité de celles-ci (Robert, 2007), ce qui implique qu'il est très difficile pour un enseignant de faire évoluer ses pratiques alors même qu'elles sont partie prenante d'un système qui inclut les collègues, les chef·fe·s d'établissements, les inspecteur·rice·s, les parents, les élèves etc. Le collectif (le fait qu'il y ait plusieurs enseignant·e·s, mais aussi la présence de chercheur·e·s et/ou de formateur·trice·s) permet d'affermir une forme de légitimité des choix faits et la reconnaissance du travail fait et de sa pertinence. Cette légitimité permet en retour de soutenir la « prise de risque » inhérente au fait de soumettre ses pratiques au regard critique d'un collectif et d'envisager de mettre en œuvre des choix différents de choix précédents éventuellement très stabilisés auparavant. Le collectif joue par ailleurs un rôle dans l'élaboration de ces nouveaux choix, qui émergent d'une part de la nécessité de justifier ses propres choix, du fait de les mettre en discussion, et de la prise de conscience d'autres choix possibles – éventuellement souhaitables. Le collectif (par la diversité des pratiques des différents enseignant·e·s et par la présence de chercheur·e·s et/ou de formateur·trice·s) contribue ainsi à l' « élargissement de la palette des possibles » par la prise de conscience de l'existence d'alternatives (Abboud, Robert et Rogalski, 2022), même si un enjeu de développement professionnel peut être non pas de changer ce que l'on fait, mais de mieux savoir pourquoi on le fait et ainsi l'exploiter de façon plus efficace (par exemple en identifiant mieux le rôle de certaines variables didactiques dans des tâches données que l'on propose déjà aux élèves, ou de mieux identifier le rôle de certaines formulations ou les difficultés associées à certains usages de notations *etc*.).

Le rôle des chercheur·e·s, dans un dispositif qui part des pratiques, est ainsi d'apporter des questionnements, des réactions, suggestions, orientations, voire des ressources, mais qui apparaissent comme une réponse à un questionnement partagé, et qui sont retravaillées et opérationnalisées par le collectif. Notons que cela peut nécessiter de convaincre les enseignant·e·s que les chercheur·e·s ne disposent pas de « réponses toutes faites » ou de « solutions » aux problématiques d'enseignement et d'apprentissages (du type « bonnes pratiques ») qu'il suffirait d'appliquer. Mais ils peuvent enrichir les questionnements et, en réfléchissant avec les enseignant·e·s, contribuer à élaborer des alternatives.

Leur action, pour contribuer au développement professionnel des enseignant·e·s, s'appuie ainsi sur une logique « opportuniste », « holistique » et « remontante » (Rogalski et Robert, 2015). « Opportuniste » du point de vue des pratiques, même si elle vise à travailler un élément de savoir particulier, c'est-à-dire qu'il s'agit pour l'accompagnant de pouvoir faire des liens entre ce qui émerge dans le collectif et ce qui paraît « souhaitable » du point de vue didactique. « Holistique » car ce type de dispositif permet – tout autant qu'il le nécessite – un travail sur la complexité des pratiques, au sens de l'imbrication des différentes composantes (Robert, 2008). De ce point de vue, le temps long et les allers-retours entre constructions, mises en œuvre en conditions « réelles » et analyses conjointes apparaissent comme des conditions nécessaires au fonctionnement du dispositif et au fait qu'il permette un développement professionnel sur le plan didactique. Cela nécessite ainsi une grande variété et disponibilité des connaissances des accompagnants ainsi qu'une grande adaptabilité. L'accompagnant doit donc disposer de beaucoup de ressources (au sens large du terme) et accepter de faire des deuils, au moins provisoires. « Remontante » au sens où il s'agit d'induire ce qui est « ajouté » par les chercheur·e·s en s'appuyant sur ce qui s'est passé dans le collectif, y compris avec les renoncements évoqués ci-dessus…

Conclusion – Penser aujourd'hui la formation comme accompagnement d'un développement professionnel, en appui sur la recherche, notamment dans un dispositif collaboratif : où en est-on ?

Je propose en conclusion de revenir aux principales questions posées en introduction, en dégageant au passage comment le travail sur différents types de dispositifs collaboratifs peut permettre d'enrichir la réflexion sur la formation des enseignant·e·s de mathématiques, initiale et continue, sur le plan individuel et collectif, mais en les situant dans le paysage général de la formation. J'élargirai à d'autres aspects des formations en jeu, en faisant le point sur la situation actuelle.

Les contributions de la recherche en didactique peuvent être de trois types (déjà évoqués dans Chesnais et *al*., 2021) : tout d'abord par la diffusion de résultats de recherche en tant que contenus de formation (concernant des difficultés d'élèves, des analyses de contenus mathématiques et de leurs enjeux didactiques, des situations, des concepts, des outils d'analyse etc.) ; ensuite, en fournissant des hypothèses étayées sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, dont la diffusion peut être visée par la formation, mais de façon moins explicite que les éléments précédents ; enfin, en fournissant des hypothèses étayées sur le fonctionnement des pratiques enseignantes et le développement professionnel des enseignant·e·s et nourrir ainsi les pratiques mêmes des formateur·trice·s et/ou l'élaboration de dispositifs de formation.

> ***Comment faire pour que la formation soit utile ? Pour faire se questionner, faire « bouger », faire comprendre, faire essayer… ? Comment s'adapter à la diversité des publics ? Comment répondre aux besoins immédiats tout en visant plus loin ?***

Je reprends rapidement les différentes hypothèses et résultats qui sont en jeu dans nos formations, du côté du formateur ou de la formatrice, et qui ont été illustrées sur les dispositifs « qui partent des pratiques ».

Processus de développement professionnel

Il me semble que les concepts de ZPDP, la réflexion sur le rôle du questionnement et des prises de conscience, du rapport entre discours et pratiques ou encore l'idée de « développement professionnel sur le plan didactique » et les composantes des pratiques peuvent alimenter la réflexion d'un·e formateur·rice ou accompagnateur·rice d'enseignant·e·s. Plus précisément, le principe de « partir des pratiques » pour permettre un développement professionnel implique plusieurs éléments. D'une part, s'il s'agit de s'appuyer sur les pratiques existantes, cela pose la question d'une adaptation dans le cas où il s'agit d'enjeux pour lesquels précisément les pratiques n'« existent » pas encore. Par exemple en formation initiale, ou lors de changements de programmes qui introduisent de nouveaux éléments. Il y a donc alors à trouver des passerelles entre le nouveau et ce qui existe déjà dans les pratiques, soit en germe, soit par l'intermédiaire de documents (vidéos notamment). Mais on peut penser que, lors de l'apparition de nouveaux thèmes, les pratiques s'appuient sur l'existant, et penser cet appui peut être nécessaire au développement de pratiques porteuses du point de vue didactique. Par ailleurs, cela implique également, conformément à l'hypothèse de ZPDP, de proposer des pistes, voire des ressources, supports d'enseignement ou situations, qui ne soient pas trop éloignées des pratiques des enseignant·e·s. On peut être amené alors à générer un questionnement sur un point précis et non pas avec l'idée que l'appropriation d'une nouvelle ressource se fait sans difficultés (*cf.* les travaux sur l'ingénierie didactique déjà cités). Plus généralement, il apparaît essentiel que tout apport apparaisse en réponse à des questions que les formé·e·s ont suffisamment faites leurs, c'est-à-dire qu'elles correspondent à des questions qu'ils ou elles se posent, des besoins qu'ils ou elles ressentent, des problématiques qu'ils ou elles identifient (même si elles ne sont pas toujours, voire jamais exactement les mêmes que pour les chercheur·e·s). Sous-tendant ce qui précède, le caractère collectif des formations est largement mobilisé, permettant d'élargir les points d'appui et de développer la discussion.

Eléments connus sur les pratiques ordinaires des enseignant·e·s de mathématiques

Il s'agit également, même si l'on n'a pas l'occasion d'observer directement les pratiques des formé·e·s dont on a la charge, de s'appuyer sur ce que l'on sait des pratiques ordinaires des enseignant·e·s et des pratiques ordinaires des débutant·e·s, notamment grâce à la recherche. Les didacticien·ne·s ont par exemple identifié, notamment grâce aux travaux sur les ingénieries didactiques, que les représentations de ce qu'est l'apprentissage, de l'enseignement et des mathématiques elles-mêmes des enseignant·e·s – et d'autant plus des débutant·e·s – sont très liées à leur vécu d'élèves et souvent éloignées de celles qui sous-tendent la didactique des mathématiques. On sait également que certaines connaissances mathématiques, en particulier parmi les connaissances « élémentaires », sont « naturalisées », ou que d'autres sont « transparentes », non reconnues en tant que connaissances. Un travail est ainsi nécessaire pour que les enseignant·e·s soient capables d'opérationnaliser dans leur enseignement les conséquences de ces constats (même si divers points de vue cohabitent dans la communauté de recherche des didacticien·ne·s sur la manière de formaliser ces phénomènes et sur le type de formation qui pourrait favoriser la dénaturalisation). Certains travaux ont par ailleurs mis en évidence, pour les débutant·e·s le surinvestissement du niveau local d'organisation des pratiques (Robert et Masselot, 2007 ; Robert et *al.* 2012) par rapport aux niveaux micro et macro ; par exemple, les débutant·e·s ont des difficultés à identifier comment certains enjeux de savoirs sont articulés avec d'autres dans une progression annuelle. Lors de l'introduction de nouveautés (comme par exemple les TICE, *cf.* Abboud-Blanchard et Rogalski, 2017), des chercheures ont montré les tensions inhérentes à leur enseignement, liées à la non-transparence de l'instrument pour les élèves. D'autres travaux encore ont montré la plus grande facilité à faire évoluer la composante cognitive (par exemple le choix de certaines tâches) que la composante médiative (notamment les modalités de travail des élèves et les discours tenus en classe sur les tâches) des pratiques. Tenir compte de la complexité et de la cohérence des pratiques individuelles des enseignant·e·s, qui en assurent la stabilité, suppose par ailleurs de penser des formations qui prennent en considération l'articulation de différentes composantes au lieu de se focaliser sur un seul aspect du travail enseignant et espérer en avoir des effets. Les travaux sur les ingénieries didactiques (entre autres) ont également montré que certaines « propositions d'enseignement », notamment celles issues de la recherche, peuvent être trop loin des pratiques de certain·e·s enseignant·e·s et ne pas donner les résultats escomptés lorsqu'ils ou elles les utilisent, voire être contre-productives, autant pour les élèves que pour les enseignant·e·s eux·elles-mêmes. On peut citer le cas où un·e enseignant·e, trop peu au fait des tenants et aboutissants d'une situation, notamment s'il ou elle est débutant·e, se retrouve démuni·e face aux productions des élèves, ne reconnaissant pas le fil de la situation : cela peut aller jusqu'à mettre en péril la gestion de la classe, et même aboutir à des formes de rejet d'un enseignement mobilisant des situations didactiquement riches. Penser ainsi les formations en acceptant que tout n'est pas possible ou adapté pour un·e enseignant·e donné·e à un moment donné ou avec une classe donnée (voire dans l'absolu) me semble nécessaire.

Tout ce qui précède semble bien pris en compte dans les dispositifs que j'ai décrits, que ce soit en termes d'appui sur les pratiques et de travail dans les ZPDP ou en termes de limites et d'adaptation aux publics. Une question reste toutefois, dans les dispositifs de formation collectifs, autour du fait que les pratiques des participants et, de fait, leurs ZPDP, sont différentes, ce qui pose la question de l'identification d'objets ou de questions pouvant correspondre à une « ZPDP moyenne » du collectif. Des chercheur·e·s évoquent aussi une ZPDP collective précédant les appropriations individuelles.

Dans ce qui suit, je propose de réfléchir à la spécificité des dispositifs collaboratifs dans le paysage général des formations professionnelles et d'élargir à d'autres questions.

Comment faire pour que la formation aide à dépasser la reproduction des pratiques existantes ? Quel fonctionnement des collectifs d'enseignant·e·s pour permettre le développement professionnel ?

Les travaux de recherche menés au sein des dispositifs mentionnés ci-dessus dans ce texte illustrent bien, à mon sens, l'enjeu (et les difficultés) de la construction de collectifs pour espérer faire évoluer les pratiques enseignantes. Cela concerne aussi bien le niveau local, dans un établissement par exemple, qu'un niveau plus global à l'échelle du système, grâce à une organisation généralisée, et favorisée par l'institution, de tels dispositifs par exemple. Il s'agit également de réfléchir aux modalités, au type de « contrat » les plus favorables au sein de ces collectifs. Le bénéfice, voire la nécessité d'apports extérieurs aux collectifs enseignants mérite par ailleurs une attention aux formes possibles de « transposition ». Je pense en particulier que l'opérationnalisation de certains résultats de recherche dans les pratiques enseignantes, supposés au bénéfice des apprentissages des élèves, ne peut être construite complètement qu'à l'interface entre enseignement et recherche, notamment dans des dispositifs de recherche collaboratifs. Ces derniers sont ainsi pensés comme pouvant favoriser cette nécessaire élaboration collective.

Comment articuler les interventions des différent·e·s intervenant·e·s ?

Cette question dépasse les dispositifs évoqués dans le texte. Pointons simplement que, dans le système de formation initiale des enseignant·e·s de mathématiques du second degré en vigueur actuellement en France, ce dernier aspect semble crucial : le rôle essentiel de la mise en cohérence et de l'articulation des différentes interventions. Il apparaît en effet dans de nombreuses recherches (cf. notamment Crahay et al., 2010, pour une revue de travaux) que les pratiques des débutant·e·s notamment sont bien davantage façonnées par les pratiques auxquelles ils sont confrontés sur le terrain (celles de leur tuteur·rice ou de leurs collègues dans l'établissement où ils réalisent leurs stages) que par les contenus travaillés en centres de formation (en l'occurrence, à l'université, dans les INSPE). Cette mise en cohérence ne peut alors que reposer sur des concertations, entre des universitaires qui connaissent suffisamment le terrain et qui intègrent la question de l'opérationnalisation dans les pratiques de leurs contenus de formation ; des formateur·rice·s issus du terrain qui connaissent suffisamment la didactique des mathématiques (voire d'autres domaines de recherche portant sur l'éducation et la formation) et qui soient formé·e·s à la formation ; des tuteur·rice·s sur les terrains de stage qui connaissent l'organisation et les contenus de formation, qui soient suffisamment armés en didactique et formés à l'accompagnement professionnel des enseignant·e·s (débutant·e·s).

Tout ceci pointe des besoins de formation, de travail collectif, de communication et de coordination dont on sait bien que les conditions actuelles (de l'école, de la formation et même de la recherche) ne les favorisent pas.

Que faire des ressources ? Que dire ? À quel moment ? À partir de quel support ? Quelles questions poser ? Sur quoi attirer l'attention ?

Là encore, le concept de ZPDP peut outiller utilement, à mon sens, la réflexion des formateur·rice·s, que ce soit dans un dispositif collaboratif ou non. Il s'agit tout d'abord de différencier les besoins supposés par le·a formateur·rice des besoins exprimés par les formés et de prendre en considération la nécessité d'un travail sur la problématisation des besoins supposés en appui sur les pratiques existantes (ou des représentations des pratiques qu'ont les débutant·e·s).

L'apport de ressources ne peut avoir un effet enrichissant des pratiques, là encore, que s'il apparaît en réponse à des questions « suffisamment » problématisées et correspondant ainsi « suffisamment » à des préoccupations des formés.

Tout cela suppose aussi de travailler les « proximités » entre les problématiques des formés et les interventions du formateur ou de la formatrice (Abboud-Blanchard et *al.*, 2022). Là encore, cela nécessite une palette large de connaissances de la part du formateur ou de la formatrice et une grande disponibilité de ces connaissances.

Pour finir, il me semble essentiel de réfléchir collectivement aux formes possibles de transposition des résultats de recherche, ce qui met en jeu à la fois ces résultats et les modalités de formation associées, notamment les dispositifs qui se développent aujourd'hui : ceci dépasse à mon sens la question de la diffusion de produits de la recherche. La recherche peut apporter surtout des questions, des hypothèses, éventuellement des outils pour élaborer des réponses, mais ces réponses ne peuvent résulter, au moins pour une part, que d'une forme de co-construction, sorte de garantie d'adaptation aux pratiques réelles et de diffusion. Cela nécessite entre autres de s'interroger sur les dispositifs étudiés ici, qui permettent naturellement des échanges collaboratifs, sur leur articulation entre eux et avec les pratiques du formé, participant ou non. Il faut à mon sens être conscient que cela suppose, encore une fois, peut-être des deuils à faire, au moins provisoirement et au moins pour certains éléments, notamment en formation initiale, ou sur des formations dont les formats sont trop contraints (notamment par leur courte durée, mais aussi par le fait que les participants ne sont pas nécessairement volontaires, ou encore du fait du turn-over lorsqu'elles se déroulent sur un temps plus long *etc*.).

Ainsi, la recherche ne peut certainement pas tout, mais divers types de lieux ou dispositifs existants semblent porteurs de nouvelles possibilités, en favorisant notamment la collaboration entre chercheur·e·s et enseignant·e·s, qui paraît essentiel comme levier potentiel d'évolution. De ce point de vue, la CORFEM joue un rôle important, à l'interface entre la recherche et la formation.

Bibliographie

Abboud, M., Robert, A. et Rogalski, J. (2022). Interroger les pratiques de formation des professeurs de mathématiques : orientations de recherche et perspectives (un agenda). *Les Annales thématiques*, *1*, 261-285.

Allard, C., Horoks, J. et Pilet, J. (2022). Principes de travail collaboratif entre chercheur·e·s et enseignant·e·s : le cas du LéA RMG, Éducation et didactique, 16-1, 49-66.

Artigue, M. (2009). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. Cours à la XVe école d'été de didactique des mathématiques. (Clermont-Ferrand du 16 au 23 août 2009). https://www.researchgate.net/publication/280853182_En_amont_et_en_aval_des_ingenieries_didactiques

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 9(3), 281–308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Artigue, M. et Perrin-Glorian, M. J. (1991). Didactic Engineering , researche and Development tool : some Theoretical Problems linked to this Duality. For the learning of Mathematics, 11.1. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiCq5S-1pbuAhWhVBUIHdy5BQIQFjABegQIAxAC&url=https%3A%2F%2Fflm-journal.org%2FArticles%2FDCDCA6E791D990791426D7502008.pdf&usg=AOvVaw2ShidgCwjq80AUNaulXywz

Batteau, V. (2013). *Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation de lesson study en mathématiques*. Canevas de thèse. FAPSE. Université de Genève.

Batteau, V. et Clivaz, S. le dispositif de formation continue lesson study : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N - 98,* 2016 - pp. 27 à 48

Bednarz, N. (2009). Analysis of a collaborative research project. A researcher and a teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 8, 1, 1-24.

Bertone, S., Chaliès, S. et Clot, Y. (2009). Contribution d'une théorie de l'action à la conceptualisation et à l'évaluation des pratiques réflexives dans les dispositifs de formation initiale des enseignants, *Le travail humain*, 72, 105-125.

Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux, pp.535, 1987, Jean Colmez. ⟨hal-00610769⟩. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/

Cerclé, V., Chesnais, A. et Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x, 113*, pp. 59 à 88. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x4_1633083537539-pdf

Chesnais, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*, Note de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Montpellier.

Chesnais, A. (2021a). Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade,

P. Job, ... F. Vandebrouck (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*.

Chesnais, A. (2021b). Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices. ZDM Mathematics Education, 53, 337–357 (2021). https://doi.org/10.1007/s11858-021-01255-0.

Chesnais, A. et Constantin, C. (2020). Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics. *Proceedings of the 7th European Topic Conference ERME – Language in the Mathematics classroom* (Montpellier, 18-21 février 2020).

Chesnais, A., Constantin, C. et Leblanc, S. (à paraître). Etudier le développement professionnel d'enseignant.e.s accompagné.e.s par des didacticiennes au sein de dispositifs collaboratifs : regards croisés en didactique en analyse de l'activité. A paraître dans la revue *Questions vives* dans le cadre d'un numéro thématique sur l'accompagnement.

Chesnais, A., Coulange, L., Gandit, M. et Train, G. (2021). Outiller la formation des enseignants de mathématiques par les recherches en didactique sur les pratiques enseignantes. Table ronde au colloque CORFEM 2021 (Strasbourg, 10 et 11 juin 2021).

Chesnais, A. & Munier, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathé A.-C. et Mounié E. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2014-2015*.

Clivaz, S. (2014). Des mathématiques pour enseigner ? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire ? Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clivaz, S. (2015). French didactique des mathématiques and Lesson Study: A profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies,* 4(3), 245-260. https://doi.org/https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2014-0046. DOI : 10.1108/IJLLS-12-2014-0046

Clivaz, S., et Takahashi, A. (2020). Lesson Study, enseignement par la résolution de problèmes et neriage : réflexions autour de l'observation d'une leçon de mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) - Ex. Math-Ecole*, 233, 6-15. http://hdl.handle.net/20.500.12162/4019

Constantin, C. (2021). La substitution : points de vue écologique et sémiolinguistique. *Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg,* 26, 183-194.

Crahay, M., Wanlin, P., Issaieva E. & Laduron I. (2010). Fonctions, structuration et évolution des croyances (et connaissances) des enseignants, *Revue française de pédagogie*, 172 | juillet-septembre 2010, 85-129.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, 18, 77-105.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33–64. https://doi.org/10.7202/000305ar.

Equipe AMPERES (2007). Le projet AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etudes et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire), vers un autre type de processus d'étude. In Gueudet, G. et Matheron, Y. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM de Paris 7.

Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de l'université Joseph-Fourier, Grenoble 1.

Houdement C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM, 67*, 69-84.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2002). Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. In Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds*) Actes de la 11ième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.* La Pensée Sauvage – Editions. Version électronique du cédérom d'accompagnement.

Jacquier I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x,* 41, 27-50.

Jaubert M., Rebière M. & Bernié J.-P. (2012). *Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative.* In : forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf.

Joffredo-Lebrun, S. et Morellato, M. « Vers une ingénierie coopérative enseignants / chercheurs ? », Journées IFé 2012. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01091896

Laborde, C., Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14/1-2, 165-209.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard. 184 p.

Margolinas, C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J. Y. Rochex et J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*. Rennes : PUR.

Masselin, B., Hartmann, F. et Artigue, M. (2023). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de lesson study adapté, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Thématique 1, 213-260.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. Education & Didactique, 3(1), 77-90. https://journals.openedition.org/educationdidactique/420

Paul, M. (2009). Autour du mot « Accompagnement ». *Recherche et formation, 62*, 91-108.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes «faibles». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *13*(1.2), 5-118.

Perrin-Glorian, M. J. (2009). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. Cours à la XVe école d'été de didactique des mathématiques. (Clermont-Ferrand du 16 au 23 août 2009). https://www.researchgate.net/publication/280853182_En_amont_et_en_aval_des_ingenieries_didactiques

Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. Actes du congrès : La TACD en questions, questions à la didactique. Rennes : CREAD. https://tacd-2019.sciencesconf.org/data/ACTES_SessionX_Congres_TACD_Rennes_2019.pdf. hal-02314052

Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner, et al. (éds.) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Robert, A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques, 27(3),* 271–311.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (Éd.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.

Robert, A., Robinet, J. (1989). Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. IREM de Paris, Cahier de DIDIREM, 1. <hal-02134765>.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double-approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol. 2, 4, 505-528.

Robert, A. et Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x, 60*, 6-25.

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34 (2/3), 239-285.

Roditi, E. et Trgalova, J. (2016). Collectifs de professeurs et de chercheurs. Y. Matheron et. al. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, pp.183-202, 978 2 85919 315 7. halshs-01403284

Rogalski, J. & Robert, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Dans : Valérie Lussi Borer éd., Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation (pp. 93-113). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.lussi.2015.01.0093.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45(7), 1031-1043. https://www.researchgate.net/publication/265092495_Cooperative_engineering_as_a_specific_design-based_research

Theureau, J. (2010). Les entretiens d'autoconfrontation et de remise en situation par les traces matérielles et le programme de recherche « cours d'action ». *Revue d'anthropologie des connaissances, 4*(2), 287-322.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation. Dans : Jean-Marie Barbier éd., *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris cedex 14: PUF. https://doi.org/10.3917/puf.barbi.2011.01.0275"

ANALYSE DE L'ACTIVITE DE PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DEBUTANTS EN FORMATION INITIALE : LE CAS DE L'AIRE DU PARALLELOGRAMME EN CLASSE DE 5EME

Christine CHOQUET

Résumé. Dans le cadre de la formation initiale en Master MEEF Mathématiques, une unité d'enseignement (UE3) est dédiée d'une part à la découverte des recherches dans la didactique de la discipline (EC *Se former à et par la recherche*) et d'autre part à une analyse de l'activité de l'enseignant et de l'élève (EC *AAEE*). Lors de cette communication, en lien avec le thème 2 du colloque, nous analysons avec les participants des éléments qui sont développés en formation dans cette UE en lien avec la pratique des deux professeurs de mathématiques débutants. Le travail de l'atelier s'intéresse en particulier à deux séances proposées et mises en œuvre par deux professeurs stagiaires en collège. Les deux séances proposent d'aborder en classe de 5ème l'aire du parallélogramme par des activités différentes. Afin d'expliciter pour les comprendre les choix des deux enseignants, ces séances sont analysées dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert, 2008). Une discussion s'engage avec les participants afin de revenir sur les choix des deux professeurs en appui sur la formation qu'ils ont reçue et sur des pistes de formation qui permettent d'assurer un développement professionnel des professeurs débutants.

L'atelier proposé s'est déroulé en 3 temps :

- Temps 1 - Présentation du cadrage théorique de notre étude
- Temps 2 - Présentation de la séance prévue par les professeurs-stagiaires J et A
- Temps 3 - Echanges avec les participants en appui sur les choix de J et A

avant de conclure sur des effets de la formation initiale sur les pratiques des professeurs débutants.

Cadrage théorique : un travail inscrit dans le prolongement de recherches existantes

L'introduction de cet atelier a permis d'expliciter le lien de ce travail, dans le cadre du thème 2 du colloque, avec des recherches menées dans le champ de la didactique des mathématiques. Elle met d'abord en exergue que

> les difficultés mises en évidence dans les pratiques des débutants nous incitent, en tant que formateurs et chercheurs, à réfléchir davantage aux différents types de savoirs véhiculés en formation. (Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012, p.15).

Des formateurs et formatrices (Robert, 2005) ont en effet fait des propositions pour penser la formation initiale des futurs enseignants de mathématiques. Il faudrait, d'après les recherches menées, élaborer « […] des scénarios de formation, qui articulent des éléments théoriques et des expériences en classe, et qui puissent être évalués par des recherches. ».

Ces travaux de recherche mettent en évidence que l'élaboration de scénarios pour la formation initiale

> […] implique à la fois :

- un travail explicite de transposition de certaines recherches : tant sur les apprentissages des élèves que sur les pratiques et leur formation,
- un travail d'ingénierie longue, avec la mise au point des modalités de ces formations, une réflexion sur les formateurs et peut-être une certaine formation de ces derniers. (Robert, 2005, p. 213)

L'étude présentée dans cet atelier contribue à enrichir ces propositions en analysant certains choix effectués pour leur classe par des professeurs stagiaires afin d'identifier l'influence de la formation et donc des pratiques des formateurs sur le processus de développement des pratiques des débutants. Nous rappelons que pour ce qui concerne la pratique de l'enseignant et la pratique du formateur, nous empruntons les définitions établies par Robert (2008) : il s'agit de tenir compte de « tout son travail avant, pendant et après les séances réalisées en classe », en englobant « tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas […] ». (Robert, 2008, p. 59).

Le travail d'analyse des situations mathématiques et des pratiques des professeurs se situe dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002 ; Choquet 2016) résumé par le schéma suivant :

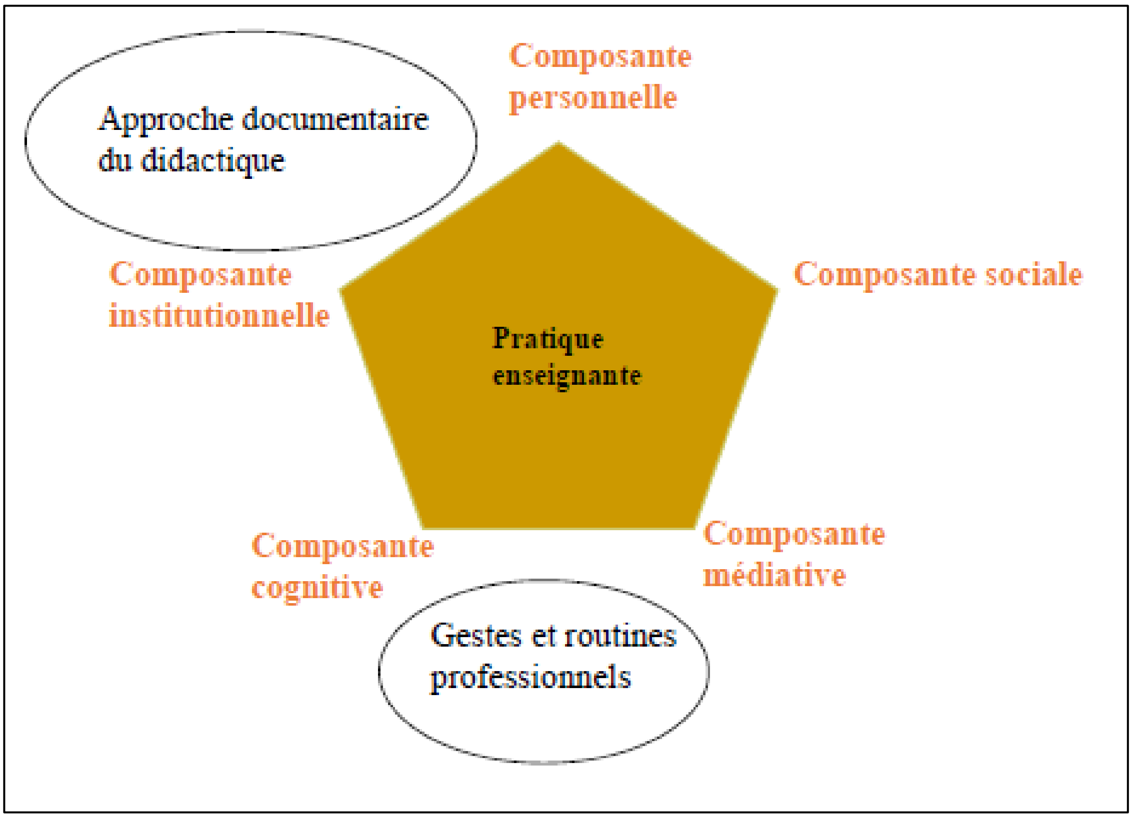


Figure 2 – Schéma proposé dans Choquet (2016) dans le cadre d'analyse de pratiques ordinaires

Pour réaliser cette étude, le travail de recherche s'appuie sur un recueil de données conséquent : les contenus de formation des formateurs, des observations de séances menées par des professeurs stagiaires, des entretiens, ainsi que des productions issues de travaux effectués en formation par les professeurs stagiaires.

Concernant la formation, les données sont issues de trois unités d'enseignement (UE) réparties sur les deux années de Master MEEF : les UE Didactique des mathématiques, UE-EC Recherche et UE-EC Mise en situation professionnelle. Les UE Didactique et

UE-EC Recherche visent à initier les étudiants à la didactique de la discipline, à leur faire découvrir et étudier divers cadres théoriques et concepts didactiques. Plusieurs productions écrites sont attendues dont un mémoire de recherche. L'UE-EC Mise en situation professionnelle consiste en des analyses de l'activité de l'enseignant et de l'élève en lien direct avec la classe et les pratiques de stage des étudiants/stagiaires.

Avec les participants, nous choisissons d'étudier deux séances proposées par deux des professeurs débutants ayant participé à la formation. Les deux séances abordent en classe de 5ème le calcul de l'aire du parallélogramme, par des situations mathématiques différentes.

Présentation des expérimentations : une séance prévue par J et A

Chaque professeur-stagiaire propose une situation dédiée à l'introduction de la formule du calcul de l'aire d'un parallélogramme, en classe de 5ème.

Pour rappel, en classe de 5ème, les repères annuels de progression en mathématiques au cycle 4 visent :

> La connaissance des formules donnant les aires du rectangle, du triangle et du disque […] est entretenue à travers la résolution de problèmes. Elle est enrichie par celles de l'aire du parallélogramme.

En fin de classe de 5ème, un élève doit être capable de calculer « le périmètre et l'aire des figures usuelles (rectangle, parallélogramme, triangle, disque) et de calculer le périmètre et l'aire d'un assemblage de figures. » (MEN, 2020). Des documents d'accompagnement des programmes, disponibles en ligne[1], apportent des précisions et proposent des stratégies d'enseignement, en particulier :

Stratégies d'enseignement

Le thème « grandeurs et mesures » n'a pas vocation à être travaillé seul mais au service de la résolution de problèmes.

Savoir-faire travaillés

- ❑ Manipuler et interpréter des grandeurs.
- ❑ Comparer des grandeurs.
- ❑ Mesurer.
- ❑ Référer à des formules et calculer.
- ❑ Référer à des unités et effectuer des changements d'unités.

Figure 2 – Extrait du document Grandeurs et mesures Cycle 4, page 2

[1] https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4

La différenciation des structures ou dispositifs de classe porte en particulier sur la façon de créer et de faire varier les groupes (travail en autonomie, en binômes, en groupes homogènes ou hétérogènes). L'important étant qu'ils soient favorables aux échanges, à la coopération, à la confrontation d'idées et au travail.

Figure 3 – Extrait du document Grandeurs et mesures Cycle 4, page 5

Présentation de la séance prévue par A

Une analyse *a priori* a été menée avec A, elle montre que la situation mathématique proposée aux élèves s'appuie sur des rectangles pour aller vers les parallélogrammes. La consigne donnée aux élèves est inspirée du manuel[2] utilisé dans cette classe (figure 4) :

1. Tracer, sur une feuille blanche, un rectangle $EFGH$ tel que $EF = 5$ cm et $FG = 8$ cm.
   Calculer l'aire du rectangle $EFGH$.
2. Placer un point X sur le segment $[FG]$ et un point Y sur le segment $[EH]$.
   Tracer le segment $[XY]$.
   Découper le rectangle $EFGH$, puis couper le long du segment $[XY]$.
   Reconstituer un parallélogramme à partir des deux morceaux obtenus.

Figure 4 – Enoncé distribué à chaque élève par A

L'analyse *a posteriori* du déroulement et de ce que produisent les élèves montrent que, même s'ils répondent à la consigne de construction, des difficultés sont rencontrées par la classe lorsque A souhaite amener les élèves vers un raisonnement sur leurs constructions.

Les élèves construisent pour la grande majorité d'entre eux, un rectangle demandé, le découpent et reconstituent un parallélogramme avec les deux pièces obtenues. Les parallélogrammes sont affichés au tableau par A :

[2] *Indigo* 5ème, n°5 p. 261 (2020)

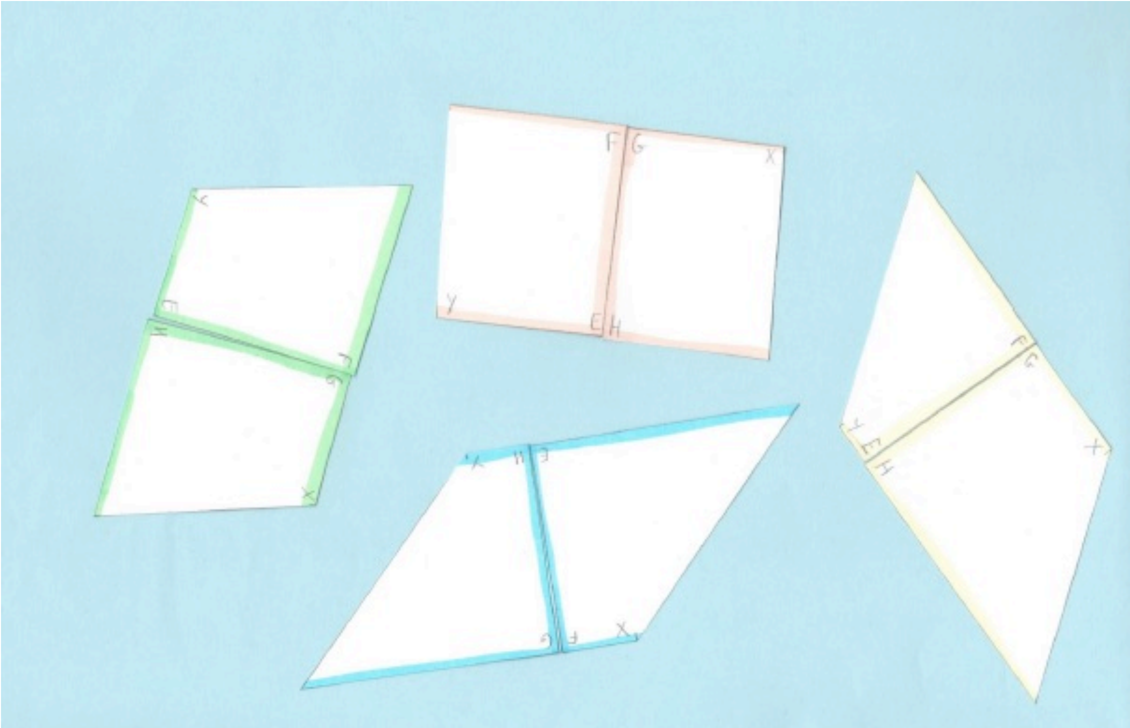


Figure 5 – Exemples de constructions affichées au tableau lors de la mise en commun

Lors de la mise en commun des constructions, A pose aux élèves trois questions : les parallélogrammes sont-ils tous identiques ? Qu'ont-ils tous en commun ? Quelles sont les différences ?

Les élèves sont d'accord pour répondre que, non, les parallélogrammes obtenus ne sont pas identiques. Lors de l'échange, ils ajoutent : « Ils ont la même aire, la distance entre les côtés [*EH*] et [*FG*] est la même ; ils ont la même longueur, les angles sont différents ». En revanche, la classe ne réussit pas à établir, à partir de la formule de calcul de l'aire du rectangle, la formule qui permettrait de calculer l'aire des parallélogrammes.

Présentation de la séance prévue par J

Une analyse *a priori* a été menée avec J, elle montre que la situation mathématique proposée aux élèves s'appuie sur un parallélogramme (*cf.* figures 6 et 7), présenté sur feuille blanche et sur papier quadrillé et mobilise le logiciel *Géogébra* dans la réflexion vers une écriture de la formule de son aire. Elle est inspirée de l'ouvrage *Des maths ensemble et pour chacun*[3].

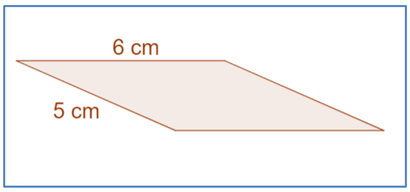


Figure 6 – Parallélogramme proposé par J sur feuille blanche

[3] Rouquès, J.P., Steiner, H. (2010). *Des maths ensemble et pour chacun 5ème*. Scéren Canopé.

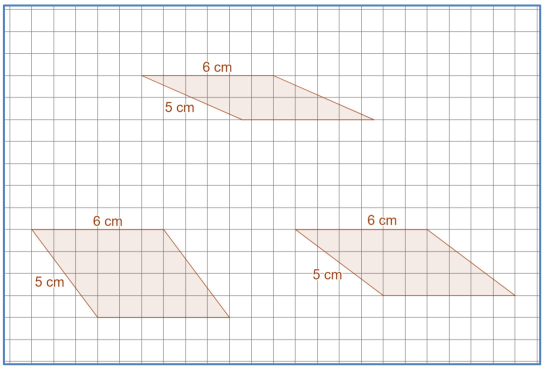


Figure 7 – Parallélogramme proposé par J sur feuille quadrillée

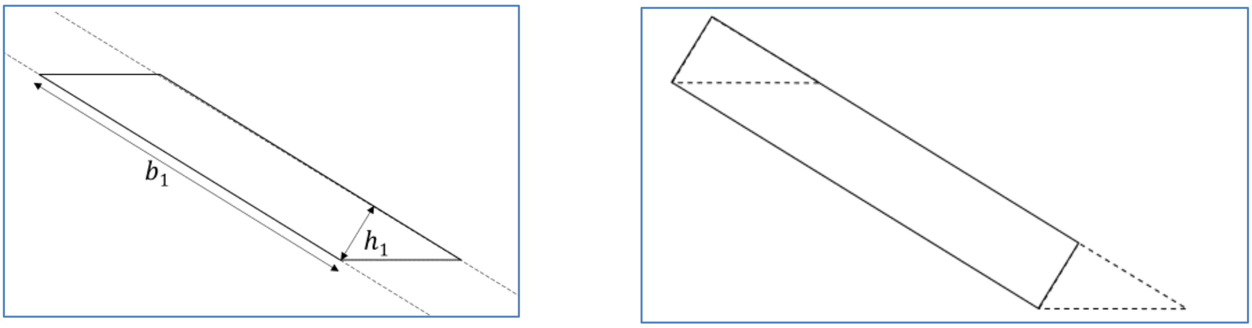
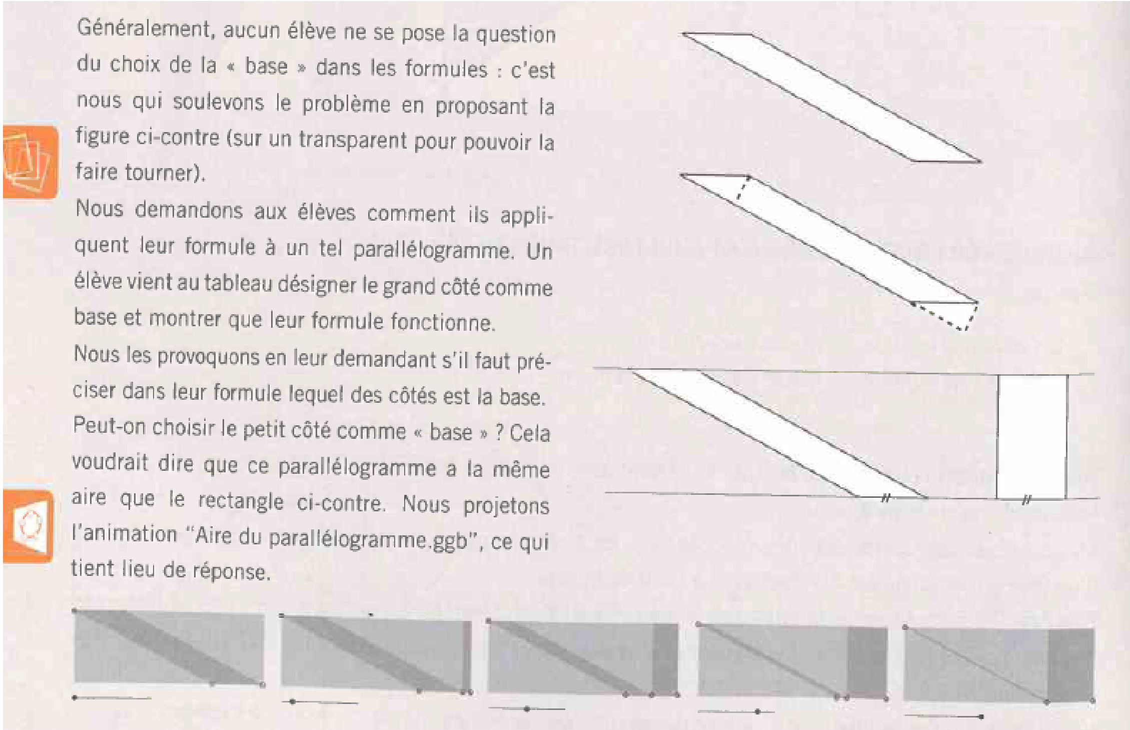


Figure 8 – Eléments projetés par J

J propose aux élèves de travailler collectivement autour de questions qu'il pose et des réponses de quelques élèves. Le travail en collectif organisé ainsi par J, à l'aide du logiciel *Géogébra* (*cf.* figure 8) permet d'engager certains des élèves vers le lien existant entre la formule de l'aire du parallélogramme proposé et l'aire du rectangle connue des élèves. Cependant tous les élèves ne semblent pas faire ce lien. Et cela même si lors de l'analyse *a priori*, J avait relevé que cette difficulté était prévue et commentée dans l'ouvrage *Des maths ensemble et pour chacun* qu'il utilise (*cf.* figure 9).



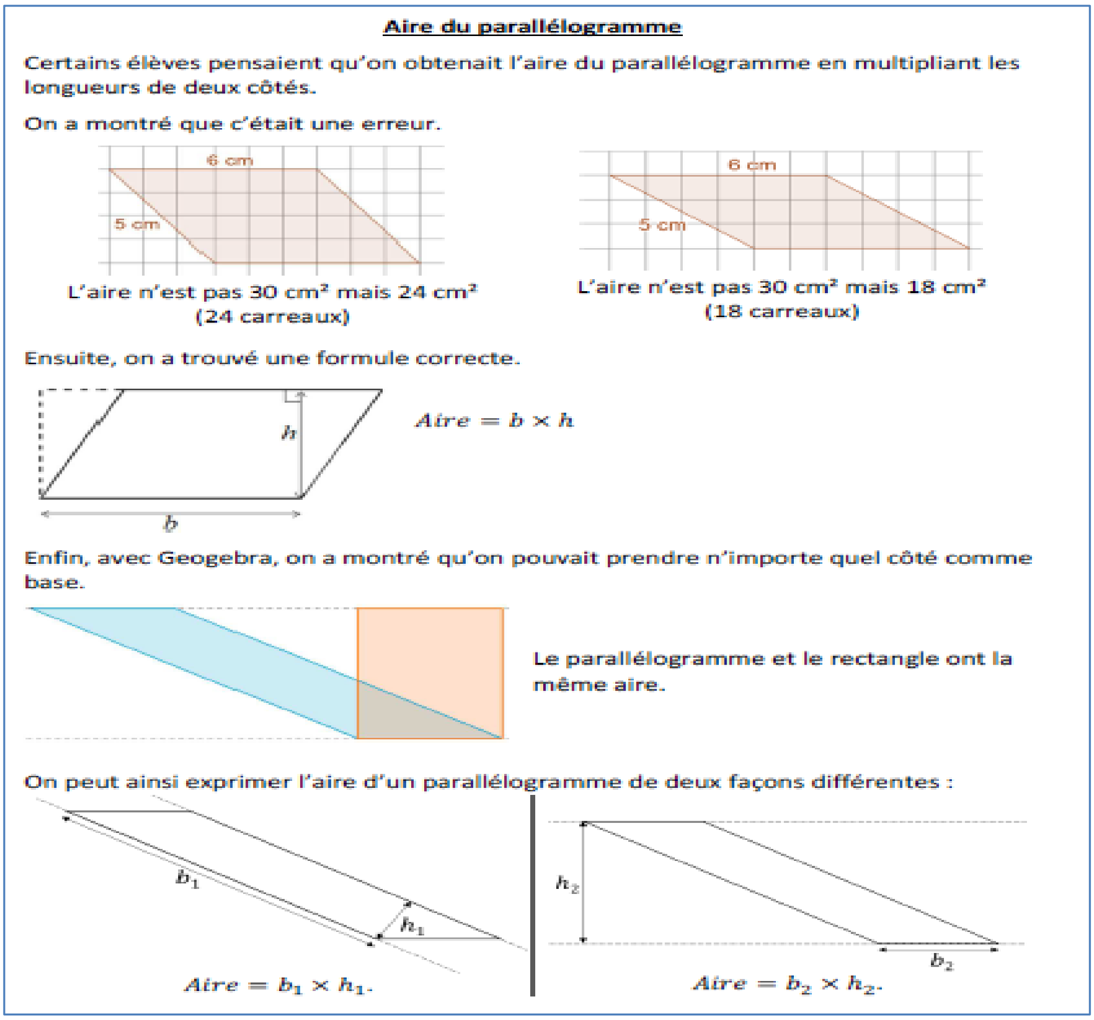
Généralement, aucun élève ne se pose la question du choix de la « base » dans les formules : c'est nous qui soulevons le problème en proposant la figure ci-contre (sur un transparent pour pouvoir la faire tourner).

Nous demandons aux élèves comment ils appliquent leur formule à un tel parallélogramme. Un élève vient au tableau désigner le grand côté comme base et montrer que leur formule fonctionne.

Nous les provoquons en leur demandant s'il faut préciser dans leur formule lequel des côtés est la base. Peut-on choisir le petit côté comme « base » ? Cela voudrait dire que ce parallélogramme a la même aire que le rectangle ci-contre. Nous projetons l'animation "Aire du parallélogramme.ggb", ce qui tient lieu de réponse.

Figure 9 – Extrait de l'ouvrage Des Maths ensemble et pour chacun, utilisé par J

Un bilan écrit est projeté puis distribué par J à chaque élève (*cf.* figure 10). Il relate le travail effectué pendant la séance et les éléments que J souhaite mettre en évidence dans l'élaboration de la formule de calcul d'aire d'un parallélogramme.



Aire du parallélogramme

Certains élèves pensaient qu'on obtenait l'aire du parallélogramme en multipliant les longueurs de deux côtés.

On a montré que c'était une erreur.

6 cm
5 cm
L'aire n'est pas 30 cm² mais 24 cm² (24 carreaux)

6 cm
5 cm
L'aire n'est pas 30 cm² mais 18 cm² (18 carreaux)

Ensuite, on a trouvé une formule correcte.

h
b
$Aire = b \times h$

Enfin, avec Geogebra, on a montré qu'on pouvait prendre n'importe quel côté comme base.

Le parallélogramme et le rectangle ont la même aire.

On peut ainsi exprimer l'aire d'un parallélogramme de deux façons différentes :

b_1
h_1
$Aire = b_1 \times h_1.$

h_2
b_2
$Aire = b_2 \times h_2.$

Figure 10 – Bilan écrit distribué par J aux élèves

Une analyse *a posteriori,* du document distribué et de ses interactions avec la classe lors de la phase d'institutionnalisation observée, montre que J réussit à partir du contexte de la situation (le parallélogramme de dimensions 5 cm x 6 cm) à exposer la formule qu'elle attendait des élèves. J s'appuie également sur le travail effectué avec le logiciel afin de faire visualiser et d'inscrire explicitement dans les cahiers le lien existant entre le calcul de l'aire d'un rectangle et celui de l'aire d'un parallélogramme. Cependant il est clair que dans la classe, tous les élèves n'atteignent pas le niveau de décontextualisation nécessaire à une réelle compréhension de ce lien. Des exercices et problèmes à suivre dans les séances devront tenir compte de cette difficulté et y faire face en tentant de la surmonter avec tous les élèves.

Conclusion : prolonger la réflexion entre formateurs et formatrices

Deux éléments sont à retenir des échanges dans l'atelier suite à ces présentations.

Dans un premier temps, les deux approches, celle par le rectangle et celle par le parallélogramme sont interrogées par les participants avec les deux professeurs débutants et nous-mêmes. La conclusion laisse penser qu'une alternative à ces deux entrées seraient d'en proposer une (d'abord celle proposée par J, partant du parallélogramme de dimensions 5 cm x 6 cm) et de travailler sur l'autre approche dans un exercice complémentaire afin de permettre à tous les élèves d'entrer dans l'explicitation de la formule. Un lien a également été fait avec une approche complémentaire possible en lien avec des textes historiques[4]. Le travail est à approfondir dans ce sens, il permettrait ainsi une nouvelle ouverture pour les élèves et un enrichissement de ces séances.

Dans un second temps, pour conclure sur la réflexion engagée également sur les contenus et modalités de la formation initiale reçue, l'analyse dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique montre chez ces deux professeurs débutants des éléments constructifs. Ils élaborent leurs séances et séquences au regard des instructions officielles. Lors des séances en formation, ces deux enseignants montrent qu'ils possèdent des connaissances didactiques : ils ont compris les enjeux de l'enseignement de la géométrie au collège, notamment en lien avec des problématiques associées aux constructions de figures et aux raisonnements à développer chez tous les élèves. Ils ont compris également des éléments de l'enseignement des grandeurs et mesures en lien notamment avec les problématiques d'aires.

Par ailleurs, ces deux enseignants affichent la volonté d'utiliser ces connaissances dans leur pratique quotidienne. Ils font un choix de situations mathématiques pour leur classe au regard des existants dans le manuel de la classe ou des activités étudiées en formation. Par ailleurs, la mise en œuvre des deux séances était anticipée de manière relativement précise et une analyse *a priori* centrée sur les difficultés éventuelles des élèves, avec anticipation d'aides à apporter, avait été effectuée. Les deux professeurs stagiaires font preuve ensuite d'un recul réflexif sur leur pratique : cela s'opère pendant la formation mais c'est également observable pendant l'atelier, face aux questions et réactions des participants. Les productions des élèves de chaque séance et les difficultés rencontrées sont repérées, dans l'atelier, et des tentatives d'explicitation sont faites, au regard des lectures effectuées (programmes, ouvrages) et des situations étudiées en formation.

De ce fait, nous considérons que la formation a eu un *effet réflexif* (Choquet, 2022) sur ces deux professeurs débutants, la présentation effectuée pendant l'atelier et les interactions avec les participants y ayant d'ailleurs fortement contribué. Les séances observées tout au long de l'année et les différents entretiens menés avec ces deux professeurs montrent que la composante sociale de leur pratique influe fortement sur leur composante cognitive puis sur leur composante médiative. La prise de décision pour la classe a été, tout au long de la formation, de plus en plus éclairée, non seulement du fait des réactions en classe des élèves mais surtout par des apports didactiques compris et des échanges de pratiques constructifs auxquels ils ont pris part, tels que ceux observés dans l'atelier.

Bibliographie

Charles-Pézard, M., Butlen, D., Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* La pensée sauvage.

Choquet, C. (2016). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherches en Didactique Des Mathématiques*, *36*(1), 11–47. https://revue-rdm.com/2016/profils-de-professeurs-des-ecoles/

[4] Éléments de géométrie d'Euclide au XIXe siècle - IREM de Paris http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/M-ATH-activiteparallelogrammeeuclide.pdf

Choquet, C. (2022). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. *Annales de didactique et de sciences cognitives. Numéro thématique 1*. IREM de Strasbourg. 287-313. https://doi.org/10.4000/adsc.1880

Choquet, C., Zebiche, N. (2019) Débuter dans l'enseignement des mathématiques : quel impact de la formation initiale ? In Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone. Paris-Gennevilliers, 22-26 octobre 2018.

MEN (2020). Programmes du cycle 4. BO n°31 du 30 juillet 2020. Eduscol. En ligne.

Robert, A. (2005). De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 209-249.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès. 45-52.

Rouquès, J.P., Steiner, H. (2010). *Des maths ensemble et pour chacun* 5ème. Scéren, Canopé.

DES EFFETS DE L'EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES : DIFFICULTES ET LEVIERS ?

Groupe IREM CORFEM Ile de France : Lucie AUDIER, Julie HOROKS, Marie-Christine LEVI, Christophe RIVIÈRE, Aline ROBERT

Résumé. Notre atelier propose une réflexion sur les effets de la mise à distance de l'enseignement sur les pratiques enseignantes en mathématiques, en interrogeant ce qui a posé le plus de difficultés aux enseignant.es pendant cette période, mais aussi ce qui a pu provoquer des prises de conscience et des modifications plus ou moins durables dans la façon d'enseigner les mathématiques.

La mise à distance de l'enseignement en mars 2020 a forcé les enseignant.es à faire évoluer rapidement leurs pratiques pour s'adapter au contexte. Loin d'affirmer que ce contexte a été positif pour les apprentissages des élèves, nous faisons tout de même l'hypothèse qu'il a pu être un levier potentiel pour une réflexivité et un enrichissement des pratiques enseignantes. Les retours d'expérience des enseignants en mathématiques permettent donc de mettre en lumière non seulement les difficultés rencontrées, mais aussi la façon dont ces difficultés ont pu avoir un effet loupe sur certains gestes professionnels (évaluer les apprentissages des élèves, organiser le scénario d'enseignement et en particulier l'articulation cours/exercices, gérer les interactions avec les élèves, expliciter le contrat didactique, diversifier et différencier son enseignement). De même ces expériences ont peut-être permis de faire émerger une prise de conscience accrue de points d'appui, mobilisés d'habitude presque "automatiquement" pour enseigner, et dont l'absence, vue la distance, a exacerbé le besoin (comme le repérage et l'appui sur les activités mathématiques des élèves ou comme le rôle des consignes, parfois implicites en présentiel).

Nos hypothèses sur les pratiques et l'effet de l'enseignement à distance

Nous entendons par pratiques, tout ce qui pourrait avoir, selon nous, une influence sur les apprentissages des élèves en mathématiques :

- Le choix de tâches mathématiques : plus ou moins variées et complexes, donnant plus ou moins de sens aux connaissances mobilisées ;
- Les choix de contenus et de gestion des moments d'exposition des connaissances mathématiques, donnant une place plus ou moins explicite aux mathématiques enseignées, plus ou moins généralisées, et en appui plus ou moins grand sur les activités mathématiques développées par les élèves en amont ou en aval des moments où les contenus mathématiques enseignés sont présentés aux élèves, en particulier dans les exercices introductifs ;
- Les modalités de travail des élèves en classe et en dehors de la classe, avec des moments de travail individuel, en groupe ou collectif, éventuellement différenciés en fonction des besoins des élèves, des temps de recherche d'exercices, avec un étayage pour aider les élèves, et des responsabilités

variées pour les élèves, dans les phases de rappels, de recherche des exercices, de mise en commun des productions et de bilans ;

- L'évaluation des élèves, qu'elle soit formelle ou informelle, qui concerne à la fois la façon dont l'enseignant·e prend de l'information[1] sur ce que les élèves produisent, ou savent, et la façon dont ils ou elles exploitent cette information, en particulier pour permettre aux élèves d'apprendre, mais aussi pour rendre des comptes à l'institution, aux familles ou faire des retours aux élèves.

Nous considérons, en nous inscrivant dans le cadre de la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002), que pour décrire et interpréter les pratiques, ces deux composantes (*cognitive* pour les contenus mathématiques, *médiative* pour les déroulements en classe), doivent être complétées par des composantes des pratiques extérieures à la classe : *institutionnelle*, avec le respect des horaires et des programmes scolaires, *sociale*, avec le fait de travailler au milieu de collègues et devant des élèves, et enfin *personnelle*, avec la prise en compte du profil de l'enseignant. Sur ce dernier point en particulier, on peut penser que l'enseignement à distance sera plus ou moins contraignant selon les habitudes et aptitudes des enseignant·e·s concernant les moyens technologiques pour l'enseignement.

Selon cette grille d'analyse, nous faisons plusieurs hypothèses sur les pratiques en temps de confinement pour l'enseignement des mathématiques.

Les premières sont liées aux composantes cognitives et médiatives :

- Une probable simplification des tâches proposées aux élèves, faute de pouvoir organiser facilement des aides, faute de temps aussi peut-être, la mise à distance de l'enseignement ayant peut-être amené à réduire la durée des séances ;
- Une difficulté plus grande à organiser des moments de cours en interaction avec les élèves et leurs activités mathématiques, faute de pouvoir s'appuyer facilement sur une observation de ces activités ;
- Des modalités de travail en classe favorisant plutôt le collectif et l'individuel, faute de pouvoir techniquement faire travailler les élèves en groupe, avec des responsabilités modifiées pour les élèves (par exemple, en ce qui concerne la prise de parole, ou encore le fait de partager sa production) ;
- Des difficultés liées à l'évaluation des connaissances des élèves, qu'elle soit sommative (quels travaux pour remplacer les contrôles sur table en temps limité ?) ou formative (comment prendre de l'information sur ce que fait chaque élève, au fur et à mesure de la séance, pour pouvoir s'appuyer dessus, en particulier lors de moments de mise en commun[2] ?).

Nous faisons aussi l'hypothèse que ces pratiques, et leur façon d'évoluer face à ces nouvelles contraintes, seront très dépendantes du contexte dans lequel elles s'exercent : les moyens techniques à disposition, les collaborations possibles entre enseignant.es, les compétences TICE déjà là… Nous questionnons enfin la façon dont ces changements éventuels dans les pratiques ont, ou non, perduré après la reprise de l'enseignement en

[1] Selon la définition d'évaluer comme prise d'information, interprétation et exploitation de ce que les élèves font et savent (*cf* de Ketele et *al.*, 1997).

[2] Mise en commun dont nous pensons qu'elle peut jouer un rôle important dans les apprentissages des élèves, pour peu qu'elles permettent de s'appuyer sur ce que les élèves ont produit, pour faire émerger les connaissances mathématiques visées (Allard et *al.*, 2019).

présentiel : les prises de conscience liées en particulier aux besoins d'évaluations informelles, à la difficulté de ne pas pouvoir s'appuyer sur les productions des élèves, ont-elles amené une évolution durable des pratiques ? Ou bien le retour à la normale a-t-il amené les enseignant·e·s à reprendre leurs pratiques ordinaires ?

Dans l'atelier, nous avons interrogé les participant.es sur ce qui avait pu être source de difficulté pour les enseignant.es et ce qui avait pu changer, durablement ou non dans leurs pratiques.

Leurs réponses sont listées ci-dessous :

- Difficulté à avoir des retours des élèves pendant la séance
- Gestion du poids des retours variés des élèves (individuel à défaut du collectif)
- Difficultés liées au matériel, à la transmission de documents ou d'accession à des ressources
- Difficulté de gestion de l'effectif de la classe, du maintien de la cohésion du groupe classe
- Surcroît de travail
- Difficultés liées à l'inaccessibilité à certains élèves, à l'hétérogénéité accrue, à la précarité de certain·e·s

Les échanges avec les participant·e·s ont ensuite précisé ces réponses, et fait ressortir 4 grands types de difficultés, liées aux interactions avec les élèves/étudiants, à la dimension collective de l'enseignement, aux outils, et à la prise d'information sur le travail des élèves. On retrouve dans ces retours d'expérience des préoccupations liées à la question de l'évaluation (évaluer, avoir des retours, faire des retours) et des éléments liés au contexte (poids de ce qui s'ajoute au travail habituel des enseignant·e·s).

Un questionnaire sur les pratiques

Pour tenter de répondre plus largement à ces questions, nous avons proposé un questionnaire en ligne[3], que nous avons diffusé principalement à travers le réseau des IREM[4] entre début mars et fin mai 2022. Nous avons obtenu 75 réponses. Les participant.es à l'atelier ont pu travailler sur les graphiques proposés ci-dessous, pour dégager ce qui avait posé le plus de difficultés aux enseignant.es, et ce qui avait le plus évolué dans leurs pratiques.

Profil des répondant·e·s

En ce qui concerne l'expérience d'enseignement des répondant·e·s, on peut voir (figure 1) que ce sont pour moitié des enseignant.es qui ont plus de 20 ans d'expérience, et pour plus des trois quarts plus de 10 ans. Les débutants sont minoritaires. Ce sont principalement des enseignant·e·s du secondaire (figure 2).

[3] https://docs.google.com/forms/d/1cBldq7UT680hAXIjMX-aa7ZqqxHBbuRpruY9ENYA-wk/edit

[4] Ce qui nous amène à penser que les enseignant.es ayant répondu ne sont pas forcément représentatifs/ves des enseignant·e·s de mathématiques.

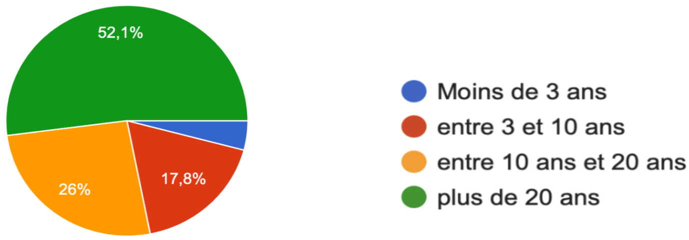


Figure 1. Expérience d'enseignement

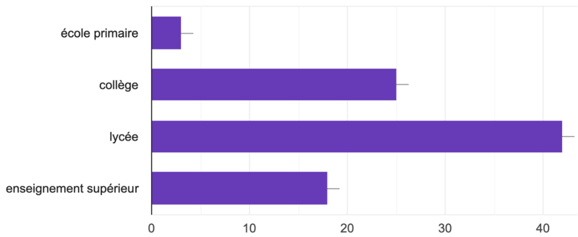


Figure 2. Niveaux d'enseignement

Nos questions sur les pratiques étant fortement inspirées par une transposition de la classe ordinaire à la classe virtuelle dans l'enseignement à distance, nous avons aussi demandé aux enseignant.es qui auraient choisi la modalité « classe virtuelle »[5], quelle proportion de leurs enseignements avaient été donnés sous cette forme. C'est la modalité choisie par plus de la moitié des répondant·e·s, celles et ceux ayant choisi de ne pas en faire étant minoritaires.

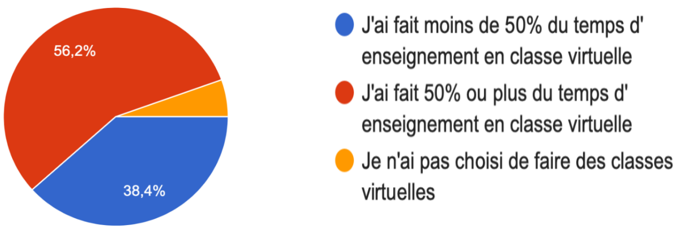


Figure 3. Proportion de classes virtuelles

Difficultés déclarées des enseignant·e·s

Les difficultés des enseignant·e·s ont été questionnées sur une échelle à 4 niveaux (non pas du tout / parfois / assez souvent / souvent), avec la possibilité de signaler aussi le fait que ces difficultés ne relèvent pas seulement de la modalité distancielle. L'ensemble des réponses sur ces difficultés sont données dans la figure 4.

[5] En essayant de ne pas pointer du doigt celles et ceux qui n'auraient pas fait ce choix !

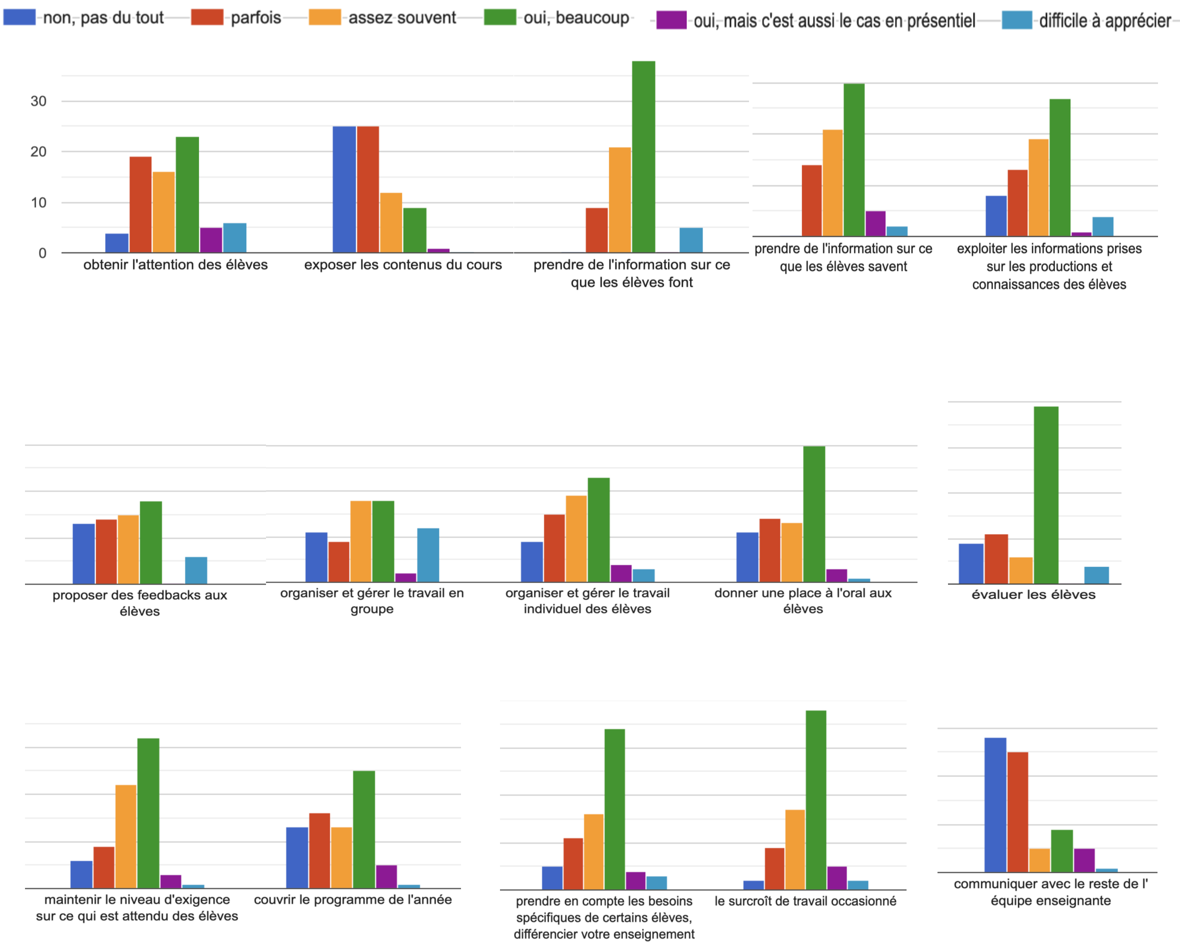


Figure 4. Difficultés des enseignant·e·s

La question de l'évaluation ressort ici aussi comme une difficulté avérée de façon assez unanime, non seulement à travers une question portant directement sur l'évaluation des élèves, mais aussi à travers celles relatives au recueil d'informations sur ce qu'ils font ou savent. Même chose a fortiori pour l'exploitation de ces informations. La mise en œuvre de la différenciation est elle aussi compliquée, ce qui n'est pas étonnant, tant du point de vue de la prise d'information sur les besoins de chaque élève, que sur celui de la gestion du travail de chacun en classe, même si ce dernier point n'est pas parmi ceux qui ont posé problème.

Les difficultés de maintien du niveau d'exigence des contenus proposés en mathématiques nous laissent penser que les exercices et cours proposés auront probablement perdu respectivement en complexité et généralité, bien que l'exposition des connaissances ne fasse visiblement pas partie de ce qui a posé problème.

Sur certaines de ces difficultés, les réponses sont plus variées (en lien avec l'attention des élèves, les feedbacks, la gestion des moments collectifs ou en groupe, et on peut penser que c'est fortement lié au contexte, et peut-être à l'aisance de travail de l'enseignant·e avec les outils numériques. Il faudrait pour cela approfondir les analyses en croisant les réponses apportées à ces différentes questions.

Des pratiques nouvelles ?

Nous avons questionné aussi les enseignant·e·s sur les pratiques mises en place pour l'enseignement à distance, soit comme des nouveautés, soit comme des renforcements, en interrogeant aussi le fait de prolonger ou non après la fin de l'enseignement à distance (figure 5).

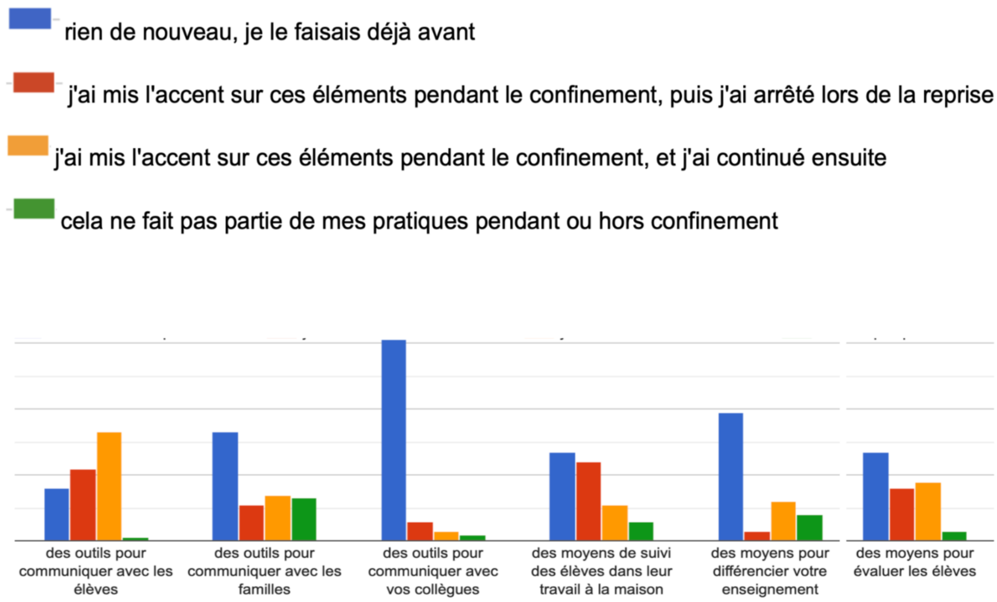


Figure 5. Pratiques mises en place

En termes d'outils et moyens, seule la communication avec les élèves semblent avoir été nettement accentuée de façon nouvelle, mais rien de particulier ne semble avoir été mis en place par la majorité des répondant.es en ce qui concerne l'évaluation des apprentissages ou la différenciation des enseignements, bien qu'elles posent un problème, d'après ce que nous avons vu précédemment. Il faut évidemment relier ces réponses aux marges de manœuvre des enseignant.es, probablement restreintes en temps de crise.

Nous avons ensuite questionné ce qui avait changé dans les pratiques, durablement ou non, sur plusieurs dimensions : les exercices et expositions de connaissances proposés aux élèves, les explicitations apportées, les modalités de travail en classe, l'évaluation, et les responsabilités données aux élèves.

Pour chacune de ces dimensions, nous avons proposé à nouveau 4 niveaux de réponse, prenant en compte ici aussi le fait que ces pratiques aient duré au-delà du confinement ou non (figure 6). On peut noter déjà ici une limite du questionnaire : en effet, pour les enseignant.es déclarant ne rien avoir changé, nous ne pouvons pas dire ce qu'ils et elles font !

Figure 6. Proposition de réponses sur les nouvelles pratiques

En ce qui concerne les exercices proposés aux élèves, on peut voir dans les pratiques déclarées (figure 7) que les exercices pour chercher ont laissé leur place à des exercices plus simples et moins nombreux, qu'on peut donc imaginer moins variés, ce qui signifie que pour les élèves il va falloir tirer parti d'un plus petit nombre d'occasions de s'entraîner ou de donner du sens aux notions visées, avec moins d'initiatives, ce qui, d'après nous, n'est pas favorable aux apprentissages de tous, et en particulier des élèves les plus fragiles en mathématiques. Un certain nombre d' enseignant·e·s déclarent que leurs choix d'exercices n'a pas changé pendant la classe à distance, et on peut remarquer que ces changements sur les exercices, quand il y en a eu, n'ont pas duré au-delà de la reprise des cours en présentiel.

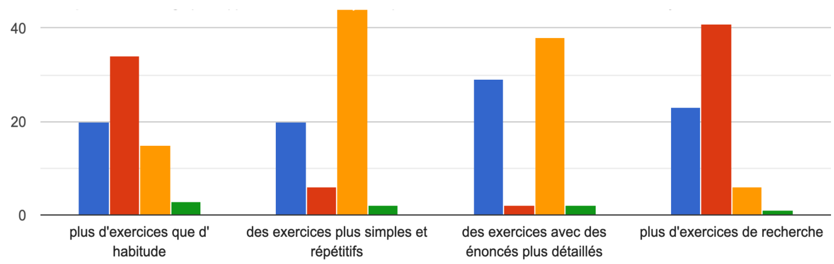


Figure 7. Exercices proposés aux élèves

Le cours est lui aussi influencé par ces nouvelles contraintes (figure 8) mais dans une moindre mesure par rapport aux exercices. Sa place diminue (ce qui, avec la diminution du nombre d'exercices, semble indiquer une place relativement faible), ses formats évoluent aussi probablement, avec une recrudescence de contenus trouvés sur internet, y compris après la reprise de la classe en présentiel pour certains enseignant.es. On peut noter tout de même qu'un certain nombre d'enseignant·e·s déclarent ne rien avoir changé dans leurs pratiques de cours, ce qui correspond peut-être au fait que cela ne fait pas partie de ce qui a posé le plus de problèmes dans ces circonstances.

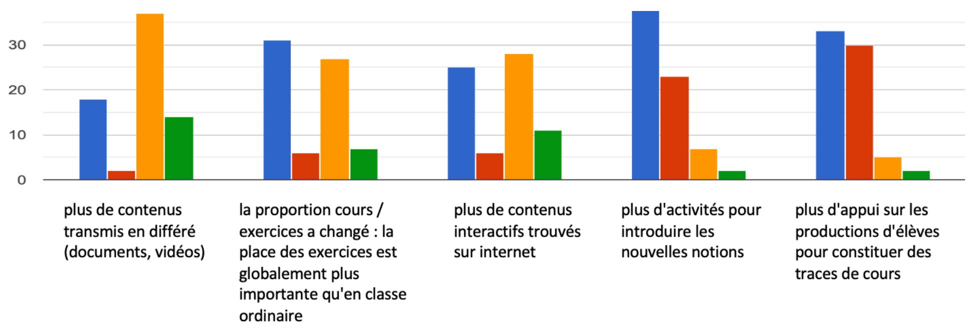


Figure 8. Moments de cours

Les modalités de travail proposées aux élèves sont, elles aussi, modifiées, avec une augmentation du travail individuel, au détriment des travaux de groupe ou même de moments collectifs, avec une individualisation des retours aux élèves, y compris en dehors des heures de cours (figure 9).

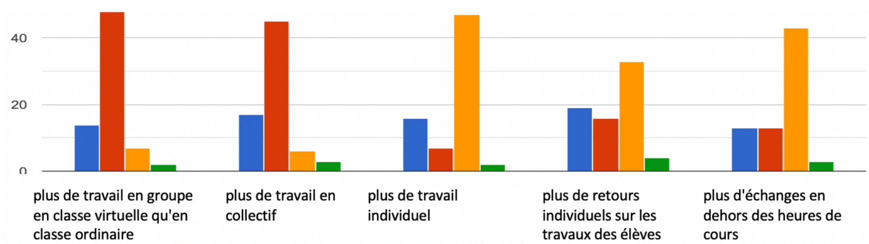


Figure 9. Modalités de travail proposées aux élèves

Pour les explicitations proposées aux élèves, on peut voir (figure 10) que les enseignant.es précisent plus les objectifs ou compétences visées qu'en classe ordinaire, et passent plus de temps sur les erreurs possibles (à défaut des erreurs repérables), et qu'une partie de celles et ceux qui ont fait évoluer leurs pratiques dans ce sens ont continué par la suite.

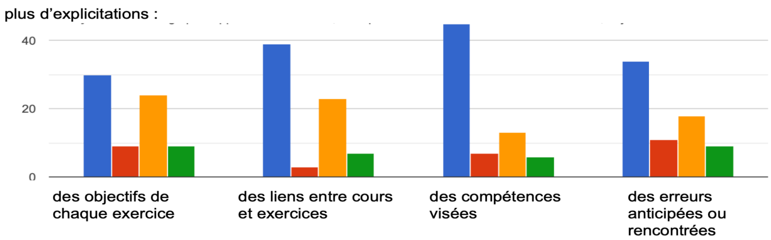


Figure 10. Explicitations proposées aux élèves

En ce qui concerne la question de l'évaluation, qui est celle qui a posé le plus de difficultés aux enseignant.es d'après leurs réponses au questionnaire, on peut voir (figure 11) globalement que les évaluations ont été pour beaucoup moins fréquentes et plus faciles, et dans un certain nombre de cas moins (ou en tout cas pas plus) différenciées, malgré les difficultés de gestion de l'hétérogénéité des élèves.

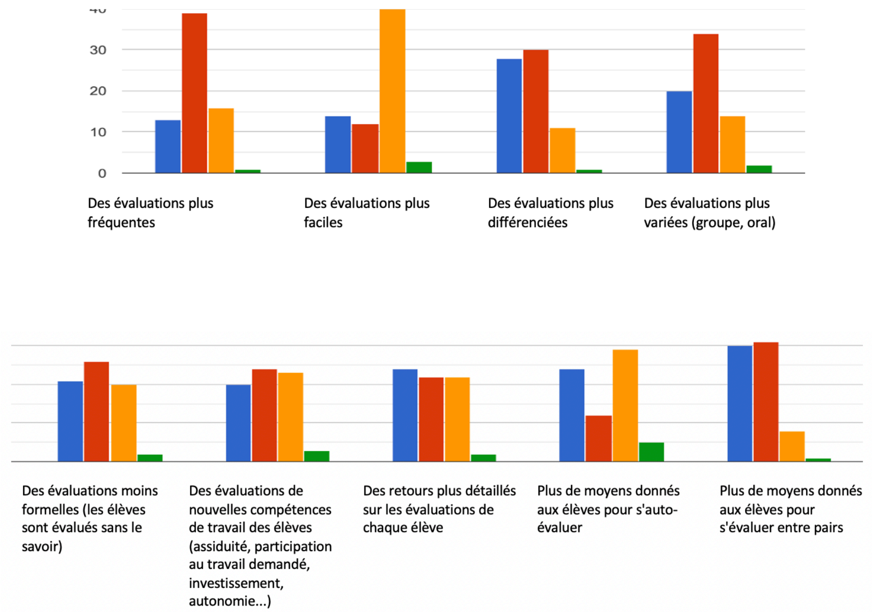


Figure 11. Evaluation des apprentissages des élèves

Le reste des réponses sur l'évaluation menée pendant l'enseignement à distance est assez hétérogène, avec souvent presque autant d'enseignant.es qui déclarent avoir modifié leurs pratiques que d'enseignant·e·s estimant ne pas l'avoir fait, en particulier sur le caractère plus ou moins formel de l'évaluation, sur les compétences nouvelles évaluées ou le détail des retours faits aux élèves. L'auto-évaluation des élèves a été proposée par un nombre accru d'enseignant·e·s, et même gardée après la reprise.

Enfin, en ce qui concerne le rôle donné aux élèves pendant cet enseignement des mathématiques à distance, on peut voir que les enseignant.es déclarent principalement ne rien avoir modifié dans leurs pratiques, si ce n'est le fait de donner plus d'occasions aux élèves de poser des questions, mais de façon inégale selon les classes. Certaines de ces pratiques ont perduré après la reprise chez quelques enseignant.es, mais le fait de faire commenter aux élèves les productions de leurs camarades ne semble pas faire partie des habitudes des enseignants, en temps de crise ou en dehors[6].

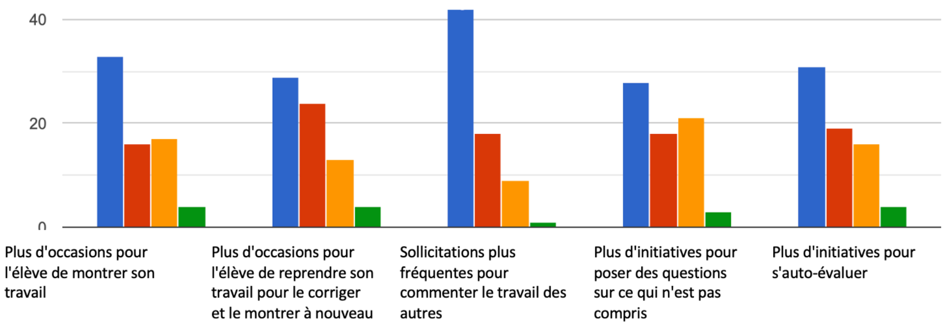


Figure 12. Rôles donnés aux élèves

Ces réponses semblent confirmer nos hypothèses sur l'appauvrissement des tâches proposées aux élèves, sur des modalités permettant moins une alternance entre collectif et individuel et ne promouvant pas le travail en groupe, et sur une évaluation qui peine à s'adapter à la situation, même pour des enseignant.es expérimenté.es, et ce malgré des difficultés déclarées pour récupérer de l'information sur les connaissances et activités des élèves, et pour les exploiter. C'est peut-être parce qu'il est compliqué de changer ses pratiques d'évaluation que la difficulté est d'autant plus grande, car celles-ci nous semblent relativement stables chez les enseignant.es (Pilet & Horoks, 2019).

Discussion

Quelques remarques évoquées par les participants de l'atelier à l'issue du travail sur les réponses au questionnaire ont permis d'en dégager les limites.

Tout d'abord la période n'est pas facile à délimiter. Même si, dans notre questionnaire, nous avions annoncé nous intéresser à l'enseignement à distance, tout le monde n'a pas mis en place les mêmes dispositifs au fil des différents confinements. De plus, comme signalé plus haut, dans les réponses données par les enseignant·e·s sur l'impact de l'enseignement à distance sur les pratiques, il est difficile de savoir si les pratiques annoncées étaient déjà mises en œuvre avant le confinement. Qu'est ce qui est nouveau ?

La question de l'évaluation (sommative et certificative) et de la note est souvent revenue sur le tapis dans les discussions lors de l'atelier, avec l'idée que pour certains élèves cela pouvait être assez douloureux, et compliqué pour les enseignant·e·s. Ici aussi, tout comme dans le questionnaire, l'évaluation semble être une entrée particulièrement pertinente dans l'analyse des pratiques et de leur développement, et un probable levier pour la formation. Il nous reste à trouver comment, à partir de ces retours d'expérience, penser des contenus et activités de formation qui donnent à voir l'importance de l'appui sur les activités mathématiques des élèves, à travers les difficultés éprouvées lorsqu'elles ces activités ne sont plus accessibles aux enseignant·e·s.

---

[6] Même si nous ne savons pas ce que font les enseignant.es qui disent ne pas avoir modifié leurs pratiques là-dessus.

Bibliographie

De Ketele, J. M., Gerard, F. M., & Roegiers, X. (1997). L'évaluation et l'observation scolaire : deux démarches complémentaires. *Éducations-Revue de diffusion des savoirs en éducation*, *12,* 33-37.

Pilet, J., Allard, C., & Horoks, J. (2019). Une entrée par l'évaluation des apprentissages pour analyser les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves dans les moments de mise en commun. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 121-139.

Pilet, J., & Horoks, J. (2019). Effets potentiels d'une évolution des pratiques enseignantes d'évaluation sur les apprentissages algébriques des élèves au collège. In M. Abboud (Ed.), Actes du Colloque EMF 2018 (p. 1030-1038). Paris : IREM de Paris.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 505-528.

EXPLOITER EN FORMATION UN EXTRAIT DU GUIDE « LA RESOLUTION DE PROBLEMES MATHEMATIQUES AU COLLEGE »

Annabelle FANIC, Sylvie GRAU

Résumé. Le guide « La résolution de problèmes mathématiques au collège » publié sur Éduscol en 2021 fait partie des ressources mises à disposition des professeurs de l'enseignement secondaire mais aussi de leurs formateurs et formatrices. Nous nous sommes donc questionnées sur la manière dont on pouvait penser l'utilisation de cette ressource en formation. Nous allons ici nous intéresser à un extrait proposant une situation « le grand défi (construire pour raisonner) » (p. 150) que nous avons expérimentée dans des classes de 4^e^.

Différentes ressources institutionnelles sont actuellement publiées, dont le guide « la résolution de problèmes mathématiques au collège »[1] (MEN, 2021) synthétisant des contributions de chercheurs, chercheures, d'inspecteurs, d'inspectrices, d'enseignants et d'enseignantes, ayant fait l'objet d'une relecture critique de membres du Conseil scientifique de l'éducation nationale. 213 pages pour ce guide, ce qui représente un effort de lecture et d'appropriation pour les enseignants et enseignantes en poste. Formatrices à l'INSPE de l'académie de Nantes, nous nous sommes naturellement posé la question de l'utilisation de ce guide en formation initiale, mais aussi continue. Nous avons donc proposé à un professeur de mathématiques de collège d'expérimenter une situation tirée de ce guide et nous avons cherché comment exploiter cette expérimentation en formation initiale. L'idée était d'avoir des données sur la réalisation effective de séances inspirées par les propositions du guide afin d'identifier les apports de la ressource et les points de vigilance à avoir pour sa mise en œuvre.

L'atelier a proposé aux participants et participantes l'analyse des différentes étapes du dispositif et mis en discussion les nombreuses questions que posent ce type de ressource au sein de l'institution, mais aussi à la communauté des chercheurs et chercheures en didactique des mathématiques. Il a permis de tester et discuter de dispositifs de formation et de l'impact des choix de formation sur les pratiques des futurs enseignants et enseignantes de mathématiques du second degré (Choquet & Grau, 2021).

Le choix de la situation

Le guide précise qu'il « s'adresse aux professeurs de l'enseignement secondaire, mais aussi aux professeurs de l'école primaire et à leurs formateurs » (MEN, 2021). Ainsi nous avons pu constater une injonction forte des membres de l'inspection du premier degré à utiliser les guides et une focalisation sur les situations proposées comme étant de « bonnes situations ». En effet, il est précisé que :

> […] des exercices ont été analysés systématiquement sous le même angle : pourquoi proposer ce genre de problèmes en classe, quels en sont les ressorts de continuité ou de

[1] https://eduscol.education.fr/document/13132/download

> progressivité, mais surtout quelles stratégies d'enseignement mettre en place concrètement ? Les analyses faites n'ont pas la prétention d'être exhaustives et les professeurs – dans le cadre des formations entre pairs – pourront avantageusement les compléter ». (MEN, 2021, p. 8).

Il nous semblait donc intéressant de voir comment cette analyse permettait ou non à un enseignant ou une enseignante de collège de proposer l'activité dans sa classe et de voir comment il ou elle l'analysait. En outre, le guide rappelle que la résolution de problème peut intervenir à différents moments de l'apprentissage, sa fonction est alors différente et l'enseignant ou l'enseignante doit aménager étayages, explicitations, institutionnalisation en lien avec son projet d'enseignement. Ce cadre correspond à un axe de travail important avec les étudiants et étudiantes de master MEEF, à savoir la déconstruction d'une représentation très répandue qu'un problème ne peut être posé qu'après l'enseignement des outils, concepts et méthodes qui permettent de le résoudre, un autre axe de travail étant de penser le processus d'institutionnalisation. La résolution d'un problème mobilisant de très nombreuses compétences et connaissances mathématiques, les enseignants et enseignantes ont parfois du mal à isoler ce qui doit figurer dans une trace écrite exploitable afin d'identifier « des stratégies transférables ou des propriétés pertinentes » (*Ibid*., p.12).

Pour rester dans la thématique des journées CORFEM 2022, nous nous sommes naturellement orientées vers le chapitre 5 qui aborde les problèmes de géométrie et plus particulièrement vers le problème 4 (*Ibid*., p. 150) intitulé « le grand défi (construire pour raisonner) » (voir l'énoncé en annexe 1). « Les problèmes de ce chapitre illustrent des situations où ce qui est visible n'est pas suffisant pour raisonner juste ; il faut donc aussi imaginer et abstraire. » Nous sommes donc dans la perspective de rendre nécessaire le passage du paradigme G1 – géométrie perceptive, descriptive et instrumentée – au paradigme G2 – géométrie du raisonnement (Houdement, 2007; Rouquès et *al*., 2019) – ce que nous appelons dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (désormais CAP) un changement de registre explicatif (désormais REX). Le REX est considéré comme le cadre dans lequel l'élève pose, construit et résout un problème, ce cadre pouvant être, comme ici, associé à un domaine spécifique des mathématiques (un cadre mathématique au sens de Douady), à un paradigme dans un cadre mathématique précis (comme les paradigmes en géométrie) ou encore à un point de vue spécifique. La situation doit amener les élèves à construire des nécessités amenant à une évolution du REX (Hersant, 2022). Enfin le guide met en évidence une dialectique entre construire et raisonner. La construction peut étayer le raisonnement, mais le raisonnement peut aussi être un préalable nécessaire à la construction. Le problème que nous avons choisi doit amener à construire pour raisonner. La construction géométrique doit amener à poser, construire et résoudre un problème allant vers la preuve. Il s'agit non seulement de produire une construction valide mais aussi les éléments permettant d'expliquer et de valider la construction et sa procédure.

Ce problème a été proposé à des étudiants et étudiantes de M2 MEEF premier degré par Annabelle, formatrice et co-autrice de ce texte, dans la perspective de (re)construire ou consolider leurs connaissances en géométrie plane et travailler sur le raisonnement. Face aux difficultés rencontrées par les étudiants et étudiantes, nous étions curieuses de voir son exploitation au collège par un enseignant ayant déjà de l'expérience et de croiser les analyses avec une chercheure. Ainsi, un enseignant, Claude, a accepté d'expérimenter la situation dans sa classe de 4^{e} et nous avons mené des temps d'analyse en amont, entre les séances et à la fin de l'activité pour croiser trois points de vue, celui de l'enseignant, celui de la formatrice, celui de la chercheure.

Analyse *a priori* et scénario

La première étape est l'analyse *a priori* de la situation. Nous avons proposé aux membres de l'atelier les deux pages de commentaires du guide, ainsi que la grille que nous donnons à nos étudiants et étudiantes en MEEF premier et second degrés pour faire une analyse *a priori*. Cette grille n'est pas donnée immédiatement, elle vient après des apports sur la théorie des situations didactique (TSD) (Brousseau, 2011) et des mises en œuvre collectives. Elle doit ensuite leur permettre l'analyse des situations qu'ils proposent en classe pour mesurer l'écart entre le prévu et le réalisé à partir de l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. C'est l'écart qui donne du sens à l'analyse *a priori* qui sinon peut rester pour les étudiants et étudiantes une simple tâche à exécuter dans le cadre de la formation (voir Annexe 2).

Dans l'atelier, il a été demandé de mener cette analyse à partir de la grille et ensuite d'échanger sur l'outil, les supports proposés en formation, les points de vigilance à avoir, l'adaptation en M1. Tout d'abord chacun a cherché à résoudre le problème, ce qui semble être un automatisme que n'ont pas tous les étudiants et étudiantes de master MEEF. La situation est suffisamment ouverte pour que, dans les groupes de quatre, des représentations différentes du problème et des procédures différentes émergent. Il s'avère effectivement que mener cette analyse seul ne permet pas d'anticiper tous les possibles, d'où la difficulté pour nos étudiants et étudiantes d'anticiper l'activité des élèves. Même pour des étudiants et étudiantes expérimentés, il s'avère que la démonstration n'est pas immédiate et que la question est alors de savoir comment faire émerger, pour les élèves, des pistes de démonstration à partir du tracé, sans dévoiler le raisonnement.

Dans le CAP, nous considérons que problématiser suppose de poser, construire et résoudre un problème. Poser le problème, c'est déjà l'identifier, comprendre qu'il y a un problème. Ici comment trouver un moyen rapide de placer précisément le point J. Construire le problème consiste à identifier les faits et les confronter aux idées. On parle aussi de données et de conditions, les données étant les contraintes du problème et les conditions les contraintes internes au sujet (ce qu'il sait, se représente, s'imagine, son expérience, les théories qu'il connaît…). Ces contraintes internes font que deux personnes ne vont pas toujours construire le même problème. La résolution du problème est donc en lien avec sa construction et peut être différente entre les élèves d'une même classe. Notre hypothèse est que l'enseignant doit veiller à une construction commune du problème pour que les élèves puissent tirer des enseignements de la résolution. Ici, deux problèmes peuvent être construits, celui de la construction géométrique et celui de la démonstration : Comment c'est vrai. Pourquoi c'est vrai.

Du point de vue de la ressource, la lecture du document n'apporte en réalité que peu d'éléments pour faire l'analyse *a priori* de la situation. Les indications données sont plutôt orientées vers l'aide à la scénarisation : mettre les élèves en groupe, dans un climat de confiance les autorisant à prendre des initiatives, motiver par des défis, stimuler par une vérification rapide par le professeur, inciter les élèves à coder. Il est précisé que la situation peut être donnée en 5^{e}, une fois les propriétés du parallélogramme connues. Quelques éléments sont présents dans la partie « stratégies d'enseignement ». Dans ce chapitre sont évoquées des variables didactiques : figure, support quadrillé ou non, logiciel de géométrie, mais aussi certaines difficultés et certains obstacles : prendre l'initiative de placer un point, coder la figure, extraire des sous-figures. Par contre l'étonnement des élèves devant la conjecture, supposé être le moteur de la preuve, semble incontestable. On peut s'interroger sur le rôle du contrat didactique qui n'est pas explicitement précisé.

Enfin la question de l'institutionnalisation amène à distinguer deux étapes, celle de l'institutionnalisation de la construction du problème et celle de sa résolution. Il en sort la nécessité de prévoir des temps réflexifs et des étayages. Ni l'un ni l'autre ne sont précisés dans la ressource même si l'étayage est évoqué à plusieurs reprises sans que soit précisée la manière d'étayer.

Ce temps d'atelier a d'abord montré les limites de la ressource et les écarts entre les commentaires du guide et les attendus en formation :

- Le problème n'est pas résolu et les procédures ne sont pas détaillées, il peut être difficile pour un étudiant, et même pour un enseignant de collège, d'anticiper la manière dont les élèves vont construire le problème.
- Les variables didactiques sont évoquées mais pas clairement explicitées amenant à des choix pour la mise en œuvre qui peuvent modifier la construction du problème.
- Le guide ne présente pas une analyse *a priori* permettant de comprendre le sens et la fonction de cette analyse.

Les choix pour la mise en œuvre et les productions des élèves

Avant la mise en œuvre, la formatrice et l'enseignant se sont vus pour fixer la préparation de la séance. La séance sera menée en classe de 4^{e}. En fin d'année scolaire, les élèves ont mené des raisonnements dans le cadre du travail sur le théorème de Pythagore, ils n'ont pas travaillé sur des problèmes de raisonnement s'appuyant sur les connaissances liées aux parallélogrammes. Les élèves ont l'habitude de travailler en groupe, constitués au hasard.

Claude n'a pas rédigé de document de préparation, mais il a anticipé les documents pour les élèves et la consigne.

Il a reformulé l'énoncé :

> Chaque figure doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :
> * I, C et D sont trois points tels que le point I est le milieu des segments [AC] et [BD] ;
> * E est le point tel que le point A est le milieu du segment [DE] ;
> * le point J est le milieu du segment [CE].
> Il faut placer le point J sur toutes les figures.
> Répartissez-vous les figures à compléter.

Il ne donne pas d'enjeu de rapidité, ni de précision, contrairement à ce qui est proposé dans la ressource.

Comme indiqué dans la ressource, Claude prévoit de proposer plusieurs figures (figure 1) par groupes de 4 élèves : il en donne 5 pour leur laisser le choix éventuellement de changer ou d'en laisser une de côté. Il choisit de faire des tracés sur papier quadrillé pour éviter les difficultés de construction avec les instruments.

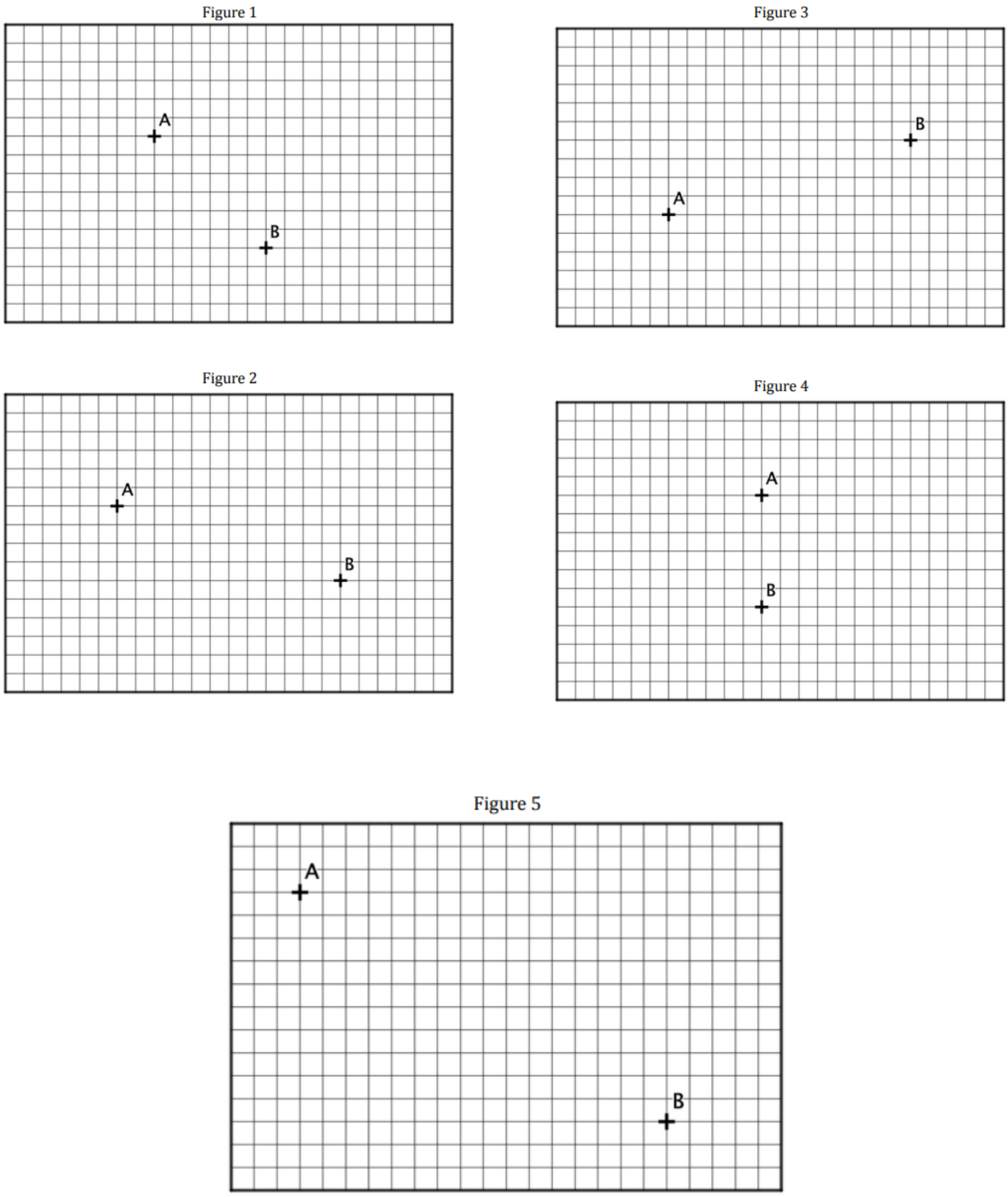


Figure 1. Les figures distribuées

La séance est menée en présence de la formatrice qui note les échanges qui ont lieu dans un groupe et lors des plénières et qui prend des photos des productions des élèves.

Comment rebondir à partir des productions des élèves lors de la première séance ?

A l'issue de l'expérimentation dans deux classes de 4^{e}, un temps d'analyse est prévu avec l'enseignant, la formatrice et la chercheure. Les premières constructions des élèves sont en annexe 3. Lors de cette première séance, dans les deux classes, les élèves ont fait des essais de construction, expliqué leur construction, essayé de comprendre les explications des autres élèves. Les procédures sont parfois différentes de celles envisagées (« je fais deux segments et après j'essaye. »). La difficulté est essentiellement de démarrer la construction, mais dans l'une des classes, la réalisation n'est pas terminée à la fin de la séance. L'enseignant exprime une difficulté pour prendre des informations, intervenir en tenant compte de la diversité des élèves et des productions. Dans la première classe, il fait une pause réflexive – mise en commun des procédures et des idées − au bout de 20 min à partir de productions d'élèves. C'est l'enseignant qui amène les élèves à émettre une conjecture, il affirme qu'elle est vraie puis demande de réfléchir à des explications. Dans la seconde classe il fait une pause au bout de 40 min. Plusieurs groupes n'ont réussi aucune construction, l'enseignant guide les échanges pour qu'une conjecture soit formulée. Nous sommes donc très loin de « l'étonnement devant la conjecture » annoncée par la ressource institutionnelle. La mise en commun à l'issue d'une recherche, qu'elle soit individuelle ou collective, reste toujours problématique (Grau, 2018) et cette question est peu travaillée en formation initiale. Le nouveau défi est de construire la suite de l'activité ; comment penser un dispositif de formation autour de ce défi ?

A partir de ces productions, il faut envisager la suite du travail.

Nous proposons aux membres de l'atelier, répartis en cinq groupes de quatre, d'envisager le rebond à partir de productions d'élèves suivant différentes modalités :

- Au groupe A, il est demandé, à partir des productions du document A, qui figure en annexe 4, d'imaginer la suite de la séance.
- Au groupe B, la consigne est donnée de faire une analyse *a priori* de la 2ème séance construite à partir de document B, comportant des productions à classer (voir en annexe 5).
- Au groupe C, il est demandé de faire une analyse *a priori* du document C, qui figure en annexe 6, qui contient une fiche « preuve ».
- Au groupe D, il est demandé, à partir de la figuration (support reprenant des productions anonymes et introduisant certains éléments ostensifs), de faire une analyse *a priori* (document D en annexe 7). Que peuvent dire les élèves de ces productions ? Quelles vérifications peuvent-ils faire ? Quels arguments peuvent-ils échanger ?
- Au groupe E, la consigne est donnée d'analyser le processus d'institutionnalisation, à partir du verbatim, donné dans le document E, en annexe 8.

L'objectif est d'analyser ce que chaque modalité peut amener comme conditions dans le cadre de la formation initiale en master MEEF mathématiques second degré et quels savoirs peuvent être mis en évidence pour les étudiants et les étudiantes.

Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'approfondir le travail, mais certaines modalités ont été critiquées, ceci amenant des éléments de discussion.

Eléments de discussion à propos du document A (voir annexe 4)

Comment sélectionner les productions des élèves ? Le choix des productions doit amener la mise en évidence d'indices permettant de structurer le raisonnement. Ici le problème principal est de voir les sous-figures permettant de travailler successivement dans différents parallélogrammes. L'utilisation du parallélogramme pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment n'est pas disponible pour de nombreux élèves. La situation peut être utile pour introduire ce type de démonstration. La production de l'élève D est particulièrement intéressante puisqu'elle introduit le dessin à main levée comme outil pour mener un raisonnement inductif à partir de la construction réalisée. Le codage est nécessaire du fait que le tracé est à main levée, faisant apparaître les propriétés des figures et sous-figures. Il est aussi intéressant de voir que certains élèves tracent les segments et d'autres non, ce qui les amène à travailler dans des dimensions différentes. Cela permet aussi de mettre en évidence que les côtés des figures 2D ne sont pas tracées, le parallélogramme est caractérisé par ses diagonales, ce qui ne permet pas une reconnaissance perceptive aussi immédiate que lorsqu'il est caractérisé par ses côtés parallèles deux à deux. Ces productions peuvent donc amener à débattre des procédures pour réussir le tracé et ainsi permettre à tous les élèves de faire un tracé correct pour l'étape suivante.

Eléments de discussion à partir du document B (voir en annexe 5)

La tâche de « classement » est intéressante pour mettre en évidence les représentations des élèves. Quels critères mettent-ils en avant ? L'activité peut être l'occasion de spécifier les critères qui permettent d'accéder à la preuve. La difficulté est cependant d'induire des classements efficients chez les élèves qui sont très éloignés des critères attendus d'autant que ce type de tâche n'est pas habituel. Ici la question n'est pas de savoir ce qui est juste ou faux puisque toutes les productions ont été validées. Le classement peut alors se faire en fonction des objets dont il est question, en fonction des registres sémiotiques utilisés, ou en fonction de l'information qui est mise en avant ou encore de sa fonction. Il est difficile d'anticiper ce que les élèves vont produire mais la mise en commun doit permettre de discuter de la formalisation d'un même fait dans différents registres (codage du milieu d'un segment, langage naturel, écritures mathématiques) et d'amener l'idée de propriété caractéristique.

Eléments de discussion à partir du document C (voir en annexe 6)

Le fait de proposer une figure à main levée amène la nécessité de formaliser les propriétés et non plus à se contenter de « voir » sur la figure. La structure du document doit amener les élèves à identifier les faits (informations écrites, codées, données dans le texte de l'exercice), de citer les propriétés du cours (énoncé tiers), et de donner la nouvelle affirmation qu'on peut en déduire. Les propriétés sont schématisées avec des flèches pour décomposer les équivalences en deux implications. L'étape 3 amène la rédaction d'une démonstration. Cette étape permet de différencier le raisonnement (recherche et production d'une preuve par la mise en relation des idées et des faits en prenant comme référence des définitions, propriétés, théorèmes etc.) et la démonstration (formalisation structurée sous forme déductive et rédigée d'un texte tenant compte des conventions d'écriture). Une partie de la rédaction est prise en charge par le document, l'élève n'a que la responsabilité de compléter avec les tableaux précédents. La fin est laissée à la responsabilité de l'élève. Ici la mise en œuvre et le contrat didactique sont décisifs. Le risque étant que l'élève se contente de compléter les cases sans donner de sens à l'activité. C'est bien le discours et l'étayage, la validation par l'enseignant et le processus d'institutionnalisation mis en place qui peuvent amener l'élève à tirer de cette activité des éléments pour construire seul une démonstration dans un nouveau contexte.

Eléments de discussion à partir du document D (voir en annexe 7)

Que faut-il mettre en débat dans la classe : la validation ou l'explication ? En clair, la question du vrai ou faux est-elle toujours pertinente pour amener les élèves à comprendre pourquoi c'est vrai ? Dans le CAP, la construction du problème prime sur sa résolution, et ce sont les nécessités construites qui sont à la base du processus d'institutionnalisation. Les nécessités sur les objets mathématiques amènent à construire un savoir apodictique. Ici les arguments sont des explications données par les élèves, la tâche est de les classer suivant que les faits sont lus dans l'énoncé, issus de définitions ou issus d'un raisonnement à partir de propriétés. C'est une tâche inhabituelle qui doit amener les élèves à critiquer les productions des autres élèves et au statut de la preuve en mathématique. Cette activité peut être l'occasion de préciser le statut des arguments suivant qu'on cherche une piste (raisonnement inductif), qu'on veut convaincre (mais on peut être convaincu par un argument d'autorité) ou qu'on veut démontrer.

Eléments de discussion à partir du document E (voir en annexe 8)

Les notes prises lors de la mise en commun dans la classe de Claude permettent de bénéficier d'un verbatim dans lequel il est possible d'analyser le processus d'institutionnalisation. Ce support peut être l'occasion avec des étudiants de mesurer l'écart entre ce que les élèves ont produit, ce que l'enseignant veut formaliser et le savoir mathématique. L'utilisation du mot « malentendu » peut être l'occasion d'une approche des « registres pour apprendre » tels que les définit Rayou (Rayou, 2020).

Quelques pistes pour la formation en complément de l'atelier

Différents paradigmes en géométrie

Résoudre un problème de géométrie, quel qu'il soit, conduit à produire une figure mentalement ou matériellement (Bulf & Celi, 2016). La construction de figures planes peut être considérée comme une classe de problèmes. Il s'agit de construire une figure à partir d'informations qui peuvent être : une description (écrite ou orale), un schéma codé, éventuellement complété par une description – par exemple pour désigner des parallèles car, en France, nous n'avons pas de codage pour l'indiquer explicitement sur le schéma − ou un programme de construction.

Ici le problème posé est donc de trouver comment construire la figure. La solution pourrait relever d'une technique, mais il n'existe pas une technique générale immédiatement transférable, elle doit être adaptée au modèle. Par contre, ce qui peut être transférable, c'est la manière de construire les faits permettant de choisir ou adapter des techniques déjà rencontrées. En quoi cette factualisation est-elle spécifique à la géométrie et plus particulièrement aux problèmes de construction de figure ? En fonction du support (quadrillé ou non), de l'emplacement des points sur la feuille, de l'aisance et de la familiarité que l'élève peut avoir avec certaines techniques, chaque élève va construire un problème différent qui peut se schématiser dans le losange de problématisation par le schéma 1 (figure 2).

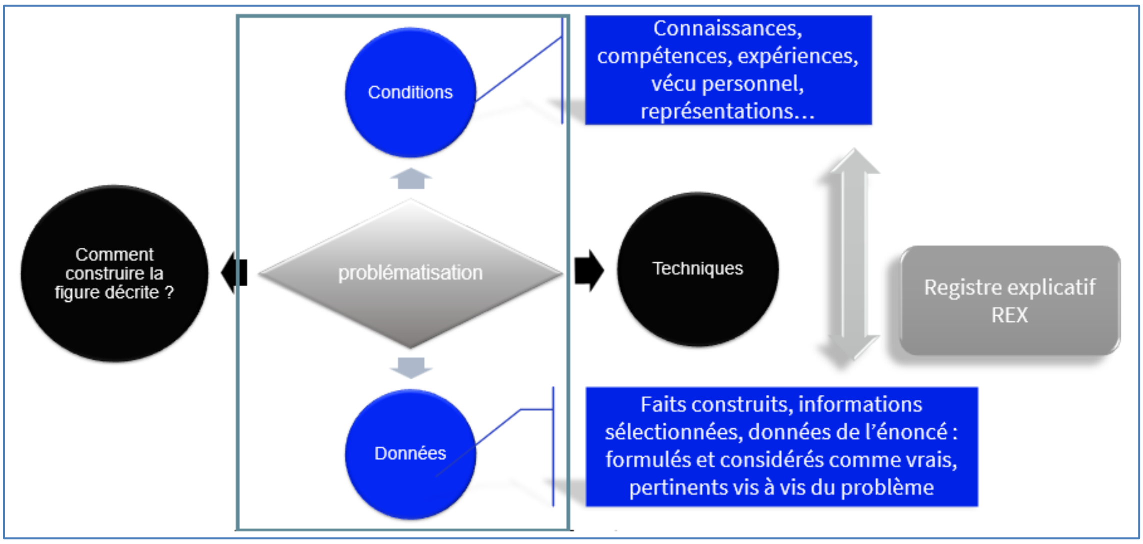


Figure 2. Losange de problématisation du problème 1

Un deuxième problème se pose ensuite, il s'agit d'un problème explicatif et non plus d'un problème de construction (voir le schéma 2, figure 3)) : pourquoi J est-il le milieu de $[AB]$?

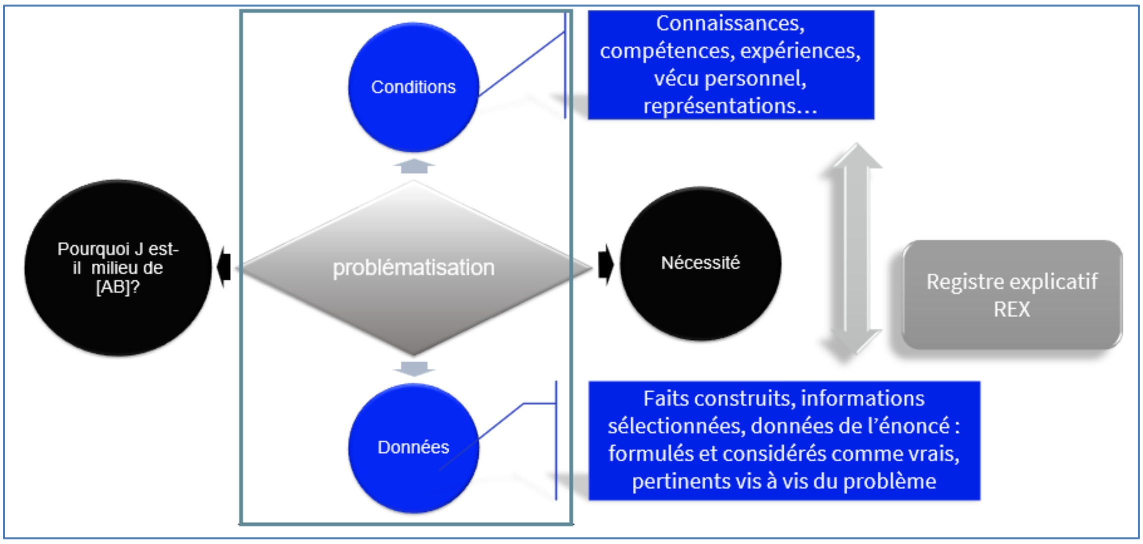


Figure 3. Losange de problématisation du problème 2

Ce nouveau problème amène à formaliser des nécessités – pourquoi le point J est-il au milieu de $[AB]$ et pourquoi il ne peut pas être ailleurs ? – qui vont prendre le statut de nouveau fait pour des résolutions ultérieures.

Le CAP s'intéresse aux registres explicatifs (REX) mobilisés par les élèves pour mettre en évidence des changements de REX considérés comme des indices d'un apprentissage.

La construction de faits en géométrie dépend du paradigme dans lequel on travaille. Houdement et Kuzniak (2006) en définissent trois. Le paradigme qu'ils appellent G1 est celui de la géométrie naturelle, c'est une géométrie dans laquelle la validation se fait par le sensible, la réalité, la perception. Ainsi ici je vois un carré. Cela suppose la connaissance de formes qui permettent une reconnaissance automatique facilitée par certaines caractéristiques de ces formes comme ici le fait que les côtés sont de même longueur, qu'on peut le poser sur n'importe quel côté, on verra toujours la même forme, qu'on peut le plier suivant ses diagonales et que l'on a superposition etc. Le carré est la forme la plus vite connue et reconnue par les élèves. Elle peut être celle sur laquelle vont s'appuyer les premiers éléments de la géométrie G2 qui est celle de l'axiomatique dite naturelle. Dans le paradigme G2, la validation se fait par des lois hypothéticodéductives dans un système axiomatique mais ces axiomes ne sont pas détachés de la réalité, il s'agit ici de la géométrie euclidienne constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. Ainsi sur le dessin, je peux reconnaître un carré non pas par sa forme mais par l'interprétation que je fais du codage qui m'indique qu'il s'agit d'un quadrilatère dont les 4 côtés mesurent 3 cm et dont les 4 angles sont droits.

Si ces deux géométries se distinguent clairement par la nature des objets étudiés, elles ne s'excluent pour autant pas l'une l'autre, au contraire elles se complètent :

- la construction d'une figure complexe (question de géométrie dessinée) peut donner lieu à des raisonnements sur des figures abstraites (incursion en géométrie abstraite) avant de revenir au dessin ;
- pour résoudre une question concernant un objet abstrait, un élève peut commencer par faire une figure qui lui permettra de faire une conjecture (géométrie dessinée) puis effectuer des déductions (phrases ou calculs) à partir de ce qui est connu, seuls arguments acceptables en géométrie abstraite.

Un troisième paradigme est celui de la géométrie « axiomatique formaliste » G3 dans laquelle la validation se fait par un raisonnement logique basé sur une axiomatique complètement détachée de la réalité perceptible. Pour Wittgenstein, cette géométrie non euclidienne peut ne contenir aucune vérité (During, 2005). Le raisonnement logique prime sur le sensible dans une complétude du système d'axiomes (l'axiomatisation n'est plus partielle). Par exemple, le dessin ci-dessous représente un carré en géométrie hyperbolique. Il n'est pas possible de reconnaître le carré de G1 de manière perceptible sur ce dessin.

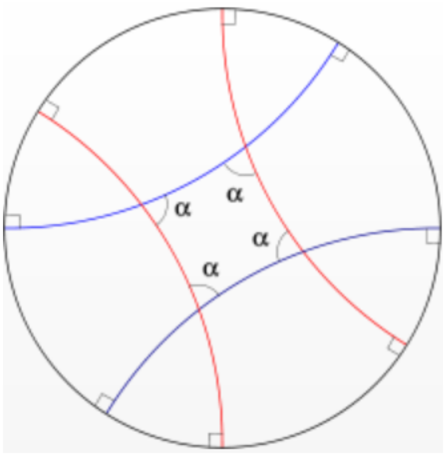


Figure 4. Représentation d'un carré en géométrie hyperbolique

Les travaux québécois de Tanguay apportent une nouvelle nuance en s'intéressant au rôle de la mesure dans le passage d'une géométrie perceptible qu'il dit intuitive à la géométrie déductible. Il définit alors un chainon manquant : la géométrie instrumentée qui consiste à construire et mesurer à l'aide d'instruments (Tanguay & Geeraerts, 2012).

Ainsi on peut définir un premier paradigme G0 dans lequel la perception est le seul moyen de factualiser. Et déjà dans ce paradigme, on peut définir différents niveaux d'abstraction (Fernandes & Vinter, 2009). Au niveau « archéologique », les tâches de manipulation permettent d'isoler des propriétés perceptives des objets afin de les reconnaître, la reconnaissance est globale. Par ailleurs la géométrie sur les représentations physiques ou mentales de l'objet − la reconnaissance est toujours liée à l'objet matériel mais cet objet est absent, il est évoqué ou représenté par ce qu'on appelle une image concept qui embarque toute la connaissance que l'élève a de l'objet − est le niveau « photographique ». Enfin le niveau « scénographique » correspond à un niveau ou l'élève est capable de faire une analyse des objets photographiés pour en identifier la structure et la composition et ainsi imaginer leurs caractéristiques, leur transformation, leurs interactions dans l'espace. Les images concepts ne sont plus statiques, elles peuvent alors amener l'élève à anticiper par déplacement mental, à imaginer différents points de vue. Le passage d'un niveau à l'autre est très lié au type de tâche demandé.

Reproduire une image constituée de pièces de tangram si l'image reste visible maintient l'élève au niveau archéologique ; si le modèle n'est exposé qu'un court instant, l'élève est contraint de travailler au niveau photographique ; si maintenant on donne uniquement le contour externe de l'image, l'élève va devoir opérer des transformations mentales pour imaginer la manière dont les différentes pièces peuvent le constituer.

La difficulté est d'amener les élèves à passer d'un paradigme à l'autre, certains obstacles étant extrêmement difficiles à franchir. Prenons l'exemple du cercle. Au cycle 1, les élèves vont reconnaître le cercle visuellement mais aussi par le toucher par sa caractéristique « il n'a pas de pique », « c'est rond », « il n'y a pas de côtés droits ». En fait ce que perçoit l'élève à ce stade c'est une ligne fermée dont la courbure est constante. Au cycle 2 est introduit un instrument, le compas, qui porte en lui les caractéristiques du cercle avec la pointe qui matérialise le centre et l'écartement du compas qui matérialise le rayon. Les élèves utilisent le compas pour tracer des cercles mais ne perçoivent pas réellement leurs caractéristiques, ils perçoivent surtout la forme obtenue. C'est au cycle 3 que les choses se précisent avec la définition du cercle comme l'ensemble des points équidistants de son centre. Ensuite au lycée, le cercle sera défini de manière formelle par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où le point de coordonnées $(a ; b)$ est le centre et R le rayon. Cet exemple illustre bien le chemin inverse que doivent effectuer les futurs enseignants pour repenser la construction des objets géométriques à partir de la géométrie perceptive, et en particulier pour penser la définition de ces objets dans une axiomatique cohérente. C'est pourquoi il peut être très utile de travailler ces paradigmes en formation des enseignants (Parzysz, 2006).

Reproduire une image constituée de pièces de tangram si l'image reste visible maintient l'élève au niveau archéologique ; si le modèle n'est exposé qu'un court instant, l'élève est contraint de travailler au niveau photographique ; si maintenant on donne uniquement le contour externe de l'image, l'élève va devoir opérer des transformations mentales pour imaginer la manière dont les différentes pièces peuvent le constituer.

La difficulté est d'amener les élèves à passer d'un paradigme à l'autre, certains obstacles étant extrêmement difficiles à franchir. Prenons l'exemple du cercle. Au cycle 1, les élèves vont reconnaître le cercle visuellement mais aussi par le toucher par sa caractéristique « il n'a pas de pique », « c'est rond », « il n'y a pas de côtés droits ». En fait ce que perçoit l'élève à ce stade c'est une ligne fermée dont la courbure est constante. Au cycle 2 est introduit un instrument, le compas, qui porte en lui les caractéristiques du

cercle avec la pointe qui matérialise le centre et l'écartement du compas qui matérialise le rayon. Les élèves utilisent le compas pour tracer des cercles mais ne perçoivent pas réellement leurs caractéristiques, ils perçoivent surtout la forme obtenue. C'est au cycle 3 que les choses se précisent avec la définition du cercle comme l'ensemble des points équidistants de son centre. Ensuite au lycée, le cercle sera défini de manière formelle par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$ est le centre et R le rayon. Cet exemple illustre bien le chemin inverse que doivent effectuer les futurs enseignants pour repenser la construction des objets géométriques à partir de la géométrie perceptive, et en particulier pour penser la définition de ces objets dans une axiomatique cohérente. C'est pourquoi il peut être très utile de travailler ces paradigmes en formation des enseignants (Parzysz, 2006).

Conditions du passage de G1 à G2

Duval s'est intéressé aux conditions de passage de la géométrie G1 à la géométrie G2 (Duval & Godin, 2005). Il explique qu'il s'agit de développer une vision non iconique et que ce développement nécessite trois compétences :

- La division méréologique (de méréologie : la science des parties) consiste à voir un dessin comme un assemblage, une juxtaposition, une superposition de figures. Pour le modèle proposé tout à l'heure, on peut le regarder comme constitué d'un triangle, d'un carré et d'un cercle.
- La déconstruction dimensionnelle consiste à regarder la figure en termes de points (dimension 0), de lignes (dimension 1) ou de surfaces (dimension 2). Ainsi ici (figure 5), on peut voir un cercle rouge, un carré noir et un triangle bleu, vus en surface on peut voir le carré sur un triangle et un cercle ou un cercle et un triangle sur un carré. En dimension 0, cela amène à voir des sommets et des intersections mais aussi à penser des alignements, visibles parce que sur une même droite tracée ou non visibles comme ici avec la diagonale du carré en pointillés. On voit que cette décontruction/reconstruction amène à analyser le dessin en identifiant des propriétés comme le fait que le triangle a un côté qui est une diagonale du carré et que le cercle est centré en un sommet du carré sur l'autre diagonale du carré de sorte que le cercle soit à l'extérieur du triangle.
- La déconstruction instrumentale consiste à analyser le dessin dans une logique de reproduction en identifiant des actions dans une organisation séquentielle permettant d'anticiper les étapes de sa reproduction. Par exemple dans la figure ci-dessous (illustration 2), l'élève doit imaginer tracer le carré puis sa diagonale, le triangle et enfin le cercle.

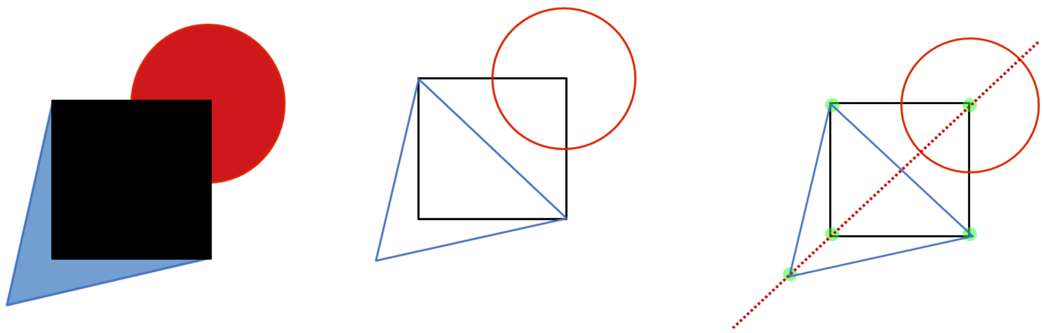


Figure 5. Déconstruction et reconstruction dimensionnelles d'une figure

Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation, le registre explicatif (REX) désigne une certaine manière de penser. Le REX est donc très proche des paradigmes G0 et G1 mais on voit que les compétences décrites par Duval jouent aussi un rôle. Nous pouvons alors définir plusieurs REX différents :

- REX G1 d0 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimension 0. Il voit des points et leur position les uns par rapports aux autres.
- REX G1 d1 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimensions 0 et 1. Il voit des segments et des égalités de longueurs.
- REX G1 d2 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimensions 0, 1 et 2. Il peut voir des figures planes caractéristiques de manière isolée.
- REX G1-G2 méréologique : l'élève connaît des objets géométriques, il peut reconnaître des formes planes caractéristiques et voir des agencements de ces figures.
- REX G2 : l'élève pense dans une géométrie des propriétés, il repère des sur-figures et des sous-figures.

Il est alors possible de penser des tâches amenant les élèves à passer d'un REX à un autre. Par exemple demander de tracer des segments peut amener à passer de d0 à d1, coder des figures peut amener à d2. Demander de tracer des sur ou des sous-figures peut aider à travailler la compétence méréologique, tout comme l'utilisation de gabarits de couleur et transparents (Celi, 2016). Apporter le répertoire des propriétés des figures planes peut amener à G2. Tout comme demander d'écrire des textes argumentatifs à partir de schémas à main levée peut amener à entrer dans G2. En particulier demander de surligner des informations précises sur un schéma peut amener à travailler la compétence méréologique. C'est ce que font certains élèves comme dans les exemples ci-dessous (figure 6) tirés des productions dans la classe de Claude.

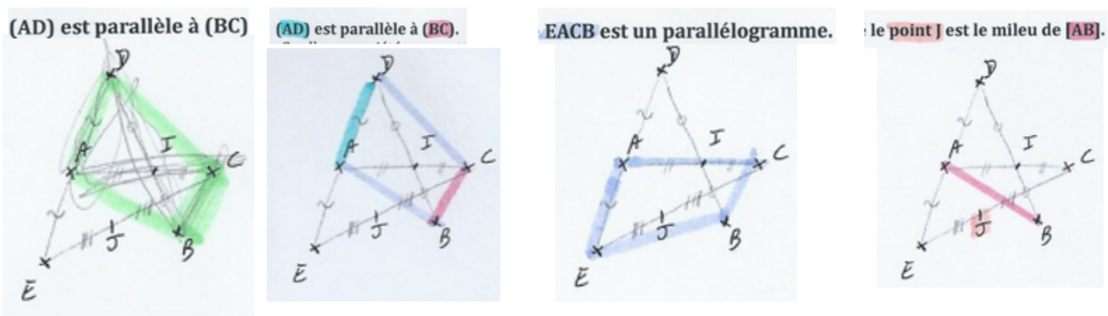


Figure 6. Mobilisation de la compétence méréologique

Repenser la consigne

Le passage de la géométrie naturelle à la géométrie abstraite se fait par un temps d'expérimentation où la géométrie instrumentée va jouer un grand rôle et cet espace d'expérimentation concerne les cycles 2 et 3. Cependant au cycle 4, on mobilise encore la représentation pour élaborer des raisonnements (c'est l'idée développée dans le guide de construire pour raisonner). La question est de trouver comment amener la nécessité de la preuve. Un moteur de la preuve est la défection de la perception : ce que l'on voit est faux (je crois voir un angle droit, un parallélisme, un alignement…). Ici c'est justement le contraire, on « voit » que c'est le milieu et c'est effectivement le milieu. On peut donc s'interroger, la preuve est-elle nécessaire ? Pour les auteurs du guide, c'est le fait que ce soit toujours le milieu, quels que soient les points choisis, qui doit induire la nécessité d'une preuve. Mais comme le dit un élève : « si on suit toujours bien le protocole de construction, on voit pas pourquoi ce serait différent ! »

Le seul cas où cette preuve devient vraiment nécessaire aux yeux des élèves, c'est quand la construction des points intermédiaires n'est pas possible. Par exemple, cet élève ne peut pas placer le point *D* sur sa figure sans sortir du cadre, il faut donc effectuer un raisonnement pour placer *J*.

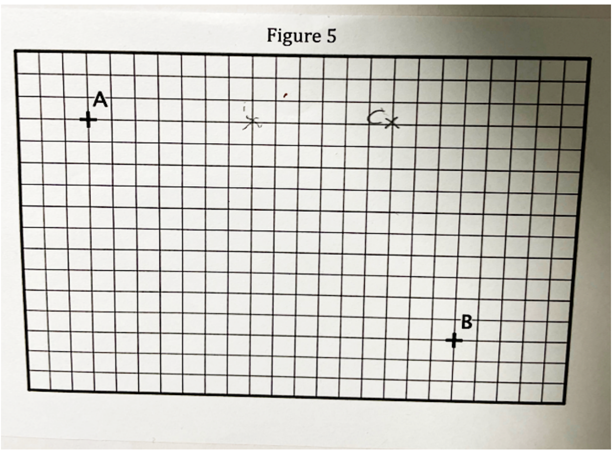


Figure 7. Nécessité d'un raisonnement pour construire

On pourrait alors penser proposer aux élèves la situation suivante :

Amélie dit qu'elle peut placer *J* de manière certaine et très précise sans tracer les autres points. Quel est son secret ?

Conclusion

Les scénarios possibles en formation sont entre autres : organiser une Lesson's study pour analyser les mises en œuvre et les ajustements, des analyses de l'activité de l'enseignant ou de l'enseignante à partir de vidéos ou de verbatims, des analyses des productions d'élèves, la construction de séances dédiées au développement de la vision non iconique, une analyse de l'activité prétexte à des apports en didactique de la géométrie, en particulier à travers le CAP. Ce problème issu du guide est donc une bonne entrée pour une formation initiale mais aussi continue, comme a pu en attester le travail avec l'enseignant qui a expérimenté la situation.

C'est aussi l'occasion de montrer en formation qu'une ressource n'est jamais interprétée ni utilisée de la même manière en fonction du cadre théorique dans lequel on problématise la situation. Il pourrait être intéressant d'analyser d'autres situations du guide et de réfléchir à un document d'accompagnement reprenant les différentes analyses développées dans l'atelier pour chacune des situations étudiées.

Cet atelier a aussi été un temps réflexif sur la participation des chercheurs à l'élaboration des ressources institutionnelles, l'occasion de pointer les écarts entre ces collaborations et les enjeux politiques qui peuvent se cacher derrière ces publications.

Bibliographie

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education et didactique*, *5*(1), 101-104.

Bulf, C., & Celi, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : Du gabarit au compas. *Grand N*, *97*, 21-58.

Celi, V. (2016). *Reproduire une figure géométrique plane à l'école primaire : Quand ? Comment ? Pourquoi ?* https://www.unige.ch/fapse/dimage/files/2114/7142/2744/VCeli_geneve_20_mai_2016.pdf

Choquet, C., & Grau, S. (2021). Analyse de la pratique des enseignants stagiaires en lien avec des dispositifs de formation : Croisements de deux cadres théoriques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*.

During, É. (2005). Ni « pure » ni « appliquée » : Les usages de la géométrie chez Wittgenstein et Poincaré. *Revue de métaphysique et de morale*, *46*(2), 197-214. https://doi.org/10.3917/rmm.052.0197

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7-27.

Fernandes, M., & Vinter, A. (2009). Développement des représentations graphiques réalisées par des enfants à partir d'une exploration tactile ou visuelle de formes bidimensionnelles. *L'Année psychologique*, *109*(3), 407-429. https://doi.org/10.3917/anpsy.093.0407

Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : La question de la mise en commun*. Conférence CREN-CARDIE, Nantes. http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/innovation-pedagogique/kiosque/conferences-du-cren-751343.kjsp?RH=1164983391203

Hersant, M. (2022). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. In Doussot, Sylvain, Hersant, Magali, Lhoste, Yann, & Orange-Ravachol, Denise, *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques.* (Presses universitaires Rennaises).

Houdement, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, *67*, 69-84.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *11*, 175.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : De quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *17*, 128-151.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. *Education et didactique*, *14*(2), 49-64.

Rouquès, J.-P., Valade, L., & Gragnic, C. (2019). *Des maths ensemble et pour chacun* (Canopé). https://www.reseau-canope.fr/notice/des-maths-ensemble-et-pour-chacun-2nde.html

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : À la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, *88*, 5-24.

Annexe 1. Extrait du guide

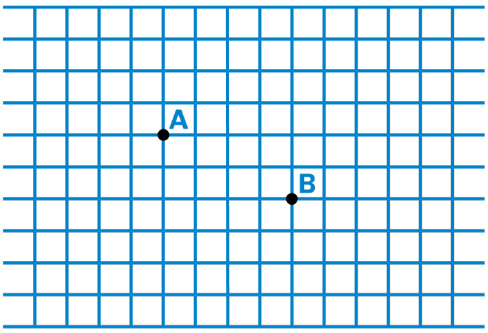
Problème 4. Le grand défi (construire pour raisonner)

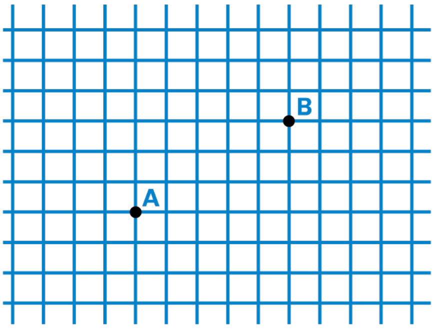
Énoncé

Chacune des figures suivantes est constituée de deux points A et B. Chacune d'elles doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :

— I, C et D sont trois points tels que I est le milieu des segments [AC] et [BD] ;
— E est le point tel que A est le milieu du segment [DE] ;
— J est le milieu du segment [CE].

Soyez le premier groupe à placer très précisément le point J sur toutes les figures pour remporter le défi. Vous devrez ensuite être capables de convaincre les autres groupes que toutes vos figures sont correctes !





Mots-clés

Géométrie plane, construction, parallélogramme, conjecture, géométrie dynamique, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème nécessite dès le début de sa résolution une prise d'initiative originale de la part de l'élève. En effet, la construction va reposer sur un point C (ou un point D) qui n'est pas donné et pour lequel on n'a aucune indication. L'élève doit donc faire preuve d'imagination et, en quelque sorte, de confiance en lui pour placer ce point où il le souhaite et continuer la construction qui s'avère ensuite assez facile.

L'observation de plusieurs figures précises (faites à la main et/ou avec un logiciel de géométrie dynamique) amène un raisonnement inductif. Les multiples représentations obtenues par le groupe, la classe ou grâce à un logiciel semblent très variées de prime abord puisque les points A, B et même C sont placés sans aucune contrainte. Mais leur comparaison amène à constater que les positions des premiers points n'ont pas d'influence sur la position du point J cherché : il est toujours le milieu du segment [AB]. On passe donc de cas particuliers à un cas général. L'étonnement qui résulte de ce premier raisonnement est une stimulation pour nombre d'élèves, car cela ne se réduit pas, pour eux, à une vérification d'un résultat annoncé.

Un autre moyen de motiver les élèves est la présentation de la consigne sous forme de défi : cela donne une dimension ludique, avec un enjeu de vitesse et de précision d'exécution entre les groupes où chacun a à cœur de s'investir.

Ce problème contient aussi un élément intéressant pour la gestion de l'activité par le professeur lui-même : le point J cherché étant le milieu du segment [AB] donné initialement, le professeur peut vérifier d'un seul coup d'œil la construction de chaque élève. Il pourra d'ailleurs expliquer aux élèves que cette figure a une propriété qui lui permet de le faire, sans pour autant dévoiler ce qu'elle est pendant la phase de recherche. Cet aspect intrigue facilement les élèves qui, là encore, peuvent être stimulés.

Enfin, comme d'autres problèmes de géométrie classique, la construction demandée est complexe sans être difficile à exécuter, et les élèves y apprennent à coder au fur et à mesure, à prouver ce qui est établi par un raisonnement inductif puis, dans la phase de raisonnement déductif, à décomposer la figure en sous-figures, extraites les unes après les autres, mais dans l'ordre de la construction.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème pourra être proposé à partir de la classe de 5e, lorsque les propriétés du parallélogramme sont connues. Il fait travailler la compétence « représenter », mais aussi plusieurs aspects de la compétence « raisonner » : le raisonnement inductif basé sur l'observation de plusieurs constructions complètes et le raisonnement déductif à plusieurs étapes qui devra être davantage accompagné par le professeur en début de cycle. La communication de la preuve, bien organisée à l'écrit, n'est qu'un attendu de fin de cycle 4.

Stratégies d'enseignement

La consigne s'adresse à des groupes d'élèves, car un travail individuel serait long et assez fastidieux, ce qui ferait courir le risque de les désintéresser de la situation étudiée.

Les figures données à chaque groupe permettent une différenciation : les figures avec quadrillage sont plus faciles à exécuter et à vérifier entre élèves. La dernière figure proposée est importante d'un point de vue didactique, car la construction pas à pas oblige à sortir du cadre ; pour placer le point J, il sera nécessaire de conjecturer sa position. Cela rend le raisonnement nécessaire : les élèves ne peuvent pas se contenter d'exécuter une construction.

Une ou deux autres figures peuvent être ajoutées pour assurer un bon raisonnement inductif avec des constructions sur papier, mais elles peuvent être remplacées avantageusement par une deuxième partie de construction avec un logiciel de géométrie dynamique. Aucun fichier préparé par le professeur n'est utile : les points A et B de départ sont quelconques.

Si chaque étape de la construction ne comporte aucune difficulté technique particulière après l'étude des parallélogrammes en classe de 5^{e}, la première requiert une prise d'initiative : le point C (ou le point D) peut être placé où l'on veut sans que cela change la position du point J. Cela va souvent déstabiliser les élèves qui ne connaissent initialement pas le résultat et il sera nécessaire de différencier l'aide apportée. Le professeur doit donc les inciter à se lancer dans la démarche sans plus d'indication, en les rassurant, ou même proposer explicitement de placer le point C où ils veulent.

La conjecture sera plus facile à établir dans certains groupes que dans d'autres. Pour faire un temps de régulation, il est nécessaire d'attendre que tous les élèves aient chacun une figure bien réalisée. Si la construction avec un logiciel de géométrie dynamique vient ensuite, il est important de rappeler qu'elle ne permettra que de consolider la conjecture, pas de la prouver.

L'étonnement devant la conjecture, mieux que les petites imperfections dues aux erreurs de tracé sur certaines figures, amène la nécessité de la preuve : comment est-ce possible que le point J soit toujours le milieu de [AB] ? En début de 5^{e}, le professeur pourra aider à déterminer les étapes de démonstration, en guidant plus ou moins les groupes selon leurs besoins. Il sera souvent amené à rappeler aux élèves de bien coder la figure au fur et à mesure et à leur demander d'extraire des parties de figure, car il n'est pas naturel pour eux de faire abstraction de certains éléments, de redessiner à main levée une partie de la figure. La dernière étape de démonstration nécessite l'utilisation de la propriété suivante dans le quadrilatère AEBC : « Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. » Si cette propriété n'a pas été donnée dans le cours, le professeur pourra la donner à l'occasion de ce problème.

Annexe 2. Grille d'analyse didactique d'une situation d'apprentissage en mathématiques

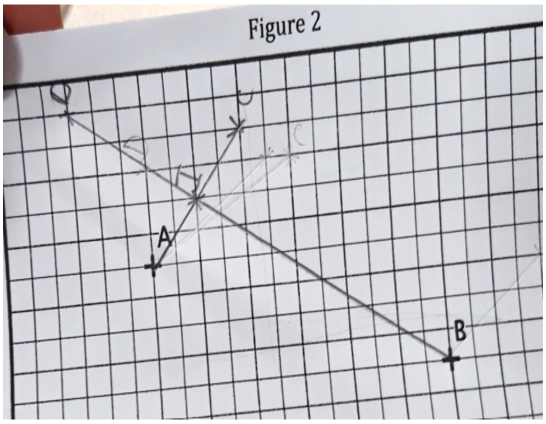
L'analyse préalable

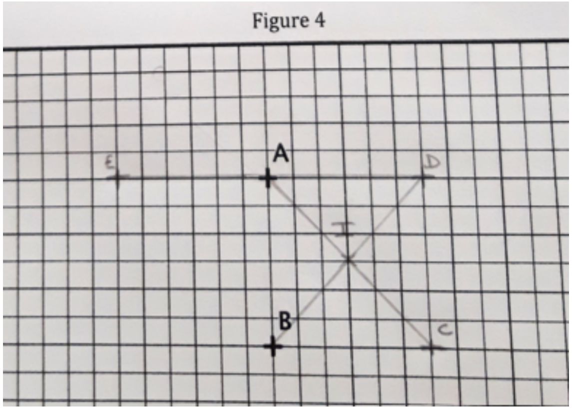
- Quel savoir est visé ? Qu'est-ce que les élèves doivent savoir après la séance qu'ils ne savaient pas avant ?
- Sur quoi les élèves peuvent-ils s'appuyer pour aborder cet apprentissage ?
- En quoi la situation ressource choisie semble-t-elle en adéquation avec le projet d'enseignement ? Quels ajustements prévoyez-vous si elle ne correspond pas exactement à ce projet ?

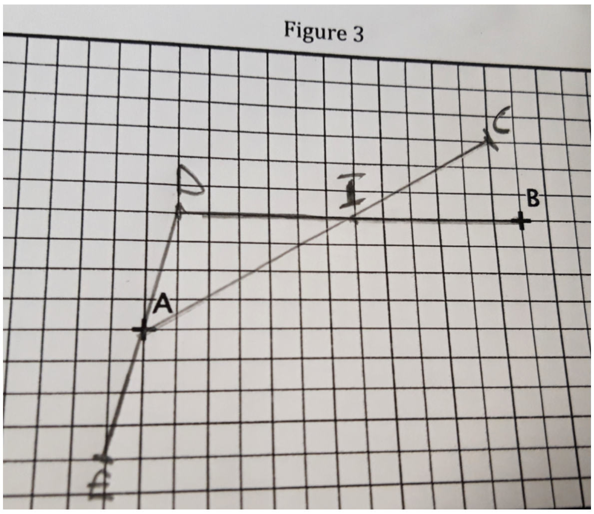
L'analyse a priori théorique de la situation

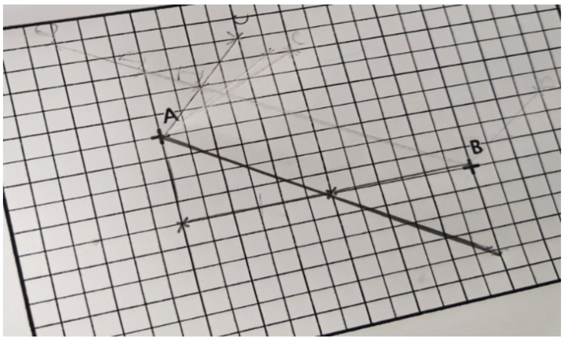
- Quelle consigne est donnée aux élèves ? Quel problème ont-ils à résoudre ?
- Quelles sont **les stratégies** pour résoudre ce problème ?
- Quelles sont **les variables didactiques** et leurs valeurs possibles ? Quels effets ont ces variables didactiques sur les stratégies ?
- Quelles **connaissances** sont nécessaires pour résoudre le problème ? Sont-elles à construire, nouvelles ou anciennes ?
- L'élève peut-il facilement imaginer une solution ? Faire des traitements ? Tester des hypothèses ? Faire des essais ? (Ceci doit assurer le **principe de dévolution**)
- La résolution mobilise-t-elle la connaissance visée ? Cette connaissance correspond-elle à la stratégie la plus efficace ? (Doit faire émerger des nécessités)
- Quelles conceptions erronées peuvent apparaître ? Quels sont les **obstacles ou difficultés** pour les élèves ? (Principe d'empathie cognitive)
- Quel **étayage** envisager ? Qu'est-ce-que l'enseignant peut prendre à sa charge tout en laissant l'élève construire la connaissance visée ? (Ajustement du milieu)
- Les élèves peuvent-ils se rendre compte par eux-mêmes de la **validité** de leur solution ? Une intervention du professeur est-elle nécessaire ? (Principe de rétroaction)
- Comment peut-on envisager la **formalisation** de la connaissance nouvelle en lien avec la situation ? (Première étape de la secondarisation)
- Sur quelles variables peut-on jouer pour diversifier la rencontre avec la connaissance visée et donc amener à une **généralisation** ? (Deuxième étape de secondarisation)

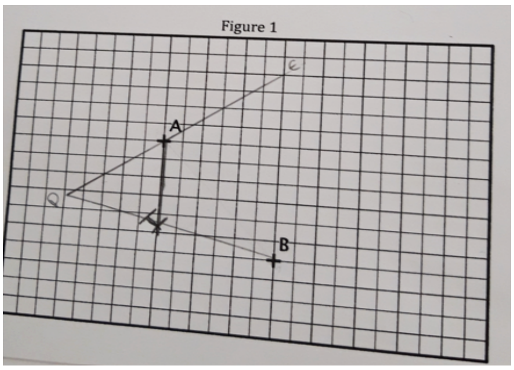
Annexe 3. Productions d'élèves de 4e à l'issue de la première séance

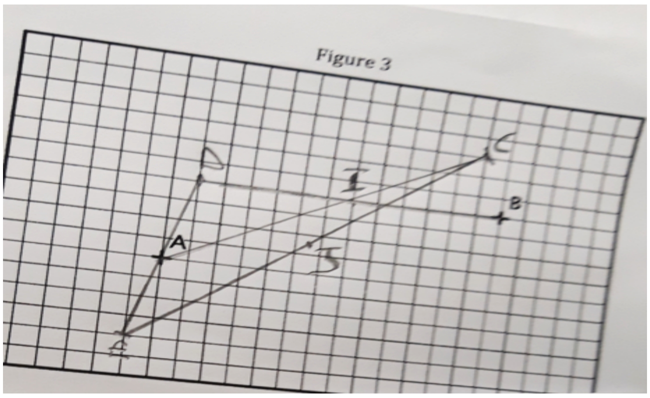






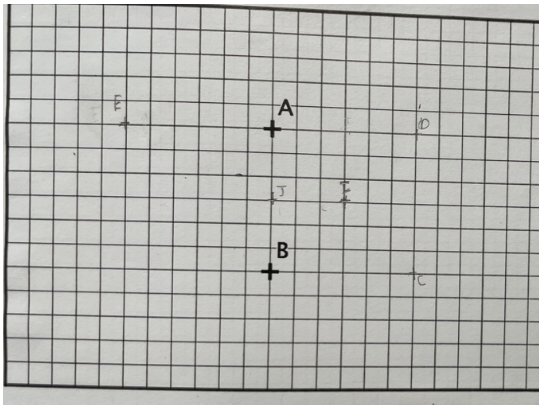




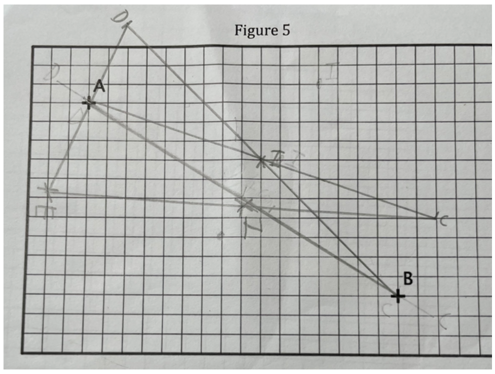


Annexe 4. Document A

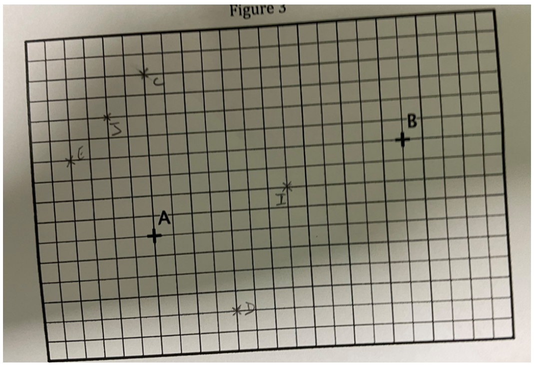
Elève A



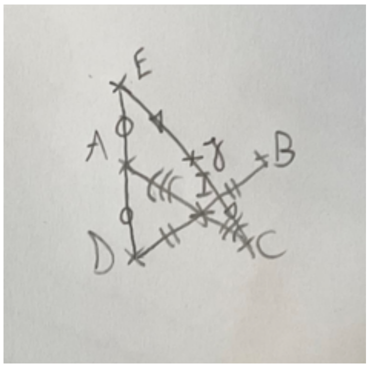
Elève B



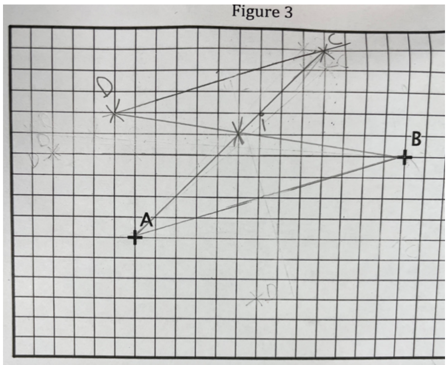
Elève C



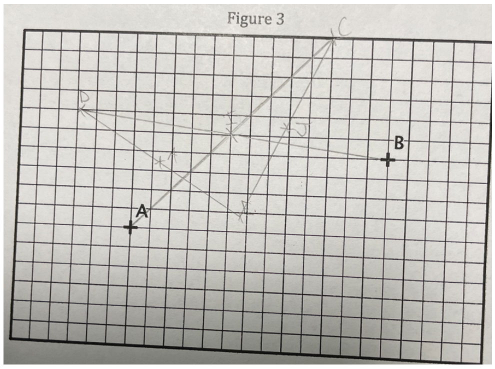
Elève D



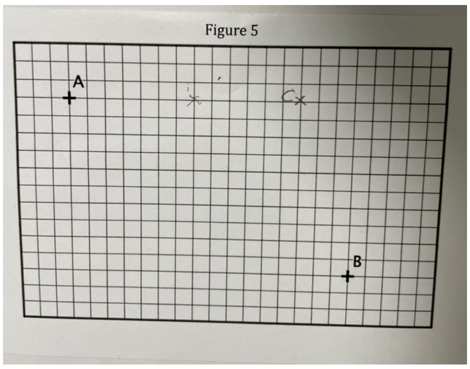
Elève E



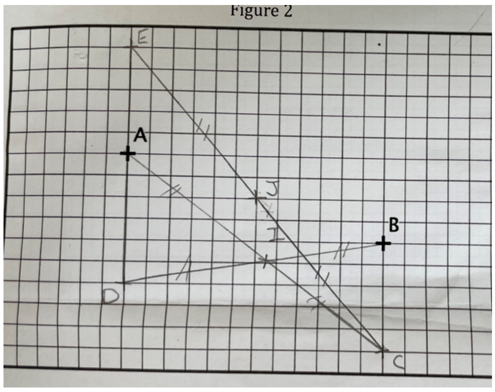
Elève F



Elève G



Elève H

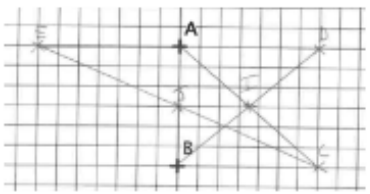


Annexe 5. Document B

En fin de 1ère séance, l'enseignant a validé la conjecture que le point J est le milieu du segment [AB]. Il a demandé aux élèves d'écrire ce qui peut expliquer pourquoi le point J est le milieu du segment [AB]. Voici le document donné aux élèves lors de cette 2ème séance.

Voici des productions d'élèves. Regrouper ces productions par "famille" et donner un titre à chaque "famille".

Production 1



Production 2

Production 3

AI = IC

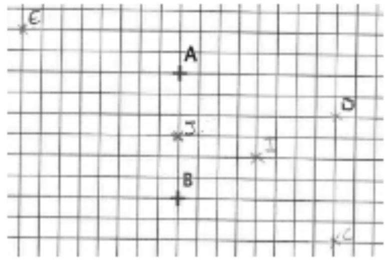
Production 4

ABCE est un parallélogramme

Production 5

I est au milieu de [AC]

Production 6



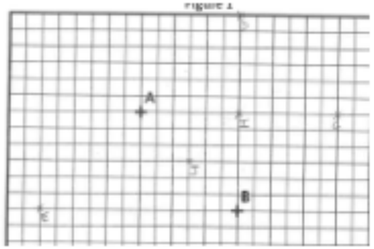
Production 7

On en déduis que (AD) // (BC) car elles sont symétriques par rapport à I

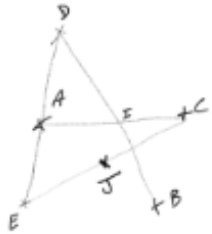
Production 8

[DE] est parallèle à [EJ]

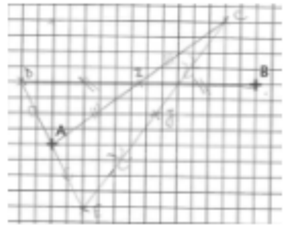
Production 9



Production 10

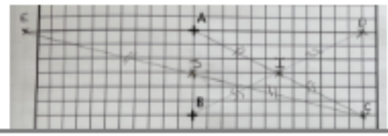


Production 11



Production 12

Production 13



Production 14

Vue que I est le milieu de [AC] et [BD] ça veut dire que ACBD est un parallélogramme

Production 15

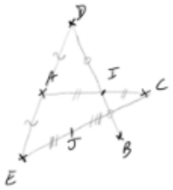
AD et BC sont parallèles

Production 16

AD// BC Si on rajoute un point E sur la droite (AD) alors EA// BC. Donc EABC

Annexe 6. Document C distribué aux élèves

1. Un élève a affirmé que **(AD) est parallèle à (BC).**

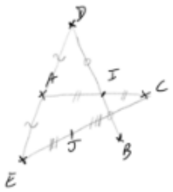


Quelles propriétés permettent de prouver que cette affirmation est vraie ?
Indiquer les informations données ou déduites qui permettent d'utiliser ces propriétés.

Preuve :

Informations :	Propriété n°.............	Déduction :
Informations :	Propriété n°	Déduction :

2. Un élève a affirmé que **les segments [AD] et [BC] ont la même longueur et sont parallèles.**



Preuve :

Informations :	Propriété n°.............	Déduction :

Voici des propriétés mathématiques.
Certaines peuvent être utilisées pour prouver la conjecture émise.

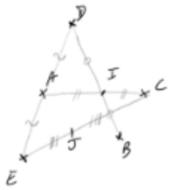
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. (propriété 1)
- ses côtés opposés ont même longueur deux à deux. (propriété 2)
- ses diagonales ont même milieu. (propriété 3)
- ses angles opposés sont égaux. (propriété 4)
- deux angles consécutifs sont supplémentaires. (propriété 5)

- (propriété 6) Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux,
- (propriété 7) Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur deux à deux ,
- (propriété 8) Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu
- (propriété 9) Si un quadrilatère a deux côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur

alors c'est un parallélogramme.

3. Un élève a affirmé que **le quadrilatère EACB est un parallélogramme.**



Démonstration :

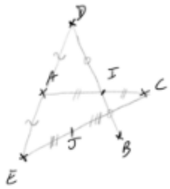
Les segments [AD] et [BC] ont même longueur et sont parallèles ,

et A est ....

donc les segments .... et .... sont parallèles et de même longueur.

Donc d'après la propriété n° ...., le quadrilatère EACB est un parallélogramme.

4. Un élève a affirmé **le point J est le mileu de [AB].**



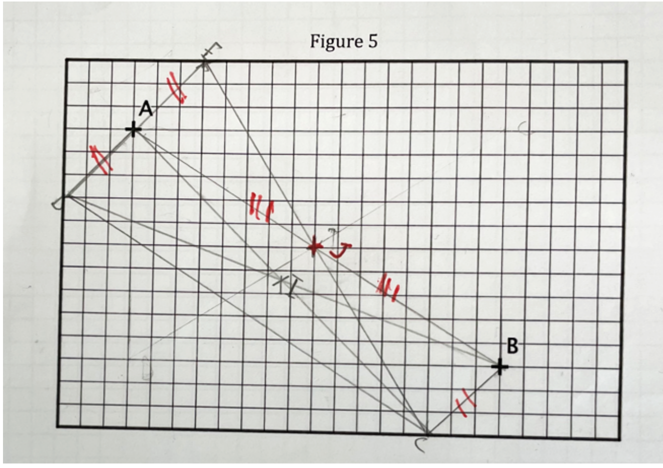
Preuve :

Informations :	Propriété n°..............	Déduction :

Annexe 7

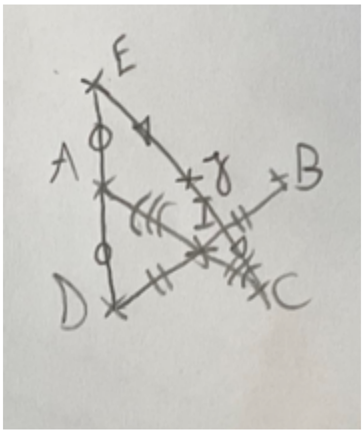
Argument 1

On sait que *J* est le milieu de [*AB*]. Expliquer pourquoi il ne peut pas être ailleurs ?



Argument 2

Schéma suivant :



Argument 3

On remarque que ABCD est un parallélogramme grâce au positionnement du point I donc DA, AE, et BC sont de la même longueur donc le point J est forcément au milieu de [AB].

Argument 4

On a remarqué que AE et BC sont égaux. C'est la raison pour laquelle J est au milieu de [AB] et [EC].

Argument 5

[AB] est parallèle à [DC] parce qu'elles ne se croisent pas.

DCBA est un quadrilatère.

EBCA est un parallélogramme.

Argument 6

ABCD et ABCE sont des parallélogrammes et leurs milieux sont I pour ABCD et J pour ABCE. J est la diagonale de ABCE.

Argument 7

ABCD et ABCE sont des parallélogrammes, leur milieu est I et J. [AB] est la diagonale de ABCE et J est l'intersection des deux diagonales [AB] et [EC] il est donc le milieu de [AB].

Argument 8

Je pense que si le programme est toujours le même et bien réalisé, alors le point J sera au même endroit.

Argument 9

ABCD est un parallélogramme dont le centre est le point I.

Toutes ces propositions sont basées sur des faits qui sont vrais. Cherche pourquoi chacun des faits est vrai en t'aidant de ton répertoire de géométrie et complète le tableau suivant avec les définitions et les propriétés utilisées.

C'est vrai parce que c'est écrit dans l'énoncé.	C'est vrai parce que c'est la définition.	C'est vrai parce qu'il existe une propriété.

Annexe 8. Document E, Verbatim mise en commun séance 2 après le tri des productions (voir document B)

Analyser le processus d'institutionnalisation :

- *Quelle est la part des productions des élèves dans ce processus ?*
- *Quelles sont les focales de l'enseignant ?*
- *Quels sont les risques de malentendus entre l'enseignant et les élèves ?*

Critiquez le bilan écrit (en gras dans le verbatim).

P	On voit qu'on a commencé un petit peu à préciser ; il y a cette histoire dessin schéma, on hésite entre les 2 mots.
A	Nous on a écrit : 6, 9 et croquis sans segment tracés 10, 12 et 2 croquis à main levée 11, 13, 1 croquis avec segments tracés 3 et 5, les informations qu'on a obtenues avant 4, 7, 15, 14, 16 les informations obtenues après On a fait une sous famille où on a mis les phrases expliquées (16, 5, 14) et les phrases non expliquées (15, 4, 8)
B	Pour croquis sans segment tracés c'est pas des croquis ?
P	Pourquoi ?
B	C'est des segments, c'est un dessin.
P	Un croquis c'est un dessin…
P	Et il y a le mot schéma ? C'est quoi la différence entre un dessin et un schéma ?
D	Le schéma on l'utilise dans les matières scientifiques et il y a des règles.
P	Quel est l'intérêt ?
C	On peut mettre les informations, enfin… le codage.
P	A quoi ça va nous servir ?
C	Un schéma, on n'est pas obligé d'utiliser la règle, ça nous entraîne.
P	Ça sert à … nous entrainer ? /
D	A visualiser.
P	Un dessin nous sert aussi à visualiser ?/
P	La différence […] le dessin avec les instruments, le schéma à main levée, la différence elle est là.
P	Le schéma c'est pour avoir l'idée.
P	Si je comprends bien, on est tous d'accord pour avoir séparé le dessin et le texte. *(relit le classement proposé par le groupe)*
P	Qu'est-ce que vous entendez par ''obtenues avant'' ?
N	Les informations données, les informations de base.
P	Ce sont les informations données.
P	Il y en a d'autres ? La production 4, est-ce que c'en est une ?
A	Non.

P	Est-ce qu'elle est vraie ?
P	*(Repasse sur la production 1 le quadrilatère AEBC)* Attention quand on nomme un quadrilatère, l'ordre de points est important. Est-ce que c'est un parallélogramme ? […] Ce n'est pas donné, c'est ce qu'on pense ; est-ce qu'on en est sûr ? Non, il va falloir l'expliquer. Il y a les données, les explications et ce qu'on en déduit, ce qu'on va conclure.
P	On va noter pour garder une trace. Est-ce que vous vous souvenez pourquoi on a fait toutes ces productions ?
D	Pour s'entraîner.
P	Ah bon /
D	Non, pour faire des propriétés.
P	Ah pour démontrer, pour raisonner.
P	*(Écrit au tableau, les élèves recopient ce qui est en gras)* **Pour raisonner, il faut distinguer :** **- les informations données (par l'énoncé)** Il y a d'autres info comme celles-ci : c'est quoi ? (*montre du doigt la production 4)* Des affirmations, on va supposer que c'est vrai **- les affirmations (informations qu'on pense vraies)** **- les informations déduites (grâce à des propriétés ou des définitions)**
P	Pour raisonner, il faut distinguer ça, mais là on a parlé que du texte, mais il y a quoi d'autre ?
B	Des schémas.
P	Et ils servent à quoi ? *(sonnerie)* A appuyer. On notera ça la prochaine fois. (*Complément écrit la séance suivante :* **Pour appuyer notre raisonnement, on peut utiliser :** **Un dessin** **Un schéma** **Les codages** **Cela permet d'extraire les figures clés : triangles, quadrilatères particuliers.**)

UN ATELIER DESTINE AUX ENSEIGNANT·E·S NON IMPLIQUES DANS LA FORMATION

L'IMPLICATION, PIERRE ANGULAIRE DU RAISONNEMENT

Denis GARDES, Marie-Line GARDES

Résumé. Dans cet article, nous proposons une réflexion didactique, menée par la CII Lycée, autour du concept de l'implication. Nous définissons ce connecteur entre deux propositions puis nous étudions les difficultés d'enseignement et d'apprentissage de cette notion : valeur de vérité, négation, quantification, contraposée et réciproque, formulation.

Dans cet article, nous présentons une réflexion menée par un sous-groupe de la CII Lycée sur la notion d'implication. Cette réflexion fait suite à nos travaux sur le raisonnement par récurrence (Gardes et *al.*, 2016) et sur le raisonnement par l'absurde (Bernard et *al.*, 2018 ; Gardes & Gardes, 2019). Nous avons en effet identifié qu'une difficulté d'apprentissage majeure dans ces raisonnements est liée à la compréhension de l'implication. Ce constat n'est certes pas nouveau (Deloustal-Jorrand, 2001, 2004 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Grenier, 2014) mais il nous a permis de re-questionner cette notion.

Dans une première partie, nous définissons la notion d'implication logique entre deux propositions et nous l'illustrons avec plusieurs exemples emblématiques. Dans une seconde partie, nous analysons les difficultés d'enseignement et d'apprentissage de cette notion : valeur de vérité, négation, quantification, contraposée et réciproque. Dans une troisième partie, mous présentons plusieurs méthodes pour démontrer une implication.

Analyse de l'objet « implication »

Quelques principes de la logique des propositions

Nous présentons quelques principes de la logique des propositions :

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux
- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire que (P OU non(P)) est vraie.
- Le principe de non contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en même temps, c'est-à-dire (P ET non(P)) est fausse.
- la vérifonctionnalité
  La valeur de vérité d'une proposition composée ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Il reste maintenant à définir ce qu'est une proposition. Nous donnons la définition suivante :

C'est une phrase mathématique pour laquelle se poser la question de sa valeur de vérité a un sens.

Il faut donc qu'une proposition contienne un verbe et qu'elle soit bien construite. Par exemple « un parallélogramme est divisible par 3 » n'est pas une proposition car cela n'a pas de sens de se poser la question de sa valeur de vérité. La relation « est divisible par 3 » ne peut pas s'appliquer à un parallélogramme. De même la phrase « Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$ » n'est pas une proposition, en effet se poser la question de la vérité de cette phrase n'a pas de sens.

En mathématiques, les propositions contiennent en général une variable. On note alors la proposition $P[x]$. On parle alors de *proposition ouverte* et on peut se prononcer sur sa valeur de vérité si on précise le domaine d'astreinte de la variable et sa quantification. Par exemple « $x^2 > 1$ implique $x > 1$ » est une proposition ouverte. On ne peut pas se prononcer sur sa vérité si on ne connaît pas à quel domaine appartient la variable x et sa quantification. Si on a « pour tout x réel, $x^2 > 1$ implique $x > 1$ » cette proposition est fausse mais si on a « pour tout x entier naturel, $x^2 > 1$ implique $x > 1$ », cette proposition est vraie.

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique binaire qui à partir de deux propositions P et Q définit une nouvelle proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. On obtient la table de vérité suivante (figure 1).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 1 – Table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On peut se poser la question du pourquoi de cette définition. On va donner deux raisons principales qui permettent de mieux comprendre les raisons de cette définition. La première raison consiste à se demander dans quels cas une implication est fausse. Si par exemple, on demande à un lycéen, de décider si l'implication suivante est vraie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1,$$

il répondra « naturellement » qu'elle est fausse en donnant, par exemple $x = -2$, comme contre-exemple, même s'il n'a pas suivi de cours de logique. On a bien P vraie et Q fausse. Même en insistant en demandant d'autres raisons, il ne donnera que d'autres contre-exemples avec P vraie et Q fausse (c'est normal parce qu'il ne peut pas donner d'autres raisons, c'est le seul cas où l'implication est fausse). Ces réponses « naturelles » font donc référence de manière inconsciente ou non au fait qu'une implication est fausse uniquement dans le cas P vraie et Q fausse.

La seconde raison s'appuie sur le fait que les deux premières lignes de la table de vérité sont aisément acceptées. Le plus difficile est de comprendre que si P est fausse, alors l'implication est vraie. L'implication étant un connecteur logique, $P \Rightarrow Q$ est une proposition qui doit avoir une valeur de vérité dans tous les cas, même quand P est fausse. En effet, on ne peut pas supposer que quand P est fausse, $P \Rightarrow Q$ n'a pas de valeur de vérité. Ainsi les deux dernières lignes de la table de vérité doivent être remplies. Pour ces deux lignes, il y a quatre possibilités. On va étudier chacune de ces quatre possibilités.

Premier cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Figure 2 – 1ère possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On remarque que l'on obtient la table de vérité du connecteur ET, cela n'aurait donc pas de sens de définir un nouveau connecteur ayant les mêmes propriétés qu'un connecteur existant. Cela ne peut donc pas être celle du connecteur IMPLIQUE.

Deuxième cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Figure 3 – 2ème possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On obtient la table de la proposition Q. Cela signifierait que la vérité de $P \Rightarrow Q$ ne dépendrait pas de la proposition P, ce qui n'est pas possible.

Troisième cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Figure 4 – 3ème possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On remarque que l'on obtient la table de vérité du connecteur EQUIVALENT[1], cela ne peut donc pas être celle du connecteur IMPLIQUE.

Il ne reste donc que le quatrième cas pour la table de vérité du connecteur IMPLIQUE. On obtient alors la table de vérité présentée en figure 1.

Autre définition de l'implication

On peut aussi définir $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs disjonction et négation. En effet, $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à (non P ou Q). Pour le voir, il suffit d'établir la table de vérité de (non P ou Q). On retrouve bien que $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que P est fausse ou Q est vraie et fausse dès que P est vraie et Q est fausse.

[1] Le connecteur EQUIVALENT peut se définir de la façon suivante : P est équivalent à Q si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

Ce point de vue permet d'expliciter les trois cas où $P \Rightarrow Q$ est vraie et en particulier ceux où la prémisse est fausse. Or comprendre que l'on peut raisonner à partir d'une prémisse fausse est une connaissance importante pour le raisonnement et la démonstration. Par exemple, elle est indispensable pour comprendre un raisonnement par l'absurde. Ce manque de connaissance peut ainsi être à l'origine des difficultés des élèves pour comprendre et utiliser un raisonnement par l'absurde (Gardes & Gardes, à paraître).

Exemples illustrant cette définition

Nous détaillons ci-dessous trois exemples emblématiques travaillant l'implication.

Exemple 1 – Tâche de Wason (Wason, 1966)

Il y a ci-dessous en ensemble de quatre cartes. Pour chaque carte, figure une lettre sur un côté et un chiffre de l'autre côté.

Voici maintenant une proposition :

S'il y a un A sur une face, alors il y a un 4 sur l'autre face.

Laquelle ou lesquelles de ces quatre cartes est-il nécessaire de retourner pour vérifier que la proposition est vraie ?

Nous sommes en présence d'une implication du type $P \Rightarrow Q$ avec P la proposition « la carte a un A sur une face » et Q la proposition « la carte a un 4 sur une face ». On sait que $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement si P est vraie et Q fausse.

- Pour la première carte, la proposition P est vraie. Il faut donc s'assurer que Q n'est pas fausse. Il faut donc retourner cette carte.
- Pour la deuxième carte, la proposition P est fausse. L'implication $P \Rightarrow Q$ est alors vraie quelle que soit Q c'est-à-dire le chiffre sur l'autre face. Il n'est donc pas nécessaire de la retourner.
- Pour la troisième carte, la proposition Q est vraie. L'implication $P \Rightarrow Q$ est alors vraie quelle que soit P c'est-à-dire la lettre sur l'autre face. Il n'est donc pas nécessaire de la retourner.
- Pour la quatrième carte, la proposition Q est fausse. Il faut donc s'assurer que P est fausse. Il faut donc retourner la carte.

En conclusion, il faut retourner les cartes A et 7.

Selon plusieurs études (voir par exemple Rogalski & Rogalski, 2004), le taux de réponses correctes (seulement les cartes A et 7) sur cette tâche se situe aux environs de 10%. La majorité des personnes interrogées sur cette tâche répondent A ou (A et 4). Cela met en évidence que, pour elles, accepter la première ligne de la table de vérité de l'implication va de soi mais que les suivantes posent des difficultés.

Exemple 2 (Durand-Guerrier, 2005)

Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la proposition « si *n* est un nombre pair, alors son successeur est premier ».

On formalise avec l'implication ouverte $P[n] \Rightarrow Q[n]$ pour n entier compris entre 1 et 20 où $P[n]$ est « n est pair » et $Q[n]$ est « $n + 1$ est premier ».

On cherche donc les entiers n compris entre 1 et 20 tels que $P[n]$ est fausse et les entiers n tels que $Q[n]$ est vraie.

$P[n]$ est fausse pour tous les entiers impairs.

$Q[n]$ est vraie pour $n + 1$ appartenant à $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19\}$ c'est-à-dire n appartenant à $\{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; 12 ; 16 ; 18\}$.

Ainsi seuls les entiers de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$ satisfont l'implication ouverte.

On aurait pu chercher le complémentaire, à savoir pour quelles valeurs de n l'implication est fausse (ce qui revient par ailleurs à rechercher l'ensemble des contre-exemples). Elle est fausse uniquement si $P[n]$ est vraie et si $Q[n]$ est fausse.

La majorité des élèves et de nombreux enseignants pensent que les impairs ne sont pas concernés par cet énoncé.

Cet exercice permet de :

- travailler sur les règles de vérité de l'implication,
- mettre en valeur l'utilisation des tables de vérité (cet outil est certes non nécessaire mais il permet de mettre en évidence les trois cas de vérité d'une implication),
- mettre en défaut la règle-en-acte qui consiste, pour évaluer une implication, à évaluer d'abord l'antécédent de cette implication et de ce fait, faire un traitement de l'implication comme une conjonction (P ET Q),
- préciser, du point de vue du langage, la différence entre les expressions « si … alors » et « on sait que … alors ».

Exemple 3. Les jetons (Mesnil, Beaud, Barbe, 2016)

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carré et triangulaire) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge).

Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois propositions vraies sur ces jetons :

1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Déterminer la couleur de chaque jeton.

Il y a plusieurs manières de résoudre l'exercice. La solution proposée ici s'appuie sur un raisonnement par disjonction des cas.

- <u>Premier cas</u> : le jeton rond est bleu.

Alors le jeton carré est vert (d'après la proposition 1).
D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert, ce qui est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts.

- <u>Deuxième cas</u> : le jeton rond est vert.

Alors le jeton carré est rouge (d'après la proposition 2).

D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert, ce qui est impossible puisque deux jetons (rond et triangulaire) seraient verts.

- Troisième cas : le jeton rond est rouge.

Si le jeton carré est vert, alors le jeton triangulaire est vert d'après la proposition 3. Ceci est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts. Ainsi le jeton carré serait bleu et le jeton triangulaire serait vert.

La seule solution possible correspond au jeton rond rouge, au jeton carré bleu et au jeton triangulaire vert. On vérifie que cette combinaison rend les trois implications vraies. La solution est ici unique (rond rouge, carré bleu, triangle vert) et rend les trois implications vraies avec antécédents faux ce qui est l'intérêt principal de cet exercice.

Contraposée d'une implication

Toute proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée (non $Q \Rightarrow$ non P). En effet, (non $Q \Rightarrow$ non P) est équivalent à (Q ou non P) qui est équivalent à $P \Rightarrow Q$.

La proposition « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ » a pour contraposée « pour tout x, non $Q[x] \Rightarrow$ non $P[x]$ ». Il faut remarquer que la quantification est identique pour une implication et sa contraposée. Ce n'est pas le cas dans la démonstration par l'absurde d'une implication. Beaucoup de personnes confondent ces deux types de raisonnement (par l'absurde et par contraposition).

Négation d'une implication

La négation de l'implication n'est pas une implication. En effet, $P \Rightarrow Q$ est équivalent à (non P ou Q). D'après les lois de De Morgan, non(non P ou Q) est équivalent à (P et non Q) qui est la conjonction de deux propositions. Elle ne peut donc pas se traduire en une implication qui est une disjonction.

Donc nier une implication $P \Rightarrow Q$ revient à écrire (P et non Q).

Pour une implication avec variable, la négation de « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[\mathrm{x}]$ » est la proposition « il existe x tel que $P[x]$ est vraie et $Q[x]$ est fausse ». Un tel élément x est appelé un contre-exemple.

On demande souvent dans des exercices si telle implication est vraie ou fausse mais sans avoir toujours bien explicité que montrer qu'une implication est fausse, revient à montrer que sa négation est vraie.

Deux règles de raisonnement liées à l'implication

La règle la plus couramment utilisée est la règle du *modus ponens* ou règle de détachement. Elle s'énonce ainsi : si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie.

Une autre règle, qui découle de la table de vérité de l'implication est la règle du *modus tollens* : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et si Q est fausse alors P est fausse.

Notons que cette règle est rarement mentionnée dans l'enseignement alors qu'elle permet très souvent d'éviter un raisonnement par l'absurde comme le montre l'exemple suivant (figure 5) :

C Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Énoncé : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Solution

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$. Deux nombres égaux ont le même carré donc $2 = 1{,}414^2$. Or $1{,}414^2 = 1{,}999396$, on obtient ainsi une contradiction.
Donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse.

Figure 5. Extrait du manuel Hyberbole Nathan Seconde 2019

Il suffit dans cet exemple d'utiliser le *modus tollens* avec l'implication vraie suivante : « pour tous nombres réels a et b, $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ». Comme $(\sqrt{2})^2 \neq 1{,}4142135 62^2$, par modus tollens, on en déduit $a \neq b$.

Difficultés didactiques liées à l'implication

Différence entre la logique naturelle et la logique mathématique

On assimile souvent (voire on définit ainsi) le connecteur IMPLIQUE à l'expression « Si … alors » qui a souvent dans le langage courant une autre signification (Fabert et Grenier, 2011). Pour le voir, examinons la phrase dite à un enfant « Si tu ne manges pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert ! ». Que pense un enfant qui mange sa soupe ? L'enfant interprète cette phrase comme une équivalence, c'est-à-dire qu'il aura un dessert à condition d'avoir mangé sa soupe. Dans l'extrait ci-dessous, l'élève de Seconde voit une différence entre « si *P* alors *Q* » et « *Q* si *P* » (figure 6) :

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O
S'il ne la mange pas ? N

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui car s'il ne la mange pas on NNPS du fait que elle n'impose pas la condition comme précédemment : si — alors —. là on trouve : si seulement, ce qui nous avance pas sur : si non.

Oui car s'il ne la mange pas on NNPS (ne peut pas savoir) du fait qu'elle n'impose pas la condition comme précédemment : si ----- alors---- là on trouver si seulement, ce qui nous avance pas sur : si non.

Figure 6. Extrait d'une production d'élève de Seconde (Fabert & Grenier, 2011, p.44)

L'idée de temporalité est très présente dans le « si ... alors » du langage courant. Prenons l'exemple « s'il pleut (alors) je prends mon parapluie ». Si cette phrase était une proposition mathématique, elle serait équivalente à sa contraposée « si je ne prends pas mon parapluie, (alors) il ne pleut pas ». Cette dernière phrase se heurte au bon sens, je ne suis pas devin !

De plus l'idée de causalité est souvent associée à l'implication alors que la vérité d'une implication entre propositions ne dépend que de la vérité des propositions en jeu. Ainsi l'implication suivante est vraie « $2 - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{121} = 11$ », pourtant il semble difficile de déduire la deuxième égalité de la première égalité. Ainsi, attention à ce que l'on écrit à propos de l'implication (figure 7) :

> **Implication**
>
> Une implication est une assertion prenant la forme d'une **relation de cause à effet** entre deux assertions.
> On explicite cette relation en l'écrivant sous la forme « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ ».

Figure 7. Extrait du manuel Variations Hatier Seconde 2019

Confusion entre le modus ponens et l'implication

On rappelle que la règle du *modus ponens* affirme que si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie. Trop souvent, on réduit l'implication à cette utilisation, c'est-à-dire que l'on ne prend en compte qu'une seule ligne de la table de vérité (figure 8) :

> **8 Implication**
> La proposition P implique la proposition Q signifie que : si P est vraie, alors Q est vraie.
> On la note cette implication : P ⇒ Q.

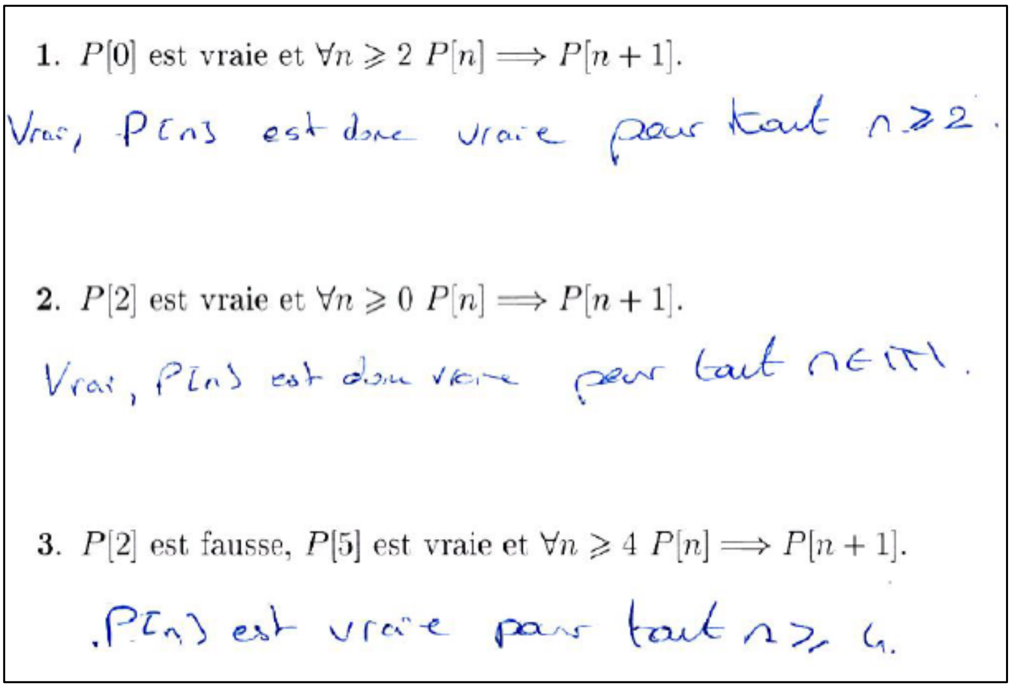
Figure 8. Extrait du manuel Transmath Nathan Seconde 2019

Les quatre cas possibles de la table de vérité ne sont jamais mentionnés. Au mieux, on en cite deux : le cas P vraie ET Q vraie et le cas P vraie ET Q fausse. Les manuels n'envisagent pour ainsi dire jamais le cas où la prémisse est fausse comme le montre l'extrait ci-dessous (figure 9) :

> **A Implication**
>
> • Une **implication** est une proposition de la forme « **Si P, alors Q** » où P est une proposition appelée **hypothèse** et Q une proposition appelée **conclusion**.
> • On suppose la proposition P vraie, alors :
> – si la proposition Q est vraie, l'implication « Si P, alors Q » est vraie ;
> – si la proposition Q est fausse, l'implication « Si P, alors Q » est fausse.

Figure 9. Extrait du manuel Hyperbole Nathan Seconde 2019

Ceci entretient la règle-en-acte « si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors P est vraie ». On retrouve ceci dans le raisonnement par récurrence. Nous avons proposé à des élèves de Terminale de déterminer des valeurs de l'entier n pour lesquelles la vérité de $P[n]$ est assurée (figure 10). Un grand nombre d'élèves considère que la vérité de $P \Rightarrow Q$ impose la vérité de P.



1. $P[0]$ est vraie et $\forall n \geqslant 2\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

Vrai, P[n] est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$.

2. $P[2]$ est vraie et $\forall n \geqslant 0\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

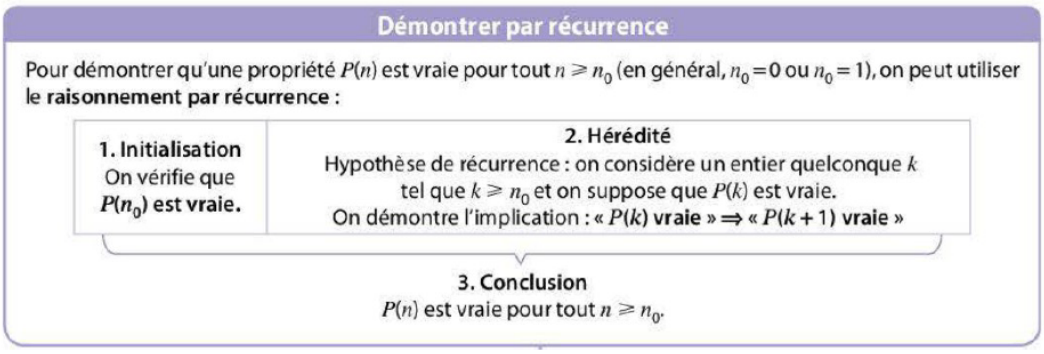
Vrai, P[n] est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $P[2]$ est fausse, $P[5]$ est vraie et $\forall n \geqslant 4\ P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

P[n] est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

Figure 10. Extrait d'une copie d'élève de Terminale spécialité Maths (2022)

Cet élève ne tient absolument pas compte de l'initialisation et répond que $P[n]$ est vraie dès que $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ est vraie. On peut se demander ce que cet élève comprend du raisonnement par récurrence. Malheureusement, ce n'est pas un cas isolé. Cette règle en acte peut être confortée aussi par une formulation malheureuse comme dans l'extrait ci-dessous (figure 11).



Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$), on peut utiliser le **raisonnement par récurrence** :

1. Initialisation	2. Hérédité
On vérifie que **$P(n_0)$ est vraie.**	Hypothèse de récurrence : on considère un entier quelconque k tel que $k \geqslant n_0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie. On démontre l'implication : « **$P(k)$ vraie** » ⇒ « **$P(k+1)$ vraie** »

3. Conclusion

$P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Figure 11. Extrait du manuel Barbazo Hachette Terminale Spécialité 2020

Il est incorrect d'écrire que l'on démontre $P\ vraie \Rightarrow Q\ vraie$, il s'agit ici de démontrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et pour cela il suffit de vérifier que si P est vraie alors Q est aussi vraie. Cette confusion rend difficile de repérer la distinction entre la vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'utilisation de l'implication dans le *modus ponens* (qui on le rappelle affirme que si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie).

Le fait d'ignorer les cas où la prémisse est fausse rend encore plus difficile la compréhension du raisonnement par l'absurde. En effet, dans ce raisonnement, on part d'une prémisse fausse pour montrer qu'elle ne l'est pas !

Problème de la quantification

La quantification est souvent implicite dans la formulation de l’implication. Cela pose des problèmes d’interprétation comme le montre l’exercice suivant tiré des évaluations de l’APMEP (figure 12) et déjà analysé dans Durand-Guerrier (1999).

Exercice 1
Voici un labyrinthe
Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l’entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure.

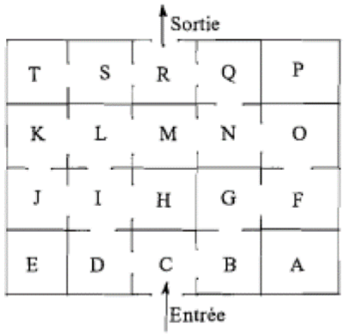


Figure 12. Enoncé de l'exercice du Labyrinthe

L’énoncé proposait six phrases pour lesquelles il fallait dire si elles étaient vraies, si elles étaient fausses ou si on ne pouvait pas savoir. Nous allons analyser la phrase n°6 puis la phrase n°3.

La phrase n°6 est : « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Pour cette phrase, une grande majorité d’élèves a répondu ON NE PEUT PAS SAVOIR et un petit tiers a répondu FAUX, réponse considérée exacte par les auteurs de l’exercice. Or ces deux réponses sont acceptables selon la quantification implicite imaginée. En effet si X représente une personne donnée, il est impossible de savoir si elle passée par K en sachant qu’elle est passée par L. Cela dépend du trajet qu’elle a emprunté (CDIJKLMNQR ou CDILMNQR). Si on prend la quantification universelle sur toutes les personnes (en réalité, la variable est le trajet et non la personne), l’implication est fausse puisqu’elle admet un contre-exemple (le trajet CDILMNQR). Cette différence d’appréciation de la quantification existe encore même avec un public d’enseignants de mathématiques, nous l’avons vérifié lors de stages de formation.

La phrase n°3 est : « X est passé par M ».

Les auteurs de l’exercice considèrent que la bonne réponse est ON NE PEUT PAS SAVOIR. Ils n’envisagent donc pas la même quantification implicite (c’est-à-dire une quantification universelle) que pour la phrase n°6. Cela pourrait être lié au fait que la phrase n°3 n’est pas une implication.

On voit alors poindre la propriété-en-acte sous-jacente : une implication est toujours quantifiée universellement. C’est vrai que la plupart des implications sont utilisées avec une quantification universelle. L’expliciter permettrait probablement d’éviter certains obstacles auprès des élèves.

On retrouve exactement le même problème qu’avec l’exercice de l’APMEP avec le problème classique suivant donné en classe de Seconde (figure 13) :

Soit f une fonction définie sur $[-4;3]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		-1		0		3
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

Dire pour chaque phrase si celle-ci est vraie ou fausse ou si on ne peut pas savoir.

1. L'image par f de 1 est 0.
2. L'image par f de 1 est -4.
3. L'image par f de -4 est 1.

Figure 13. Exercice classique sur les fonctions en classe de Seconde

Pour la proposition 1, selon que l'on considère que la quantification est universelle (c'est-à-dire pour toutes les fonctions qui ont ce tableau de variation) ou que la proposition ne concerne qu'UNE fonction dont on ne connaît que son tableau de variation, la réponse change de « Fausse » à « On ne peut pas savoir ».

Un autre point qui est souvent passé sous silence est l'explicitation du domaine d'astreinte de la variable. Sans cette précision, il est impossible de se prononcer sur la vérité d'une implication. Comment répondre à la question **b)** de l'exercice ci-dessous (figure 14) :

112 Implication et réciproque

Pour chaque implication, dire si elle est vraie puis énoncer sa réciproque et dire si elle est vraie.

a) Si $x = 0$ ou $x = 3$, alors $x^3 - 9x = 0$.

b) Si $x^2 \geqslant 1$, alors $x \geqslant 1$.

c) Si $x \in [0\ ;\ 8]$, alors $\dfrac{x-1}{-x+6} > 0$.

Figure 14. Extrait du manuel Hyperbole Nathan Seconde 2019

En effet, si x est un réel, réel positif, voire même un entier naturel, la réponse est différente.

Cette absence de la quantification est même rencontrée dans les sujets de Bac. A notre connaissance, un seul sujet de Bac a eu pour objet de déterminer la vérité d'une implication. C'est celui du Bac S de Nouvelle-Calédonie en 2015. Voici le début de l'exercice 3 (figure 15) :

EXERCICE 3
Commun à tous les candidats

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

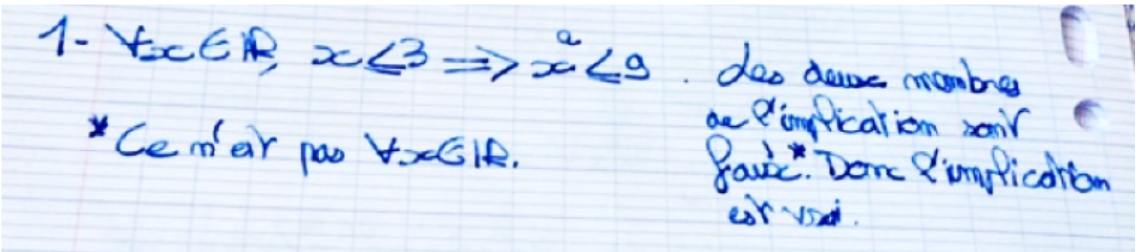
$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Figure 15. Extrait de l'exercice 3 du sujet du Bac S de Nouvelle-Calédonie 2015

Nous supposons que l'expression « soient x, y et z trois nombres réels » inclut pour les auteurs une quantification universelle. Comment alors comprendre que quand on veut prouver une proposition universellement quantifiée du type « $\forall x, P[x]$ », on commence à écrire dans la démonstration « soit x un élément ». Il serait nettement plus simple de prendre l'habitude d'écrire « Pour tout x … » dans l'énoncé de l'implication à démontrer et de commencer la démonstration par « soit x … » et de conclure en reprenant l'expression « Pour tout x … ».

Mais indiquer explicitement la quantification ne résout pas tout. En effet, lors d'un travail en Terminale sur la vérité de l'implication « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$ », voilà ce qu'ont écrit deux élèves (figure 16) :



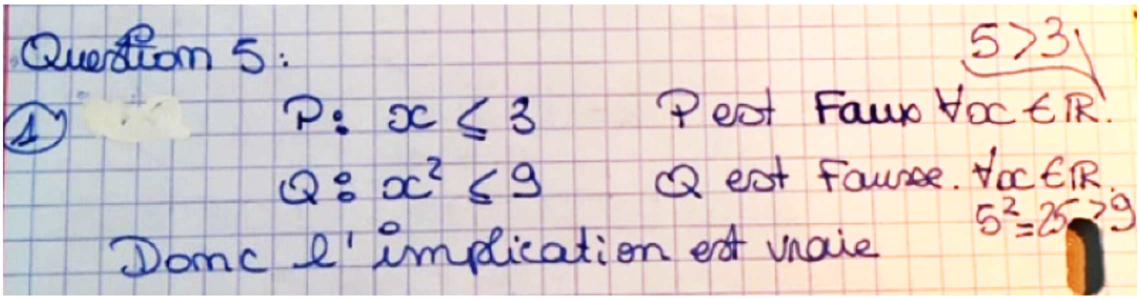


Figure 16. Extraits de copies d'élèves de Terminale S (2018-2019)

Ces deux élèves ont confondu la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$ » avec la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 9$ ». C'est pour cela qu'ils affirment que les deux membres de l'implication sont faux et que le deuxième élève donne 5 comme contre-exemple de « $x \leq 3$ » et de « $x^2 \leq 9$ ». Pourtant, ils ont bien intégré que $P \Rightarrow Q$ est vraie si P et Q sont fausses. Il serait préférable de mettre des parenthèses (au moins au début de l'apprentissage) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9)$$

Négation de l'implication

Nous avons vu précédemment que la négation d'une implication n'est pas une implication. Ce point n'est pas souvent explicité et une règle-en-acte, courante chez les élèves, concernant la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est que celle-ci est « non $P \Rightarrow$ non Q ». Un travail spécifique doit être mené sur la négation et sur la réciproque.

Dans beaucoup d'exercices de Vrai-Faux, on demande si une implication est vraie ou fausse. C'est à ce moment-là que l'on peut donner la table de vérité de l'implication, expliciter que montrer qu'une implication est fausse, revient à montrer que sa négation est vraie et donc formuler la négation de l'implication. Notons également que c'est aussi essentiel de savoir nier une implication si on veut la démontrer par l'absurde (voir paragraphe 3.4.).

Formulation d'une implication

Les propriétés mathématiques ne sont pas toujours écrites sous la forme d'une implication. Il faut savoir repérer dans les différentes formulations l'implication sous-jacente. Par exemple si on considère la propriété « deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles ». Cette propriété n'est pas écrite sous la forme d'un « si … alors ». Il faut être capable de traduire en « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles ». On peut remarquer qu'ici la quantification universelle est implicite et est même rarement explicitée notamment dans les théorèmes de géométrie. Cet exercice de reformulation peut sembler simple mais la pratique avec les élèves nous prouve le contraire.

Un autre exercice peut consister à préciser la prémisse, la conclusion d'une propriété implicative et la quantification quand elle est implicite. Prenons par exemple la propriété « si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ». Il faut comprendre que la prémisse est la proposition P « D_1 parallèle à D_2 et D_1 perpendiculaire à Δ » et que la conclusion est « D_2 perpendiculaire à Δ », ceci avec la quantification implicite « pour toutes droites D_1, D_2 et Δ du plan ». Il faut bien remarquer que la proposition P ne correspond pas à la partie de la propriété qui est énoncée entre le « si » et le « alors ». C'est une vraie difficulté pour les élèves.

Un exemple assez caractéristique de ce problème est le suivant : « l'équation (E) n'admet pas de solution positive ». Si on traduit sous la forme « si … alors », on obtient « si α est solution de (E) alors $\alpha < 0$ ». Cette formulation est ici très éloignée de l'énoncé de départ. Notons au passage que cette proposition est vraie pour l'équation dans $\mathbb{R}$ « $x^2 = -1$ », il s'agit encore d'un exemple où l'implication est vraie avec une prémisse fausse.

Enfin, un dernier exemple avec la propriété « Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ où C est un réel ». Cet énoncé est en fait une équivalence entre les propositions « f vérifie $y' = ay$ » et « f est définie par $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ »[2]. Ainsi pour démontrer cette propriété, on va démontrer deux implications réciproques l'une de l'autre. Ce travail de traduction doit être fait et ne peut être passé sous silence. Dans l'extrait ci-dessous, cette explicitation n'est pas faite (figure 17).

[2] On peut aussi voir cette équivalence comme l'égalité de deux ensembles : l'ensemble des fonctions vérifiant $y'=ay$ et l'ensemble des fonctions définies par $f(x)=C\mathrm{e}^{ax}$.

A Équations différentielles $y' = ay$

Propriété

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel.

Démonstration

- La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$, avec k nombre réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = kae^{ax}$, donc $f_k'(x) = af_k(x)$ et f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Réciproquement, on considère une solution g sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = g(x)e^{-ax}$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\phi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$ donc $\phi'(x) = 0$.

Ainsi ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel k tel que pour tout réel x, $\phi(x) = k$, soit $g(x)e^{-ax} = k$. On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = ke^{ax}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

Figure 17. Extrait Hyperbole Nathan Terminale 2020

Ces formulations rendent plus difficile l'énoncé de la réciproque ou de la contraposée et peuvent engendrer des difficultés à résoudre certaines questions. Par exemple, prenons l'énoncé suivant : démontrer que pour tous réels a et b différents de -1, $a + b + ab \neq -1$. Cet énoncé peut se traduire par : pour tous réels a et b, $(a \neq -1 \; et \; b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1$. Ecrit sous cette forme, démontrer sa contraposée s'impose comme solution possible. Effectivement, celle-ci n'est pas compliquée à démontrer, le plus difficile a été de repérer l'implication implicite pour pouvoir ensuite écrire la contraposée.

Il n'est pas question dans notre propos de s'interdire ces différentes formulations, elles ont un avantage certain de concision. En revanche un travail de « traduction » auprès des élèves, comme ci-dessus, est nécessaire.

Comment démontrer une implication ?

Pour démontrer une implication (c'est-à-dire démontrer qu'elle est vraie), plusieurs méthodes sont possibles :

- Démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- Utiliser les valeurs de vérités de P et Q
- Démontrer la contraposée
- Démontrer par l'absurde
- Démontrer par disjonction des cas

Démonstration d'une implication en démontrant que si la prémisse est vraie alors le conséquent est vrai

Pour démontrer qu'une implication est vraie, le raisonnement le plus fréquemment utilisé (voire le seul utilisé) dans l'enseignement est le suivant : on suppose la prémisse P vraie et on démontre que sous cette hypothèse le conséquent Q est vrai. Il est important de souligner que cela suffit. En effet si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est nécessairement vraie. Il est donc inutile de considérer ce cas. Nous donnons un exemple de ce type de démonstration.

Enoncé

Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Démonstration

Il faut reconnaître l'implication :

pour tous a et b rationnels, $(a \in \mathbb{Q}$ et b $\in \mathbb{Q}) \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$.

Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \frac{p}{q}$. De même, il existe $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = \frac{p\prime}{q\prime}$. Alors $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p\prime}{q\prime} = \frac{pq' + qp\prime}{qq\prime}$.

Or le numérateur $pq' + qp'$ est élément de $\mathbb{Z}$ et le dénominateur qq' est élément de $\mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b$ est bien de la forme $\frac{p"}{q"}$ avec $p" \in \mathbb{Z}$ et $q"" \in \mathbb{N}^*$, donc $a + b \in \mathbb{Q}$.

On a bien démontré que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Remarque

Dans cet exemple, peu d'opérations ont été nécessaires pour arriver au résultat : écriture de nombres rationnels, calcul de somme en réduisant au même dénominateur, vérification de l'appartenance du numérateur, du dénominateur puis du quotient aux bons ensembles. L'utilisation de l'hypothèse *a* et *b* nombres rationnels a été immédiate, mais ce n'est pas toujours le cas, cela dépend fortement de la question posée.

Démonter une implication en utilisant les valeurs de vérité de la prémisse et du conséquent

Dans cette méthode, on démontre que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie en utilisant les valeurs de vérité des propositions *P* et *Q*. Il y a donc trois cas : *P* fausse et *Q* fausse ; *P* fausse et *Q* vraie ; *P* et *Q* vraies. Le fait de savoir que *Q* est vraie est indépendant du fait de savoir que *P* est vraie. Nous allons examiner deux exemples où cette méthode est présente.

Enoncé

Démontrer que :

pour tout entier naturel *n*, $(10^n + 1$ divisible par 9$) \Rightarrow (10^{n+1}$ divisible par 9.

Démonstration

La somme des chiffres de $10^n + 1$ est égale à 2. D'après le critère de divisibilité par 9, on obtient que $10^n + 1$ n'est pas divisible par 9. Donc l'implication demandée est vraie car sa prémisse est fausse.

Remarque

Cet exercice est souvent proposé aux élèves, lors du travail sur le raisonnement par récurrence, pour illustrer une propriété héréditaire mais toujours fausse. Très souvent, les enseignants donnent la démonstration de l'implication avec la première méthode (si la prémisse est vraie alors le conséquent est vrai). Il nous semble important de citer la démonstration qui donne l'occasion de revenir sur la table de vérité de l'implication.

Voici un deuxième exemple où cette méthode a un caractère nécessaire.

Enoncé

Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ où $P[n]$ est la proposition ouverte $\frac{3^n}{n!} \leq 2^{7-n}$?

Démonstration

Soit n tel que $P[n]$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{3^n}{n!} \leq 2^{7-n}$.

Nous en déduisons $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3^n}{n!} \times \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \times 2^{7-n}$.

Pour obtenir $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq 2^{6-n}$, il suffit que $\frac{3}{n+1} \times 2^{7-n} \leq 2^{6-n}$ ce qui équivaut à $n+1 \geq 6$ soit $n \geq 5$.

Par conséquent, nous pouvons déjà affirmer que la proposition « pour tout $n \geq 5, P[n] \Rightarrow P[n+1]$ » est vraie.

La démonstration précédente ne permet pas de conclure pour $n < 5$. Pour cela, examinons les propositions $P[0]$, $P[1]$, …, $P[5]$.

$P[0]$ s'écrit : $1 \leq 2^7$ donc $P[0]$ est vraie.

$P[1]$ s'écrit : $3 \leq 2^6$ donc $P[1]$ est vraie.

$P[2]$ s'écrit : $\frac{9}{2} \leq 2^5$ donc $P[2]$ est vraie.

$P[3]$ s'écrit : $\frac{9}{2} \leq 2^4$ donc $P[3]$ est vraie.

$P[4]$ s'écrit : $\frac{27}{8} \leq 2^3$ donc $P[4]$ est vraie.

$P[5]$ s'écrit : $\frac{81}{40} \leq 2^2$ donc $P[0]$ est vraie.

Ces six propositions sont vraies, nous pouvons en déduire que les cinq implications $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ pour n variant de 0 à 4 sont vraies.

Nous avons donc démontré que « pour tout entier naturel n, $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ » est vraie.

Remarque

Dans cet exemple, nous avons démontré que $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ est vraie pour n variant de 0 à 4 en montrant que cette implication est vraie car la prémisse et le conséquent sont vrais. Nous avons seulement utilisé les valeurs de vérité de P et de Q pour prouver $P \Rightarrow Q$. La démonstration de ces cinq implications illustre la méthode que nous voulions mettre en exergue. Notons que pour $n \geq 5$, nous avons supposé $P[n]$ vraie et nous avons prouvé alors que $P[n + 1]$ était vraie. On retrouve la méthode courante pour démontrer qu'une implication est vraie. Ainsi, l'intérêt de cet exercice est de faire cohabiter les deux premières méthodes pour démontrer une implication.

3.3. Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence d'une implication et de sa contraposée : P et Q étant deux propositions quelconques, $P \Rightarrow Q$ est équivalent à non $Q \Rightarrow$ non P. Pour cela, on suppose (non Q) et on en déduit (non P). Nous donnons un exemple où nous démontrons une implication en démontrant sa contraposée, ce qui revient donc à démontrer une autre implication.

Enoncé

Démontrer que pour tout x réel non nul, $\sqrt{x^2+1} \neq 1+\frac{x^2}{2}$.

Démonstration

Il s'agit de prouver l'implication : pour tout réel x, si $x \neq 0$ alors $\sqrt{x^2+1} \neq 1+\frac{x^2}{2}$.

La contraposée de cette implication s'écrit : pour tout réel x, si $\sqrt{x^2+1} = 1+\frac{x^2}{2}$ alors $x = 0$.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x^2+1} = 1+\frac{x^2}{2}$. En élevant au carré, on obtient $x^2+1 = 1+x^2+\frac{x^4}{4}$, d'où $\frac{x^4}{4} = 0$ et on en déduit $x = 0$.

La contraposée est vraie, donc l'implication de départ est vraie.

Remarque

Il a fallu traduire l'énoncé pour faire apparaître une implication pour ensuite la démontrer par un raisonnement par contraposition. Remarquons qu'on aurait pu démontrer le résultat en effectuant un raisonnement par l'absurde. Dans ce cas, la quantification serait alors différente : on supposerait qu'il existe x non nul tel que l'on ait l'égalité. On aboutirait à la proposition : $x = 0$, ce qui est impossible puisque x est non nul. Ce raisonnement, nous semble-t-il, n'est pas plus simple à comprendre du fait de la négation d'une proposition universelle. Un travail spécifique sur le raisonnement par l'absurde nous a montré que ce raisonnement était difficile à comprendre.

Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par l'absurde

Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, par un raisonnement par l'absurde, on suppose que $P \Rightarrow Q$ est fausse c'est-à-dire que non $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et donc que P est vraie et Q est fausse. Puis en utilisant les deux hypothèses (P est vraie et Q est fausse) et des théorèmes ou propositions déjà démontrées, on montre qu'on aboutit à une certaine proposition auxiliaire, disons R. Soit on sait de manière indépendante que R est fausse (résultat connu), soit on montre que $P \Rightarrow Q$ implique que R est vraie et fausse.

Ainsi, on a les deux cas suivants :

((P et non Q) $\Rightarrow$ R) vraie et R fausse

((P et non Q) $\Rightarrow$ (R et non R)) vraie

Dans les deux cas, on a une implication vraie avec le conséquent faux (R fausse ou (R et non R) proposition qui est fausse quelle que soit R). D'après la table de vérité de l'implication, la prémisse est alors fausse. Ainsi (P et non Q) est fausse, d'où $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Notons que la proposition R du second cas peut être la proposition (non P). Dans ce cas, si, pour aboutir à cette contradiction, on utilise explicitement l'hypothèse P, on a alors effectivement un raisonnement par l'absurde, mais si on arrive en fait à montrer (non P) à partir de (non Q) sans utiliser P, le raisonnement peut alors être rédigé comme un raisonnement par contraposée. Ce cas arrive fréquemment dans les exemples que l'on propose aux élèves notamment dans les manuels.

Voici maintenant un exemple de démonstration d'une implication par l'absurde.

Enoncé

Démontrer que si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles.

Démonstration

On doit démontrer l'implication suivante : pour toutes droites $(D_1), (D_2)$ et (Δ) du plan, si (D_1) est parallèle à (Δ) et si (D_2) est parallèle à (Δ), alors (D_1) et (D_2) sont parallèles.

On va démontrer par l'absurde cette implication. On suppose qu'il existe $(D_1), (D_2)$ et (Δ) trois droites vérifiant (D_1) parallèle à $(\Delta), (D_2)$ parallèle à (Δ) et (D_1) non parallèle à (D_2).

Soit A le point d'intersection de (D_1) et (D_2). Ainsi (D_1) est une droite parallèle à (Δ) passant par A ainsi que la droite (D_2). Or, d'après l'axiome d'Euclide, il n'existe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Donc les droites (D_1) et (D_2) sont confondues. Ceci est faux puisque ces droites sont sécantes. Ainsi la proposition (D_1) parallèle à $(\Delta), (D_2)$ parallèle à (Δ) et (D_1) non parallèle à (D_2) est fausse.

L'implication de départ est vraie.

Remarque

Pour cette démonstration il a été nécessaire d'écrire la négation de l'implication avec la bonne quantification. Si on se réfère à la structure du raisonnement par l'absurde donnée plus haut, nous sommes dans le deuxième cas. P est la proposition «(D_1) est parallèle à (Δ) et (D_2) est parallèle à (Δ)», Q est la proposition « (D_1) et (D_2) sont parallèles » et R la proposition « (D_1) et (D_2) sont confondues ». Cette démonstration ne semble pas pouvoir se réduire à un raisonnement par contraposition car la proposition P est nécessaire (la droite (Δ) n'est pas introduite dans la proposition Q).

Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas

Deux schémas du raisonnement par disjonction des cas se présentent :

- la prémisse de l'implication est la disjonction de deux (ou plus) propositions « $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ » ;
- l'ensemble d'astreinte de la variable est la réunion de deux (ou plus) ensembles « pour tout x appartenant à $E_1 \cup E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ ».

Pour le premier cas, les propositions « $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ » et « $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ » sont logiquement équivalentes, ce qui justifie la structure du raisonnement par disjonction des cas. En effet, « (P ou Q) $\Rightarrow R$ » équivaut à « R ou non (P ou Q) », équivaut à « R ou (non P et non Q) », équivaut à « (R ou non P) et (R ou non Q) » équivaut à « $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ ». Pour le deuxième cas, il est clair qu'il suffit de démontrer les deux implications « $\forall x \in E_1, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » et « $\forall x \in E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ ».

Voici un exemple de démonstration d'une implication par un raisonnement par disjonction des cas (premier schéma).

Enoncé

Démontrer la proposition : pour tout entier naturel n, si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3.

Démonstration

Pour n entier naturel, soit $P[n]$ la proposition : « n n'est pas divisible par 3 » et $Q[n]$ la proposition « $n^2 - 1$ est divisible par 3 ».

Soit n entier naturel. n n'est pas divisible par 3 si et seulement si le reste de la division de n par 3 est 1 ou 2.

$P_1[n]$ est la proposition : « le reste de la division de n par 3 est 1 ».

$P_2[n]$ est la proposition : « le reste de la division de n par 3 est 2 ».

$P[n]$ est équivalent à ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$).

On doit donc démontrer : pour tout entier naturel n, ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$) $\Rightarrow Q[n]$. Il suffit de démontrer : pour tout entier naturel n, $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$ et $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$.

Démontrons : pour tout entier naturel n, $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$.

Soit n entier naturel. Supposons $P_1[n]$ vraie, alors il existe un entier naturel m tel que

$n = 3m + 1$.

Ainsi $n^2 - 1 = (3m+1)^2 - 1 = 9m^2 + 6m = 3(3m^2 + 2m)$ et donc $n^2 - 1$ est un multiple de 3 car $3m^2 + 2m$ est entier naturel.

Démontrons : pour tout entier naturel n, $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$.

Soit n entier naturel. Supposons $P_2[n]$ vraie, alors il existe un entier naturel m tel que

$n = 3m + 2$.

Ainsi $n^2 - 1 = (3m+2)^2 - 1 = 9m^2 + 12m + 3 = 3(3m^2 + 4m + 1)$ et donc $n^2 - 1$ est un multiple de 3 car $3m^2 + 4m + 1$ est entier naturel.

Donc on a démontré $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$ et $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$ qui est équivalent à ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$) $\Rightarrow Q[n]$.

On a bien démontré l'implication cherchée « pour tout entier naturel n, si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3 ».

Enfin nous donnons un deuxième exemple qui illustre le deuxième schéma.

Enoncé

Démontrer que : pour tout $x \in [2\,;\, +\infty[$, $\sqrt{x-2} \geq x - 4 \Rightarrow x \in [2\,;6]$.

Démonstration

L'ensemble d'astreinte de la variable est $E = [2\,;\, +\infty[$.

Comme on va envisager deux cas selon le signe de $x-4$, on va considérer le recouvrement de E en $E_1 \cup E_2$ avec $E_1 = [2\,;4[$ et $E_2 = [4\,;\ +\infty[$. Pour x élément de E, on note $P[x]$ la proposition « $\sqrt{x-2} \geq x-4$ » et $Q[x]$ la proposition « $x \in [2\,;6]$ ».

- Si $x \in E_1$, $P[x]$ est vraie puisque $x-4$ est négatif et $Q[x]$ est vraie. Donc l'implication « pour tout x de $E_1, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.
- Si $x \in E_2$, alors $x-4$ est positif ou nul. On en déduit que $x-2 \geq (x-4)^2$ c'est-à-dire $x^2-9x+18 \leq 0$ qui équivaut à $(x-3)(x-6) \leq 0$ et enfin à $x \in [3\,;6]$.
  Et si $x \in [3\,;6]$ alors $x \in [2\,;6]$. Donc l'implication « pour tout x de $E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.

Ainsi l'implication « pour tout x de $E, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.

Remarque

Dans le premier cas ($x \in E_1$), on a démontré l'implication sans déduire $Q[x]$ de $P[x]$ mais en examinant les valeurs de vérité de $P[x]$ et de $Q[x]$.

Conclusion : quelques points de vigilance

Nous concluons en exposant quelques conseils et points de vigilance pour l'enseignement de l'implication au lycée.

Nous avons vu que dans le langage courant avec l'expression « si … alors », il y avait très souvent une relation de causalité et de temporalité : la cause précède toujours la conséquence. Or en mathématiques, cette notion de temporalité n'est pas présente : un réel x n'est pas plus grand que 1 avant que son carré le soit. C'est pour cette raison qu'il faut être très prudent avec les exemples que l'on peut prendre dans la vie courante, d'autant plus qu'ils admettent très souvent beaucoup d'implicites. D'autre part cette expression « si … alors » dans le langage courant peut signifier l'équivalence.

Trop souvent l'implication n'est pas définie comme un connecteur logique qui détermine une nouvelle proposition (qui peut donc être vraie ou fausse). Par exemple, dans les manuels, on voit que $P \Rightarrow Q$ signifie que si P est vraie alors Q est vraie. On oublie de dire que c'est dans le cas où $P \Rightarrow Q$ est vraie. Il nous paraît indispensable de dire que $P \Rightarrow Q$ est une proposition et donner sa valeur de vérité en fonction des valeurs de vérité des propositions P et Q (la table de vérité est un bon moyen pour le faire). En particulier bien préciser que $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que P est fausse.

A partir de l'implication, bien définir les deux règles de raisonnement : le *modus ponens* et le *modus tollens*. Il est important de bien comprendre la différence entre ces deux modes de raisonnement et l'implication. D'autre part, énoncer la règle du *modus tollens* nous paraît intéressant (en effet, elle est « naturelle », les élèves l'emploient souvent lors d'une recherche de problème en disant par exemple « a n'est pas de solution de l'équation car en remplaçant x par a on n'obtient pas 0 »). Cette règle a l'avantage d'éviter un certain nombre de raisonnements par l'absurde et aussi par contraposition.

Il nous semble très important d'expliciter au maximum la quantification universelle. L'exercice de repérage des moyens d'exprimer cette quantification universelle avec différentes expressions (un, quelconque, tous…) doit être travaillé. Bien faire comprendre que sans cette quantification et sans la précision du domaine d'astreinte de la variable, il est impossible de se prononcer sur la vérité d'une proposition ouverte.

Un dernier point à travailler consiste à repérer les différentes formulations d'une proposition implicative. Certaines formulations sont très loin du « si … alors » avec très souvent une quantification implicite. Demander de citer alors la contraposée ou la réciproque est un exercice qui permet de travailler ce point.

Références bibliographiques

Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L, Grenier, D. (2018). Le raisonnement par l'absurde une étude didactique pour le lycée. *Petit x, 108*, 5-40. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR18018/IGR18018.pdf

Deloustal-Jorrand., V. (2004). L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. *Thèse de l'Université de Grenoble*.

Deloustal-Jorrand., V, (2001). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et point de vue d'élèves-professeurs. *Petit x, 55*, 35-70. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR01025/IGR01025.pdf

Durand-Guerrier., V, (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. Petit x, 50, 57-79. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR99258/IGR99258.pdf

Durand-Guerrier, V. (2005). Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. *Habilitation à Diriger des Recherches*. Université Claude Bernard - Lyon I.

Fabert, C., Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87*, 31-52. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR11017/IGR11017.pdf

Gardes, D., Gardes, M.L, Grenier, D, (2016). Etat des connaissances de Terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x, 100*, 67-98. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100x4_1568109550310-pdf

Grenier, D. (2014). La pratique des problèmes de recherche pour enseigner la logique et les raisonnements mathématiques. *Actes de la CORFEM, Grenoble*, 2014. https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2014_03.pdf

Gardes, D., Gardes, M.-L. (2019). Le raisonnement par l'absurde à la transition Lycée-Université. In *Actes du XXVI^e colloque de la CORFEM*, Strasbourg, 11-12 juin 2019.

Gardes, D., Gardes, M.-L. (à paraître). Le raisonnement à la transition lycée-université : que savent faire les élèves et les étudiants. In *Actes du XXVII^e colloque de la CORFEM*, Nantes, 9-10 juin 2022.

Mesnil, Z., Beaud, S. & Barbe, H. (2016). *Retour de notions de logique dans les programmes de lycée*. Atelier C2i Lycée, Bordeaux, 29 janvier 2016.

Rogalski J. et Rogalski M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 9 (pp. 175-203).* https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_09/adsc9-2004_000.pdf

Wason, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New horizons in psychology*. London: Penguin.