ACTES du colloque CORFEM 2023



XXIXè colloque pour les professeurs et les formateurs de mathématiques

Nantes – 8 et 9 juin 2023



Faculté des sciences et des techniques

ACADÉMIE DE NANTES
Liberté
Égalité
Fraternité

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Nantes

Nantes Université

cren Centre de Recherche en Éducation de Nantes

Coordonnés par Christine CHOQUET

La CORFEM, COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré, est une commission inter-IREM visant à :

- Echanger sur la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques,
- Capitaliser, valoriser et diffuser des ressources et des outils pour la formation des enseignants de mathématiques du second degré,
- Nourrir la formation des enseignants des apports de la recherche.

Cette commission regroupe des formateurs – PFA, PRCE, PRAG ou enseignants- chercheurs – formateurs en ESPE, qui souhaitent réfléchir sur les stratégies de formation, produire des documents et mutualiser des ressources sur la formation et l'enseignement des mathématiques, afin d'améliorer leur action auprès des étudiants se destinant au métier de professeur de mathématiques (masters MEEF, DU...).

Le présent document constitue les actes du 29è colloque de la CORFEM, qui s'est déroulé à Nantes, les 8 et 9 juin 2023.

Les thèmes abordés dans ces actes :

- **Thème 1 – Le calcul algébrique : amont et aval, sens et technique**
- **Thème 2 – Transposition de savoirs, concepts et méthodes didactiques dans la formation**

Pour le thème 1 :

Conférence de Lalina COULANGE - L'algèbre au collège : sur les pas du funambule ou à la recherche d'un fil entre outil et objet, entre sens et technique, entre syntaxe et sémantique…

Conférence de Hassane SQUALLI - Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel : recherches et perspectives curriculaires

Pour le thème 2 :

Conférence de Magali HERSANT – La transposition didactique des savoirs d e la didactique vers la formation des enseignants : quelques réflexions.

Conférence de Sylvie COPPE - Des savoirs didactiques aux savoirs professionnels : quelle transposition ?

THEME 1

Le calcul algébrique : amont et aval, sens et technique

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au collège et au lycée est au cœur des préoccupations des chercheurs en didactique des mathématiques, depuis plusieurs décennies déjà (Coulange, Drouhard, Dorier & Robert, 2012). Les recherches conduites sur cette thématique ont également trouvé une forme d'écho dans les ressources institutionnelles, mises à disposition des enseignant-e-s de mathématiques et des formateur-trice-s d'enseignant-e-s, et ce également depuis assez longtemps. Pour autant, nous faisons l'hypothèse que des questions liées à cette thématique restent vives et trouvent actuellement de nouvelles formes d'extension à la fois du point de vue de la recherche et de celui de la formation d'enseignants. Par exemple, d'aucun-e-s peuvent s'interroger sur :

- L'amont et l'aval du calcul algébrique. La perspective d'une « pensée algébrique » amène notamment à élargir le champ des connaissances et savoirs classiquement considérés comme relevant de l'algèbre élémentaire : en parlant de connaissances et de savoirs pré-algébriques ou de modélisation algébrico-fonctionnelle.
- Le calcul algébrique « entre sens et technique » (Coppé & Grugeon, 2009). Le « sens » (ou la quête du sens) peut renvoyer aux raisons d'être de l'algèbre et à l'outil algébrique (pour généraliser, démontrer, modéliser …) sans toutefois s'y résumer totalement. Par ailleurs, sous quelles conditions s'opère le retour à ou le travail de la « technique » ?

De telles questions renvoient à une réactualisation possible des ressources et outils pour l'enseignement et la formation d'enseignant-e-s au regard de recherches plus récemment conduites sur la thématique du calcul algébrique (Constantin, 2017) mais aussi pré-algébrique, algébrico-fonctionnel. D'autre part, elles peuvent conduire à dresser un premier bilan de la diffusion des recherches (plus anciennes) dans et pour l'enseignement et la formation d'enseignant-e-s de mathématiques en interrogeant les conditions d'une telle diffusion. Ainsi, il nous semble que si certains résultats de recherche diffusent « bien » en formation (entrée dans l'algèbre, différents statuts de la lettre, l'algèbre outil pour prouver, démontrer, etc.), les effets potentiels de cette diffusion dans les pratiques enseignantes restent encore largement à interroger.

Références

Constantin C. (2017). Techniques de calcul et systèmes de nombres : quelles articulations de l'école au collège ? *Actes du 24e colloque de la CORFEM*. https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2017_04.pdf

Coppé S., Grugeon B. (2009). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? *Actes du 16e colloque de la CORFEM.* https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959612/document

Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques*, H-S, RDM.

Conférence 1

L'algèbre au collège : sur les pas du funambule ou à la recherche d'un fil entre outil et objet, entre sens et technique, entre syntaxe et sémantique…

Lalina COULANGE - Université de Bordeaux, LaB-E3D (EA 7441)

Résumé

Les recherches en didactique ont longtemps dénoncé le fait que les savoirs algébriques étaient enseignés comme « morcelés » et privés de leurs fonctionnalités, voire de leurs raisons d'être (Chevallard, 1994) ou d'une dimension outil (Grugeon, 1997). De nombreux travaux ont visé à (re)donner du sens à l'algèbre comme outil pour modéliser, généraliser et/ou prouver, etc. Les résultats de ces recherches ont parfois trouvé une forme d'écho à la fois dans l'enseignement et la formation : se traduisant entre autres par la présence de situations de référence (comme celle des « carrés bordés »[1]) dans des ressources variées (dont institutionnelles) à destination d'enseignants ou de formateurs. Toutefois les retombées en termes d'apprentissages des élèves semblent toujours se faire attendre : le calcul algébrique apparait parfois même « extraordinairement » peu maîtrisés par certains élèves aujourd'hui, et ce, jusqu'à l'entrée à l'université.

Si un tel constat peut conduire à réinterroger les conditions de diffusion des recherches en didactique dans l'enseignement et la formation (Coulange & Grugeon, 2008 ; Assude, Coppé & Pressiat, 2012 ; Coppé & Grugeon, 2009), cela m'a pour ma part, conduite à vouloir (re)questionner des formes d'équilibres à (re)trouver entre sens et technique, entre outil et objet mais aussi, entre des dimensions syntaxique et sémantique des écritures symboliques en algèbre (Drouhard, 1995 ; Drouhard & Panizza, 2012).

A l'occasion de cette présentation, je reviendrai tout d'abord sur la question des techniques de calcul algébrique et sur ce qui paraît lacunaire dans la mise en œuvre de ces techniques par les élèves, du point de vue des transformations d'écritures symboliques – et ce, dès le début de l'enseignement de l'algèbre élémentaire (Constantin, 2017). Plusieurs phénomènes apparus au fil d'observations conduites dans différents contextes de recherche mais aussi de formation, viendront étayer un tel constat. Ils contribuent à interroger de manière inédite, les pratiques enseignantes en vue de mieux les enrichir, par exemple en se posant la question du discours enseignant qui « accompagne » les transformations d'écritures (Barthes-Garnier, Coulange & Hache, 2022).

Puis sur les « pas du funambule », je reviendrai sur l'outil algébrique, mais en invitant à ne négliger ni la dimension sémantique cette fois, ni ses mises en relation avec la dimension syntaxique qui aura été largement explorée avant. Si le temps le permet, j'explorerai à cet effet, différentes directions liées à différents registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) et associées à différents cadres (géométrie, grandeurs, arithmétique et même algébrique) (Douady, 1986) qui me semblent avoir potentiellement un rôle important à jouer de ce point de vue.

[1] Tirée de l'ouvrage « les débuts de l'algèbre au collège » (Combier, Guillaume et Pressiat, 1996).

Conférence 2

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel : recherches et perspectives curriculaires.

Hassane SQUALLI - Université de Sherbrooke

Résumé

L'idée que l'apprentissage de l'algèbre doit venir après celui de l'arithmétique a longtemps prévalue dans la communauté des éducateurs en mathématiques et marque encore les programmes d'études de plusieurs pays. Mais le passage pour les élèves d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose toujours problème. Vergnaud (1986) parle d'une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre : opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique et opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Dans les années 90, un mouvement international a eu lieu pour réformer l'enseignement de l'algèbre à l'école. Il a donné lieu au courant Early Algebra qui réfère à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement précoce de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel, c'est à dire, dès le début du primaire jusqu'à la fin du secondaire. Il remet ainsi à l'ordre du jour la signification de l'algèbre et de la pensée algébrique, ainsi que la relation entre arithmétique et algèbre, entre pensée algébrique et pensée arithmétique.

La perspective Early Algebra a influencé les curriculums des mathématiques à l'école primaire et secondaire de plusieurs pays. Depuis les années 2000, nous assistons à l'émergence de programmes de mathématiques de différents pays, visant de manière explicite le développement précoce de la pensée algébrique. C'est le cas des états unis d'Amérique, de toutes les provinces canadiennes (sauf le Québec), de plusieurs pays d'Asie (Chine, Singapour, Corée du sud, etc.), Australie, Brésil, etc. Selon certains chercheurs de ce mouvement (Kaput, 1998 ; Carraher et Schliemann, 2007 ; Squalli, 2004, Squalli, Mary et Marchand, 2011) l'hypothèse actuelle concernant le courant Early Algebra est qu'il ne doit pas être perçu comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire, une préalgèbre. Il est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certaines notions et concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de variable et de variation, entre autres). Plusieurs travaux, dont notamment ceux réalisés par des chercheurs du Québec, France, Brésil, Maroc, Tunisie, Bénin, Belgique de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA), montrent que les élèves du primaire et du début du collège manifestent une pensée algébrique dans la résolution de problèmes de généralisation (Vlassis, Demonty, Squalli, 2017 ; Abouhanifa, Squalli, 2019) et de comparaison (Adihou et al., 2015, Oliveira et Rhéaume, 2014).

Dans cette conférence, je présente brièvement le contexte d'émergence du mouvement *Early Algebra*, ainsi que des questions qui font débat chez les chercheurs. Ensuite, j'expose un cadre de référence de l'algèbre et de la pensée algébrique, ce qui me permettra à travers des

exemples de montrer quelques caractéristiques essentielles de la pensée algébrique et leurs distinctions avec la pensée arithmétique. Enfin, je présente quelques résultats de recherches empiriques portant sur des enjeux importants du développement de la pensée algébrique chez des élèves de fin primaire et du début du collège.

Références

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

Abouhanifa, S., Squalli, H (2019). Les stratégies exprimées par les élèves dans la résolution d'un problème de généralisation algébrique. Communication présente au 4e Colloque de l'OIPA, L'enseignement et l'apprentissage de la pensée algébrique entre 5 et 14 ans. 6 et 7 mars 2019, Université de Liège, Belgique

Carraher, D. W. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669–705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kaput, J.J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In the Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum (pp. 25-26). Washington, D.C. : National Academy Press.

Oliveira, I. & Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils ? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. Canadian Journal of science, mathematics and technology education, 14(4), 404-423.

Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Université Laval.

Squalli, H. (2004). Plaidoyer en faveur d'une algébrisation des mathématiques de l'école primaire. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques 2002. Université du Québec à Trois-Rivières. Trois-Rivières, Québec.

Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique (Vol. 1, pp. 65-78). De Boeck Supérieur.

Vergnaud, G. (1986), Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre in Actes du premier colloque franco-allemand de didactique. Éditions La Pensée Sauvage.

Vlassis, J., Demonty, I., & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20(3), 131-155.

ATELIERS

Atelier A11 - De la formulation d'un problème à sa résolution algébrique

Jean-Claude Rauscher[2] & Sophie Bauerle[3]

IREM, Université de Strasbourg, UFR Mathématiques et Informatique.

Résumé : Utiliser des équations pour résoudre des problèmes nécessite d'avoir pris conscience des différentes manières d'utiliser des lettres, des symboles d'opération et le symbole de relation « = » pour écrire l'équation qui va permettre de résoudre le problème. Avec un groupe de professeurs de collège à l'IREM de Strasbourg nous avons abordé cette question à partir de nos observations et de l'article de R. Duval et F. Pluvinage (2016). Notre travail nous a conduit à prendre une approche sémio-cognitive et à élaborer des activités originales dont le but est la prise de conscience individuelle par les élèves des différentes opérations en jeu dans la mise en équation d'un énoncé. Quelles sont ces opérations, quelles sont ces activités ? Et quels en sont les effets ? C'est ce que nous voulons faire découvrir et présenter aux participants de cet atelier en les invitant tout d'abord à analyser d'une part une tâche de résolution de problème et d'autre part des activités que nous avons proposées aux élèves.

Introduction

Le contexte et la problématique

L'expérience dans une classe de 3ème que nous avons présentée dans cet atelier résulte du travail du groupe « Apprentissages algébriques au collège » (IREM de Strasbourg) composé de professeurs de mathématiques en collège. Considérant que l'introduction de l'algèbre élémentaire au collège soulève des difficultés qui ne sont pas d'abord mathématiques ou conceptuelles, ce groupe a pris le parti d'une approche sémio-cognitive de l'enseignement de l'algèbre, (Rauscher, Bauerle-Schoenenberger, 2021). Ce renversement de perspective s'est imposé en suivant durant trois ans un élève en difficulté (Rauscher, 2020). En particulier, nos observations ont montré que l'utilisation d'équations requiert la compréhension des différentes manières de transformer un problème en utilisant uniquement des chiffres, des lettres, des symboles d'opération et le symbole « = » qui permettent des calculs (Duval & Pluvinage, 2016, p.138). Notre travail nous a donc conduit à élaborer des activités sémio-cognitives originales dont le but est la prise de conscience individuelle par les élèves des différentes opérations en jeu dans la mise en équation d'un énoncé.
Quelles sont ces opérations, quelles sont ces activités ? Et quels en sont les effets ? Ce sont les questions auxquelles nous avons voulu répondre en présentant l'expérimentation qui a été menée dans la classe de 3ème de Sophie Bauerle au collège Romain Roland à Erstein de novembre 2022 à mai 2023.

Les modalités de l'atelier

[2] Jean-Claude Rauscher, IREM de Strasbourg, MCF en retraite, jc.rauscher@wanadoo.fr
[3] Sophie Bauerle, IREM de Strasbourg, collège Romain Rolland Erstein, sophie.bauerle@ac-strasbourg.fr

L'atelier a comporté deux phases. Dans une première phase nous avons invité les participants à effectuer un travail préliminaire. Cette phase avait essentiellement pour fonction d'amorcer l'entrée dans la perspective sémio-cognitive qui sous-tend le travail effectué avec cette classe et de familiariser les participants avec les tâches en jeu dans le parcours effectué avec les élèves. Pour cela nous avons invité les participants à analyser a priori certaines tâches que nous avions proposées aux élèves de cette classe. D'une part, il s'agissait d'analyser la complexité de cinq énoncés dans la perspective d'une mise en équation. D'autre part d'esquisser une analyse des tâches en termes de systèmes sémiotiques d'expression que les élèves de 3ème ont rencontrées (expressions numériques, littérales, langue naturelle…) dans certaines activités. Ayant, à cette occasion, développé des analyses très pertinentes, les participants étaient dès lors préparés pour nous suivre dans la deuxième phase de l'atelier qui consistait à présenter et à discuter de notre aventure avec les élèves de cette classe.

Les aventures d'une classe de 3ème (novembre 2022/mai 2023)

Une activité préliminaire permettant la prise de conscience de deux opérations de désignation de valeurs numériques ou de relation en algèbre.

Au début de l'année scolaire, avant que ne s'engage avec les élèves le travail concernant la résolution algébrique de problèmes, ils ont eu l'occasion de pratiquer l'activité originale qu'il est important de présenter ici pour deux raisons. D'abord elle permettait aux élèves d'ouvrir leur horizon quant aux usages de lettres en algèbre. Elle prend en effet en considération qu'un problème didactique majeur que pose l'introduction de l'algèbre est celui même qui se pose déjà dans l'emploi de la langue naturelle, à savoir la prise de conscience par les élèves de la diversité complexe des procédures discursives pour désigner les objets (Duval, 2002, p.68). Ensuite, elle a servi par après dans notre classe de 3ème de support pour d'autres activités originales. Elle a été élaborée et testée les années précédentes dans plusieurs classes de collège dans le cadre de notre groupe IREM (Rauscher, Bauerle-Schoenenberger, 2021).

A l'origine de cette activité, se trouve un diagnostic effectué à partir des observations réalisées lors de l'accompagnement individuel d'un élève en difficulté, Jonathan, (Rauscher, 2020). Une réaction de cet élève lors de la résolution d'un problème classique[3] témoignait en effet d'une conception figée du statut de la lettre en algèbre, une conception qui empêche d'entrer dans un processus de mise en équation d'un problème. Après avoir compris que sa réponse *(10g et 100g*) était fausse parce qu'elle ne remplissait pas toutes les contraintes exigées par l'énoncé, il acceptait, suite à suggestion, d'appeler « *x* » le poids du bouchon. C'était là un rituel qui lui était familier. Mais quand il lui a été lui a demandé d'exprimer alors le poids de la bouteille en fonction du poids du bouchon, il a eu une réaction très révélatrice *: « On ne peut pas savoir car on ne sait pas le poids du bouchon ».* Elle montrait d'une part qu'il n'avait pas la souplesse de penser qu'il faut transitoirement considérer cette lettre comme libre de toute affectation prédéterminée, et d'autre part qu'il n'imaginait pas désigner deux objets différents avec une seule et même lettre. Et les explications restaient sans effet. D'ailleurs l'injonction de commencer en désignant par une lettre le poids du bouchon ne pouvait qu'empêcher cette souplesse. Il avait donc une conception figée de l'usage d'une lettre en algèbre : « Une lettre = un nombre », utile lorsqu'il s'agit d'appliquer une formule mais insuffisante quand il s'agit d'amorcer la mise en équation d'un énoncé. On voit bien ici que résoudre algébriquement un problème donné par un énoncé ne relève pas d'une traduction ou d'un codage immédiatement accessible à l'aide de lettres, mais d'une conversion entre des systèmes de représentation hétérogènes où les opérations de désignation des objets ne sont pas les mêmes. Pour entreprendre la mise en équation d'un énoncé, il est nécessaire d'avoir déjà conscience de la possibilité de deux opérations de désignation à l'aide d'une lettre dans le registre des écritures symboliques : *« Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?* »

- l'opération de condensation d'un ensemble de nombres par une lettre
- l'opération de désignation fonctionnelle de deux ensembles corrélés de nombres à l'aide d'une lettre

C'est pour que cet élève et les élèves en général puissent véritablement prendre conscience de ces opérations, c'est-à-dire, de façon irréversible, les reconnaître et les mettre en œuvre que nous leur avons proposé l'activité « *Tableaux à compléter* » :

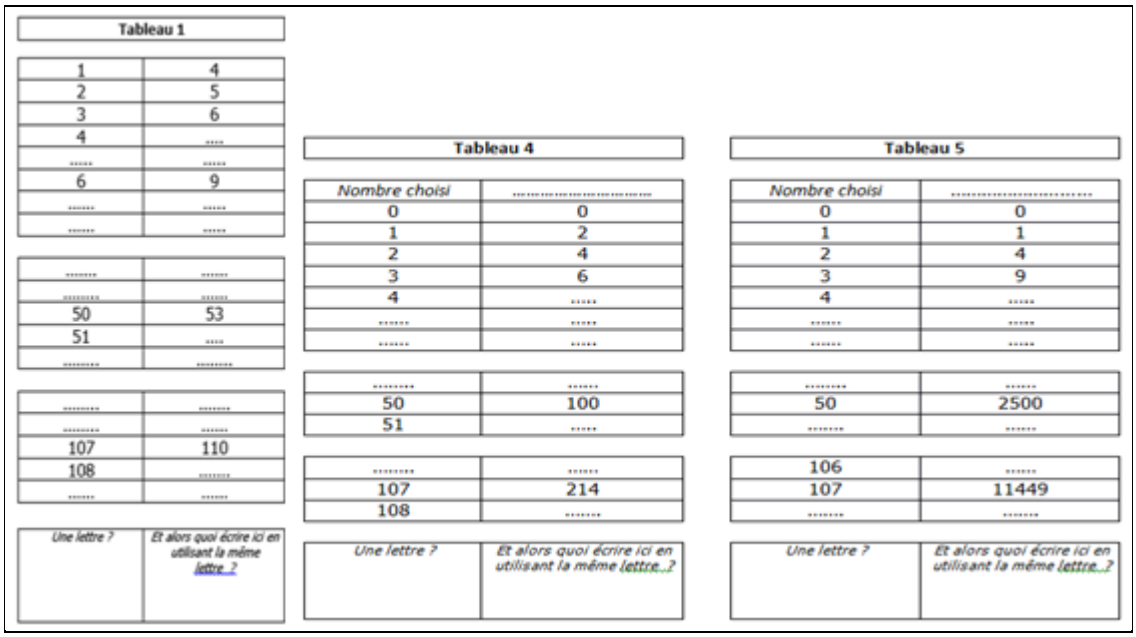


Tableau 1

1	4
2	5
3	6
4	....
.....	.....
6	9
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
50	53
51	....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
107	110
108	.....
.....	.....
Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?*

Tableau 4

Nombre choisi	.....
0	0
1	2
2	4
3	6
4	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
50	100
51	.....
.....	.....
107	214
108	.....
Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre...?*

Tableau 5

Nombre choisi	.....
0	0
1	1
2	4
3	9
4	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
50	2500
.....	.....
106	.....
107	11449
.....	.....
Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre...?*

Figure 1 : Tableaux à compléter

Ces tableaux mettent en parallèle en premier lieu deux listes corrélées de nombres entiers entre lesquelles existe une relation. Ils comportent :

- une partie « numérique » à compléter où sont amorcées deux listes de nombres potentiellement illimitées liées par une relation qui n'est pas difficile à deviner.
- une partie « algébrique » appelant à l'utilisation d'une lettre pour désigner le lien entre les deux listes
- une partie appelant une expression langagière pour désigner le lien entre les deux listes.
-

La tâche qui consiste à remplir le tableau 1 provoque une prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle possibles à l'aide d'une lettre. Elle a été testée sur des classes de différents niveaux. Indépendamment du fait que les élèves aient déjà eu l'occasion de fréquenter systématiquement « l'algèbre » ou pas, nous avons observé que ces opérations ne sont pas effectuées spontanément. Arrivés à la partie algébrique de nombreux élèves ne savent plus quoi faire et demandent de l'aide, d'autres écrivent l'opérateur « *+3* » dans la case qui fait face à la lettre ou encore *« ajouter 3 »*. Et de façon plus surprenante encore, nous avons souvent rencontré, à tous niveaux de collège, des propositions qui consistent à choisir une lettre pour la première case et la lettre située trois rangs plus loin dans l'ordre alphabétique (Rauscher, Bauerle-Schoenenberger, 2023, p384). C'est en se contentant strictement de leur rappeler patiemment la consigne *« Quoi écrire avec la même lettre ?»* que tous les élèves remplissent individuellement la tâche, mais pas tous en même temps. Laisser le temps aux élèves de prendre l'initiative eux même est la condition de ces prises de conscience qui se manifestent par des visages souriants et des réactions spontanées : *« Ah oui c'est ça !!! C'est tout bête ! »* ou encore *« Ah oui, maintenant je comprends à quoi servent les lettres ! »*. Elles se confirment par le fait que les tableaux suivants ne posent plus aucun problème quant à la partie littérale.

Attention, l'articulation de ces deux opérations (condensation et désignation fonctionnelle à l'aide d'une lettre) que les élèves rencontrent dans cette activité se différencie des activités de généralisation à l'aide de lettres qu'on trouve habituellement proposées aux élèves. Ces dernières portent au départ sur l'exploration d'une relation ou d'une régularité, souvent adossée à une situation réelle. C'est le repérage et la description de cette relation ou de cette régularité qui sont en premier lieu demandé aux élèves. Les descriptions passent spontanément par des expressions en langage naturel comme « Je multiplie le numéro de rang du motif par 3 et j'ajoute 2 ». En général, suggérée par le professeur, la lettre entre ensuite dans un processus de codage de cette expression et débouche sur une formule littérale dans laquelle la lettre peut prendre par la suite, une à une, différentes valeurs numériques pour permettre, par exemple, de trouver la valeur d'une suite à un rang quelconque, 3, 10, 152 ou n. Ces activités ont leur place dans un curriculum d'enseignement mais elles ne permettent pas la compréhension des opérations sémio-cognitives de désignation en jeu en algèbre. En tout cas, elles ne se centrent pas sur la prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle possibles dans le registre des expressions symboliques algébriques.

Dans notre cas, grâce à l'activité de tableaux à compléter, les élèves de cette classe de troisième avaient eu l'occasion de prendre conscience de ces opérations sémio-cognitives dès septembre.

En novembre, notre idée était de tabler sur cette expérience et de trouver à partir du support de cette activité des tâches originales qui leur feraient comprendre les opérations en jeu dans la mise en équation d'un énoncé. La difficulté était d'arriver à articuler cette première activité qui se situait dans un contexte purement numérique et littéral avec des situations où entraient en jeu des énoncés en langue naturelle et des grandeurs. Mais avant tout il fallait procéder à un état des lieux dans cette classe à ce moment-là.

Un constat suite à une évaluation initiale mi-novembre.

Pour démarrer le travail mi-novembre nous voulions simplement voir les démarches de résolution auxquelles les élèves allaient spontanément recourir face à des énoncés de problèmes de type additif. A priori ces élèves avaient déjà vu des procédures algébriques en 4ème. Il était important de savoir ce qu'ils en avaient retenu pour concevoir le travail à venir.

Les trois énoncés retenus se distinguaient d'une part par une variation sur les syntagmes comparatifs (de plus que, de moins que, etc.), d'autre part par une variation sur les ancrages sur lesquels s'exerçaient ces comparaisons. Nous n'avions aucune idée a priori des démarches qui allaient être entreprises par les élèves.

De fait, après l'analyse des productions, nous pouvons résumer les démarches en trois catégories.

La première se caractérise par des productions relevant d'une démarche algébrique complète comme dernières portent au départ sur l'exploration d'une relation ou d'une régularité, souvent adossée à une situation réelle. C'est le repérage et la description de cette relation ou de cette régularité qui sont en premier lieu demandé aux élèves. Les descriptions passent spontanément par des expressions en langage naturel comme « Je multiplie le numéro de rang du motif par 3 et j'ajoute 2 ». En général, suggérée par le professeur, la lettre entre ensuite dans un processus de codage de cette expression et débouche sur une formule littérale dans laquelle la lettre peut prendre par la suite, une à une, différentes valeurs numériques pour permettre, par exemple, de trouver la valeur d'une suite à un rang quelconque, 3, 10, 152 ou n. Ces activités ont leur place dans un curriculum d'enseignement mais elles ne permettent pas la compréhension des opérations sémio-cognitives de désignation en jeu en algèbre. En tout cas, elles ne se centrent pas sur la prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle possibles dans le registre des expressions symboliques algébriques.

Dans notre cas, grâce à l'activité de tableaux à compléter, les élèves de cette classe de troisième avaient eu l'occasion de prendre conscience de ces opérations sémio-cognitives dès septembre.

En novembre, notre idée était de tabler sur cette expérience et de trouver à partir du support de cette activité des tâches originales qui leur feraient comprendre les opérations en jeu dans la mise en équation d'un énoncé. La difficulté était d'arriver à articuler cette première activité qui se situait dans un contexte purement numérique et littéral avec des situations où entraient en jeu des énoncés

en langue naturelle et des grandeurs. Mais avant tout il fallait procéder à un état des lieux dans cette classe à ce moment-là.

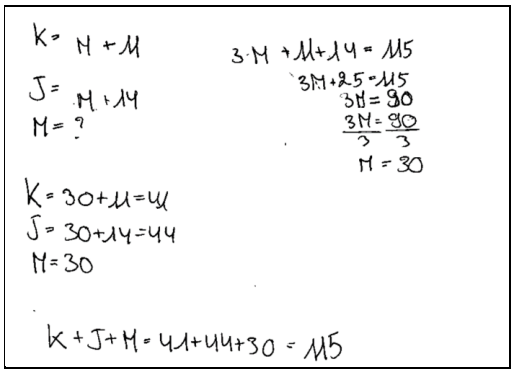


Figure 2: Production 1

La deuxième correspond à des démarches de calcul sans recours à des opérations spécifiquement algébriques. Par exemple voici une démarche typique qu'on peut traduire par le raisonnement suivant : « J'enlève les quantités qui correspondent à 'de plus que' du total et je partage le reste en trois »

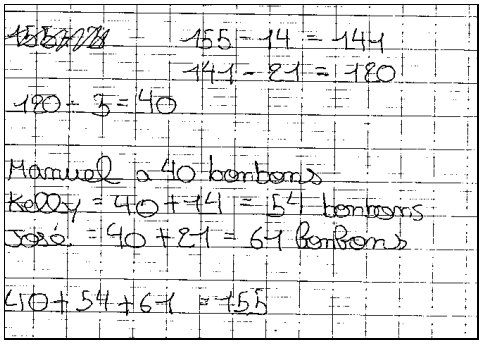


Figure 3 : Production 2

La troisième est constituée par diverses démarches : tâtonnements, des tentatives de représenter le problème par un schéma ou un dessin, etc. En voici un exemple :

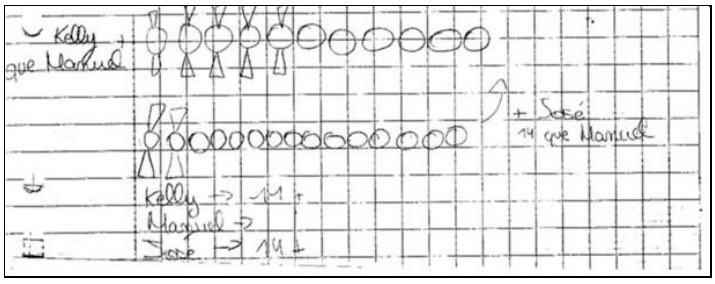


Figure 4 : Production 3

Nous imaginions a priori rencontrer un nombre non négligeable de tentatives de démarches algébriques. Mais en fait seuls deux élèves ont entrepris une mise en équation d'un énoncé. La majorité des élèves se retrouvaient dans des démarches de calcul sans recours à l'algèbre, avec une

certaine réussite pour l'énoncé 1 mais des échecs massifs dans le cas des deux autres énoncés. Les productions diverses que nous rangeons dans la troisième catégorie étaient rares. Nous avons constaté la même situation dans une classe de seconde à la fin de l'année scolaire avec les mêmes énoncés !

Voici un aperçu de la répartition pour l'énoncé 1 :

Démarches	Réponses correctes	Echecs	Totaux
Algébrique	1/25	1/25	2/25
Sans calcul littéral	10/25	7/25	17/25
Autres	1/25	5/25	6/25

Figure 5 : Énoncé

Force était de constater le gap qui séparait les 2 élèves qui utilisaient l'algèbre et les autres qui ne l'envisageaient pas. En cohérence avec notre projet, nous ne sommes pas entrés avec les élèves dans une analyse plus détaillée de ces tentatives de démarche. Nous avons simplement fait état de ce constat d'échec dans la résolution des problèmes et annoncé que nous allions amorcer la compréhension d'une nouvelle méthode qui faciliterait les résolutions.

Le principe des activités proposées aux élèves

Il restait donc à élaborer et à proposer des activités qui permettraient aux élèves de franchir le gap constaté. Nous avons vu précédemment que les difficultés d'un élève pour résoudre algébriquement un problème donné par un énoncé ne relève pas d'une traduction ou d'un codage immédiatement accessible à l'aide de lettres, mais de conversions entre un énoncé en français et une équation. Les opérations de désignation des valeurs numériques et des relations ne sont pas les mêmes dans ces deux registres.

Pour concevoir ces activités, nous avons adopté l'approche de Raymond Duval qui fait l'hypothèse qu'il faut d'abord comprendre comment sont fabriqués les problèmes et fabriquer des problèmes pour devenir capables de les résoudre (Duval, 2017, p.13 de la préface).

Les activités ne visaient donc pas la résolution immédiate des problèmes. Il s'agissait d'abord de faire comprendre les opérations sémio-cognitives qui sous-tendent la mise en équation d'un énoncé. Pour cela les séances ont donc consisté à proposer des activités jouant sur les conversions entre les formulations qu'on rencontre dans les énoncés et le registre des écritures symboliques. Nous nous sommes donc démarqués de la pratique qui consiste à partir des énoncés et à proposer d'emblée une méthode générale de résolution par l'algèbre, méthode qui se présente souvent sous formes d'instructions à suivre.

Le parcours

Après le test diagnostic initial, nous avons accompagné les 28 élèves de la 3ème 6 du collège Romain Rolland lors de 8 séances de travail du 21 novembre 2022 jusqu'au 26 janvier 2023. Les séances consistaient à proposer des activités destinées à provoquer la prise de conscience par chacun des élèves des opérations sémio-cognitives en jeu dans la mise en équation d'énoncés de problèmes. Ici, le critère d'une prise de conscience est une reconnaissance quasi-immédiate et sans erreur des éléments qu'il faut repérer dans un énoncé en langue naturelle pour pouvoir les convertir en écritures algébriques symboliques. Pour le contrôler nous avons alterné des séances de diagnostic, très courtes de 10 à 15 minutes, dans lesquelles le professeur n'intervenait pas avec des séances plus longues de 35 à 45 minutes où les élèves pouvaient interagir, entre eux et avec le professeur. A la fin de chaque séance, nous nous concertions pour analyser les réactions et les productions des élèves. Chaque épisode nous a réservé son lot de surprises et nous a fait rebondir pour envisager

l'épisode suivant. Après ce parcours de mi-novembre à fin janvier nous avons procédé début mai, à un test qui nous a permis de vérifier la pérennité des résultats encourageants constatés en janvier.

Références :

Duval, R. (2002). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets*. Actes des Séminaires SFIDA (Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre), IREM de Nice.

Duval, R. & Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, 117-152.

Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre, Dans Mériclès T. Moretti & Celia Finck Brandt (Orgs.) Florilégio de pesquisas que envolvem a teoriasemio-cognitiva de aprendizagemmatemática de Raymond Duval (p.456-485). (Revemat/UFSC, 2020-07 22). EducaçãoMatemática – RepositórioInstitucional da UFSC

Rauscher, J-C., Bauerle-Schoenenberger, S (2023). Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?. Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M.Maschietto & E. Montoya Delgadillo, Actes du septième symposium d'Étude sur le TravailMathématique, 377-388. IREM de Strasbourg.

ATELIER A12 - Développer, factoriser, réduire… Rôle et place de la distributivité

Anne-Sophie Cherpin Enseignante en collège et INSPE de Lyon Université Lyon 1
Sylvie Coppé Université de Genève, FPSE, Equipe DiMaGe
Alexandra Goislard Enseignante en collège et IFé, ENS Lyon
Claire Piolti- Lamorthe INSPE de Lyon Université Lyon 1
Sophie Roubin IFé, ENS Lyon

Dans cet atelier nous travaillerons essentiellement sur des types de tâches portant sur les techniques de calcul littéral (développer, réduire, factoriser des expressions littérales…). Dans un premier temps, nous proposerons aux participant·es une activité de formation que nous avons expérimentée à de nombreuses reprises en formation initiale ou continue. Cela nous permettra de mettre en avant des questions portant notamment sur les difficultés et erreurs des élèves et leur traitement, sur le rôle et la place de la distributivité de la multiplication sur l'addition comme élément technologique (Assude et al., 2012 ; Constantin, 2014). Enfin, nous chercherons à déterminer des éléments de savoirs professionnels qui peuvent être introduits en formation (Coppé et al., 2021).

Références :

Assude, T., Coppé, S., Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : Atomisation et réduction. In L. Coulange, J. L. Dorier, J. P.

Drouhard, J.-P. & Robert, A. (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. La pensée sauvage. 41-62.

Constantin, C. (2014). Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au college ? [Thèse de l'université]. Aix-Marseille.

Coppé, S., Grugeon- Allys, B., Horoks, J., Pilet, J., Solnon, A., Raffaëlli, C., Charpentier, A. (2021). Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco en classe de troisième en 2019. Note d'information n° 21.00. Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, DEPP.

ATELIER A13 – Analyse d'erreurs en algèbre élémentaire : l'apport de Vygotski

Miquela CATLLA, Florence LARUE, Françoise SAVIOZ, Julie VAN DER HAM, Bertrand TOQUEC, Bernard VIDAL, Yves CHASSIN, animateurs à l'IRES de Toulouse.

Il nous est arrivé, en tant que formateur, de proposer à nos stagiaires d'expérimenter en notre présence, une activité que nous avions nous-mêmes testée dans nos classes (par exemple une situation-problème), et de constater combien ce qui se passait alors différait, pour une bonne part, de ce que nous avions vécu avec nos élèves. Cette différence perçue peut certes s'expliquer en partie par le changement de position que nous avions, acteur dans un cas, spectateur dans l'autre, et aussi par la disparité d'expérience entre celle de nos stagiaires et la nôtre. Mais il semble que l'essentiel ne soit pas là : pour nous, il se situe principalement dans le fait que les conceptions de l'apprentissage, au sens large, dans lesquelles cette activité a été pensée puis expérimentée par nous-mêmes, ne sont pas nécessairement partagées ou comprises par nos stagiaires, quand bien même elles auraient été explicitées lors de la préparation conjointe de cette séance. Cela tend à montrer le caractère primordial de ces conceptions, qu'elles soient implicites ou explicites, conscientes ou non, dans tout acte d'enseignement. Ce qui se passe en classe dépend fortement de ces conceptions, à la fois dans ce qui sera dit ou non, fait ou non par les élèves et l'enseignante ou l'enseignant. Il ne se passe pas la même chose dans la classe d'une enseignante ou d'un enseignant aux conceptions transmissives de l'apprentissage que dans celle d'une enseignante ou d'un enseignant aux conceptions socioconstructivistes ou vygotskiennes, par exemple. Dans cet atelier, à partir de productions communes d'élèves en algèbre et de leurs erreurs, on tentera de montrer l'importance de ces conceptions de l'apprentissage pour l'analyse qu'on peut faire de ses erreurs. On tentera de montrer l'apport du modèle historico-culturel de Vygotski tant pour l'examen de ces productions que pour envisager des pratiques enseignantes qui pourraient permettre une meilleure compréhension pour les élèves des concepts algébriques en jeu. En particulier, les notions vygotskiennes de pensée par complexes et de pensée par concepts seront abordées comme celles de concepts quotidiens et de concepts scientifiques développées dans les chapitres 5 et 6 de Pensée & langage de Vygotski. Cet atelier est conçu comme prémisse à l'atelier intitulé "Enseigner l'algèbre élémentaire avec Vygotski : séquence d'activités" puisqu'il éclairera les présupposés sur lesquels s'est appuyée la construction de cette séquence. Mais ces deux ateliers peuvent aussi être suivis indépendamment.

Références :

Groupe Pédagogie Collège (2011). *Éléments 1.* IRES de Toulouse (https://gpc-maths.org/).

Groupe Pédagogie Collège (2013). *Éléments 2.* IRES de Toulouse.

MEN (2008). Du numérique au littéral, Éduscol.

MEN, (2016). Utiliser le calcul littéral, Éduscol.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. PUF

Radford, L. (2011). *Théorie de l'objectivation, Éléments 1*. IREM de Toulouse.

Savioz, F. (2008). *L'erreur n'est pas une faute*. L'Harmattan.

Vygotski, L. S. (1997). *Pensée et langage*, La Dispute.

ATELIER B11 – Enseigner l'algèbre élémentaire avec Vygotski : séquence d'activités

Miquela CATLLA, Florence LARUE, Françoise SAVIOZ, Julie VAN DER HAM, Bertrand TOQUEC, Bernard VIDAL, Yves CHASSIN, animateurs à l'IRES de Toulouse.

Toute une littérature (française et étrangère) montre que l'entrée dans l'algèbre pose de grandes difficultés aux élèves. Consciemment ou non, tout enseignement suppose des conceptions sous-jacentes. Menant en parallèle une recherche sur les différentes conceptions, nous avons perçu que les travaux de Lev Vygotski pouvaient fournir des pistes et un cadre pertinent à un enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous avons donc élaboré une séquence d'introduction au calcul littéral reposant sur certaines idées-clés de Lev Vygotski comme celle de développement des concepts et celle de dialectique concepts quotidiens-concepts scientifiques. Lev Vygotski pour qui notamment toute généralisation s'appuie sur les généralisations précédentes sans les annuler. Il nous paraissait aussi essentiel de saisir le lien entre développement et apprentissage-enseignement. Dans cette suite d'activités, se feront jour – la nécessité préalable d'une réelle construction des nombres, elle-même établie à partir de la compréhension des grandeurs mesurables, – l'importance de la construction avec les élèves d'une solide idée de ce qu'est le calcul et l'égalité, ce qui permet de garder du sens, au moment de l'abord de l'algèbre. De plus, très souvent, l'introduction à l'algèbre se fait par la résolution de problèmes au moyen de l'algèbre. Il est certes nécessaire de travailler cet aspect mais en complément, nous sommes convaincus qu'il est fondamental de faire travailler sur l'algèbre (en tant que structure). Nous rejoignons là la manière dont les concepts se forment et deviennent opérants. Les activités proposées feront intervenir l'exemple générique puis la notion de variable. L'élaboration de cette séquence s'appuie grandement sur une analyse préalable d'erreurs d'élèves et sur différentes recherches concernant l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Cette séquence a été expérimentée sur plusieurs classes et sur différentes années. Des travaux d'élèves seront présentés pour la discussion. Cet atelier est le complément de celui

intitulé "Analyse d'erreurs en algèbre élémentaire : l'apport de Vygotski" qui éclairera les présupposés sur lesquels s'est appuyée la construction de cette séquence.

Références :

Artigue, M. (2005). L'intelligence du calcul, Le calcul sous toutes ses formes. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour.*

Bardini, C. (2003). Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. *Thèse de doctorat*. Université Paris 7

Baton B., Giot R., Noël Y. (1997). L'initiation à l'algèbre, Collection *Documents du CREM*. n°3.

Benard, D. (2002). Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence. *Repères-IREM*, 47, 5-16.

Groupe Pédagogie Collège (2011). *Éléments 1*. IRES de Toulouse (htps://gpc-maths.org/).

Groupe Pédagogie Collège (2013). *Éléments 2*. IRES de Toulouse.

Honclaire B. (1997). Faire de l'algèbre ou algébriser à douze ou treize ans, Collection *Documents du CREM*, n°5.

Lebesgue, H. (1956). De l'arithmétique à l'algèbre et à l'analyse mathématique, L'enseignement mathématique - Tome 2 - fasc.1-2.

Marum, T., Isler, I., Stephens, A., Gardiner, A., Blanton, M., & Knuth, E. (2011). From specific value to variable: Developing students' abilities to represent unknowns - Proceedings of the firty-fird Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education.* 40(1), 83-96.

Schmitau J. & Morris, A. (2004). Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov, *Mathematics Educator*. Vol.8.

Vygotski, L. S. (1997). *Pensée et langage*. La Dispute.

ATELIER B12 – Jeu de semailles « M'raha wa tso', comme artefact de contextualisation du calcul algébrique à Mayotte : enjeux, portée et limites.

Jean-Berky Nguala, Solym Manou-Abi

A Mayotte, les résultats aux différentes évaluations en mathématiques (contrôles continus, différentes évaluations nationales notamment celles de seconde au lycée) sont très faibles. En calcul algébrique, les

types de difficultés observées relèvent des théorèmes-en-actes des élèves suivant une certaine logique comme une utilisation erronée de propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, des fausses propriétés de simplification, la priorité opératoire interprétée différemment, des substitutions incorrectes, etc. D'une manière générale, dans ce domaine de l'algèbre, nous retrouvons les erreurs liées aux statuts du signe égal et aux statuts des lettres, rendant encore plus difficile certains apprentissages, surtout avec le manque de travail personnel. Il devient alors nécessaire de trouver un moyen, ici, la pratique de ce jeu de semailles, pour remédier aux obstacles des élèves et donner davantage du sens en calcul algébrique. Les hypothèses d'utiliser le support (artéfact) de ce jeu traditionnel pour motiver les élèves à réaliser des tâches en calcul littéral, pour faciliter leur enrôlement et améliorer les performances des sujets sont émises. Pour récolter les données, des observations, enquêtes et entretiens sont organisés aussi bien auprès des élèves qu'auprès des professeurs de mathématiques. Dans leur traitement, des outils statistiques sont mobilisés. S'appuyant sur les résultats d'un diagnostic réalisé sur le calcul littéral au début du lycée, l'atelier commencera par faire émettre les hypothèses sur des théorèmes en actes faux qui auraient été utilisés. Puis, le dispositif avec le jeu traditionnel invaliderait ces propriétés utilisées à tort (par des rétroactions). Après, le groupe va mettre en place les calculs algébriques avec des graines et cases du jeu (des correspondances jeu papiers prévus). Tout ceci sera précédé d'un temps d'appropriation de ce jeu traditionnel exploité a priori pour inciter les élèves à travailler et à développer une appétence pour celui-ci, ce qui mettrait aussi en évidence du point de vue enseignant la place du contrat didactique, des variables didactiques et celle de dévolution de la tâche à réaliser (Brousseau, 1990).

Références :

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 17(2). La Pensée Sauvage, Grenoble. 167-210.

Nguala, J.-B. & Manou-Abi, S. (2023). *Statistic and didactic analysis of math level and density estimation from a survey data of Mayotte*. Prepint.

ATELIER B13 Développer-factoriser une expression algébrique : quel(s) discours enseignant(s) ? Pour quel(s) effet(s) sur l'apprentissage du calcul algébrique ?

Cécile Barthes-Garnier, LDAR (EA 4434), Université de Paris, IREM de Paris,

Lalina Coulange, LaB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

Dans le cadre d'un travail de thèse en cours de l'une d'entre nous (Barthes-Garnier & al., 2022), nous nous intéressons au « discours enseignant » associé à la factorisation ou au développement d'expressions algébriques au collège (cycle 4). Par discours enseignant, nous entendons toute forme de discours en prise d'appui sur du langage verbal et à même d'accompagner des actions de calcul algébrique liées à la mise en fonctionnement de la propriété de distributivité. Partant du constat que l'algèbre est une science éminemment écrite (Chevallard, 2020), nous faisons d'ailleurs l'hypothèse que ce type de discours est un impensé des pratiques enseignantes – et que ce caractère impensé peut d'ailleurs contribuer à penser des enrichissements de ces pratiques. Nous avons demandé à des enseignants de tenir un discours (proche de celui qu'ils tiendraient lors d'un épisode de correction dans la classe) sur des développements d'expressions algébriques données et choisies au regard de ce que nous pensions *a priori* comme des objets

de discours possibles. Les participants seront mis à contribution dans l'analyse de matériaux issus de ce premier corpus de données. Nous leur présenterons nos propres analyses de ces discours enseignants qui seront mis en regard avec d'autres données : celles recueillies auprès d'élèves (de fin de collège et/ou de début lycée) en réponse à des tâches de développement/factorisation – identiques à celles qui ont été présentées (pour le développement) ou qui le seront, auprès d'enseignants. Cette mise en regard nous permettra d'affiner des premières hypothèses sur le rôle du langage verbal dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique au collège. Ceci nous a conduit à envisager un ensemble de tâches (de développement/factorisation) à proposer aux élèves, associé à un moment de formation pour des enseignants volontaires, qui pourrait permettre aux uns et aux autres de développer de nouvelles ressources langagières en vue d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique. Si le temps le permet, nous présenterons quelques éléments de cette nouvelle étude toujours en cours actuellement.

Références

Barthes Garnier, C., Coulange, L., Hache, C. (2022). Développer une expression numérique ou algébrique : quel(s) discours enseignant(s) ?. *Repères IREM*, 128, 71-90.

Chevallard, Y. (2020). L'humble séminaire 2019-2020, séance 6. document en ligne http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/iMG/pdf/hs_2019-2020_-_6.pdf

ATELIER C11 Pistes de réflexion pour la formation des enseignants sur les moyens de contrôle à donner aux collégiens en calcul littéral afin de favoriser leur autonomie

Matthieu Chantal, INSPE de Créteil ; Guillaume Didier, INSPE de Paris ;
Julia Pilet, INSPE de Créteil, LDAR ; Brigitte Grugeon-Allys, INSPE de Créteil, LDAR

Cet atelier vise à ouvrir une réflexion sur la formation des enseignants, initiale et continue, sur les moyens de contrôle que les enseignants donnent aux élèves en calcul littéral au cycle 4.

Références

Publications des premiers résultats des enquêtes PRAESCO NI 21.11 février 2021 pour l'enquête 3e https://www.education.gouv.fr/premiers-resultats-de-l-enquetesur-les-pratiques-d-enseignementdesmathematiques- praesco-en-classe-309566

ATELIER C12 Que devient la variable lorsqu'elle est écrite en indice ? Les suites numériques au lycée, entre nouvelles notations et techniques de calcul anciennes

Céline Constantin, LIRDEF, Université de Montpellier, celine.constantin@umontpellier.fr,
Véronique Cerclé, Lycée de Pézenas, PFA, Université de Montpellier ;
Sophie Dutaut, lycée Feuillade (Lunel) ; Jérémie Lefaucheur, lycée Feuillade (Lunel) ;
Louise Nyssen, IMAG, Université de Montpellier ; Aurélie Chesnais, LIRDEF, Université de Montpellier.

L'introduction de la notion de suite numérique au lycée entraîne la manipulation de nouvelles notations prolongeant les techniques de calcul algébrique au collège. L'une des particularités de ces nouvelles notations tient à la position indicielle de la variable dont les premiers travaux en didactique des mathématiques sur la convergence de suites ont montré qu'elle entraînait des abus de langage et des difficultés résistantes chez les étudiants à l'entrée à l'université. Ces difficultés traduisent une perte de sens des écritures dans lesquelles « n » n'est pas toujours identifiée comme une variable par les étudiants. Ils traitent alors les écritures avec des manipulations formelles qui paraissent prendre le pas sur le sens. L'atelier visait à illustrer de tels phénomènes qui apparaissent dès l'introduction de la notion de suite numérique en première au lycée et discuter de possibles prises en charge d'enjeux langagiers autour de la manipulation des écritures.

Dans cet atelier nous avons proposé de partager un certain nombre de réflexions menées au sein du groupe IRES de Didactique de Montpellier, autour de problématiques d'enseignement et de formation.

Nous faisons l'hypothèse qu'un travail sur des savoirs transparents (Margolinas & Laparra, 2011, Chesnais, 2018) peut être un bon levier de formation en cherchant à développer des moyens langagiers dans les classes et avec les étudiants futurs enseignants pour prendre en charge des difficultés d'élèves relatives à ces savoirs. Des savoirs sont qualifiés de transparents lorsqu'ils ne sont pas identifiés comme tels dans l'institution ou comme enjeux d'enseignement et d'apprentissage tandis qu'ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et qu'ils peuvent poser difficulté aux élèves dans les classes.

Ce sont des erreurs d'élèves de 1ere générale en Spécialité Mathématiques[4] qui ont attiré notre attention et qui sont sans doute peu visibles dans les classes. La tâche qui nous a amenés à les observer est par ailleurs sans doute peu présente dans les classes. Ces erreurs nous ont cependant semblé révélatrices de difficultés liées à des savoirs transparents autour de la notion de variable et de substitution, ce qui pouvait constituer un bon point de départ pour occasionner des discussions en formation et dévoiler ces savoirs et connaissances implicitement nécessaires pour calculer la valeur de certains termes de suites définies par récurrence ou non par exemple. L'objectif de cet atelier était ainsi d'explorer un certain nombre d'enjeux d'enseignement et de formation autour de la notion de variable au moment de l'introduction de la notion de suite au lycée. En adoptant une perspective particulière autour du rôle du langage à la fois verbal et symbolique écrit en lien avec l'introduction d'une nouvelle notation, l'atelier visait à montrer les difficultés et les tensions qui pouvaient émerger dans les classes mais aussi la complexité des notions mathématiques en jeu tout en illustrant des prises en charge possibles. L'atelier s'est organisé en trois parties. Dans la première partie nous avons proposé de travailler à partir de réponses d'étudiants en deuxième année de Master MEEF à des questions d'analyse d'erreurs d'élèves. Nous avons ensuite proposé d'éclairer le rapport entre les notions de variable, de fonction et de suite et les enjeux mathématiques et didactiques afférents. Dans la dernière partie, nous avons proposé de travailler à partir d'extraits de séances de classe dans le cadre d'une séquence élaborée pour une classe de 1ère spécialité.

Une technique de calcul fondée par la substitution

Lorsque les suites numériques sont introduites en 1ère au lycée, les élèves sont amenés à prolonger les techniques de calcul algébrique enseignées au collège avec de nouvelles notations. Dans cet atelier nous nous sommes centrés sur les calculs des termes d'une suite définie par récurrence. Les programmes de 1ère indiquent qu'on attend des élèves qu'ils soient capables de « calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence […] », et d'utiliser les notations « $u(n)$, u_n, (u(n)) et (u_n) » (MENJ, 2019). Ces calculs nécessitent de prolonger des techniques anciennes fondées par la substitution. Nous avons proposé aux participants de comparer les substitutions telles qu'elles peuvent exister au collège et en 2nde, avec celles que nécessitent les calculs des premiers termes d'une suite définie par récurrence en 1ère. Pour cela nous nous sommes appuyés sur deux exemples : le développement de « $5(2n + 7)$ » à

[4] Cet enseignement correspond au programme de 2019 (MENJ, 2019)

partir de l'identité « $k(a + b) = ka + kb$ »[5] et le calcul de v_1 à partir de la suite définie sur ℕ par $v_{n+1} = 2v_n - 3n$ et $v_0 = 5$. Pour ces calculs, nous avons proposé de comparer la nature et les moyens d'identifier ce que Serfati (2005) nomme source, substituées et substituantes, c'est-à-dire dans quelle écriture symbolique le remplacement s'effectue, ce qui est remplacé et ce qui vient le remplacer[6]. Ainsi, lorsque les élèves développent des expressions comme « $5(2n + 7)$ » au collège, une technique possible consiste à effectuer des substitutions dans la source « $k(a + b) = ka + kb$ ». Les substituantes sont alors « 5 », « $2n$ » et « 7 », elles viennent remplacer les substituées « k », « a » et « b » à toutes les occurrences dans l'égalité, en restituant les signes de la multiplication lorsque nécessaire. Les substituantes apparaissent dans l'expression que l'on doit développer (« 5 », « 2n » et « 7 » sont visibles dans « $5(2n + 7)$ ») et les variables « k », « a » et « b » peuvent être remplacées par des écritures de nombres (« 5 » ou « 7 ») ou des monômes (« $2n$ »). Dans le cas des suites, les substitutions sont plus complexes. en caractérisantLes discussions avec les participants ont permis de faire émerger que les substitutions possibles pour le calcul de v_1 dans l'exemple précédent sont plus nombreuses et nécessitent un travail non négligeable pour identifier les substituées, alors que nous faisons l'hypothèse que les élèves ont rarement été confrontés à des exercices dans lesquels il y a plus d'une variable au collège et en 2nde. Celles-ci peuvent renvoyer à la variable n ou à l'un des termes de la suite, qui est une autre variable dépendante de n. Le calcul de v_1 suppose de substituer « v_1« à « v_{n+1} » dans « $v_{n+1} = 2v_n - 3n$ ». Cette substitution peut alors en masquer d'autres : celle de « 0 » à « n » ou même celle de « 1 » à « $n + 1$ ». Autrement dit le calcul de v_1 nécessite de considérer trois voire quatre substituées (« v_{n+1} », « v_n », « n » et « $n+1$ ») de manière concomitante d'une part et, d'autre part, de chercher la substituante « 0 » qui n'est pas apparente dans « v_1 » donné à calculer. La variable n apparaît d'ailleurs à deux positions différentes dans l'écriture « $v_{n+1} = 2v_n - 3n$ ». Le point de départ du travail que nous avons engagé dans notre groupe IRES était celui d'une certaine transparence des savoirs autour de ces substitutions dans l'enseignement susceptibles de peser sur les apprentissages au moment de l'introduction de ces notations nouvelles dans l'étude des suites. Afin d'étayer cette hypothèse, nous avons proposé le calcul de v_1 que nous venons de présenter à 23 élèves de 1ère Spécialité en fin d'année dans un lycée ordinaire. Pour 12 d'entre eux, des erreurs de substitutions ont conduit à des réponses incorrectes, nous allons y revenir. Nous faisons de plus l'hypothèse de besoins de formation autour de ces savoirs afin de lever une certaine transparence pour les professeurs, mais aussi autour d'une nécessaire prise en charge des difficultés langagières associées via la (re-)construction de discours susceptibles de les éclairer dans les classes. Afin de préciser ces besoins de formation, nous avons proposé à des étudiants de Master MEEF en deuxième année d'analyser trois copies d'élèves en leur demandant quelles aides ils pourraient apporter à ces élèves pour leur permettre de se rendre compte de leur erreur et de corriger leur copie.

Analyse de productions d'élèves

Nous avons reproduit dans la figure 1 les trois copies d'élèves proposées aux étudiants pour qu'ils les analysent.

[5] Nous avons choisi cet exemple plutôt que le calcul d'une valeur d'une expression car il montre une certaine diversité des substitutions potentiellement rencontrées au collège d'une part, et parce que la source est aussi une égalité. Des comparaisons similaires pourraient être faites dans le cas du calcul de la valeur de l'expression pour n=2 par exemple, pour lequel il n'y a qu'une substituante et une substituée visibles.

[6] Nous renvoyons le lecteur à Constantin (2021) pour une étude théorique des savoirs à ce propos.

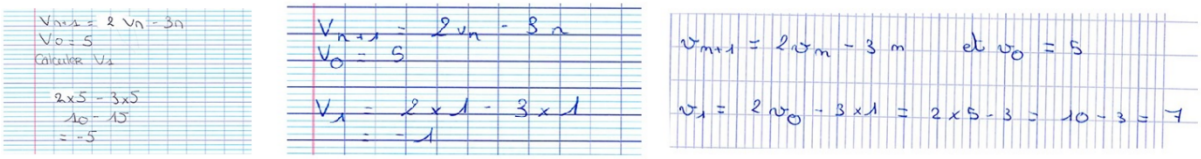


Figure 1– Des erreurs d'élèves de 1ère Spécialité sur le calcul de termes d'une suite[7]

Le premier et le deuxième élève n'identifient qu'une substituante et remplacent toutes les variables dans la ligne de calcul par la même valeur. On peut interpréter cela comme résultant des substitutions anciennes dans des expressions d'une seule variable où toutes les lettres sont donc remplacées par le même nombre. Les élèves qui n'envisagent ainsi qu'une substituante semblent faire un choix lié à une forme d'automatisation des techniques de calcul de termes d'une suite, en considérant soit le terme de rang précédent renvoyant à ce qui se fait pour les suites définies par récurrence soit la valeur de l'indice renvoyant cette fois au cas de suites définies de manière explicite. Le troisième élève utilise quant à lui deux substituantes (« v_0 » et « 1 ») mais il semble remplacer v_n par v_0 sans penser le remplacement de n par 0 pour autant puisqu'il est ensuite remplacé par 1. Tout se passe comme si ce n'était pas le même « n » selon la position occupée dans l'écriture, les écritures en indice n'étant pas considérées comme variables. Finalement, v_n et n semblent pour ces élèves (9 sur 23) être des variables indépendantes. Cette difficulté à identifier des liens entre les variables explique notamment le fait que les élèves ne perçoivent pas la double substitution qui s'opère lorsqu'on remplace v_n par v_0. Ces élèves ne peuvent ainsi pas percevoir la contradiction avec la nécessité que la variable n prenne la même valeur partout dans l'expression (ce qui renvoie à la substitution à toutes les occurrences de la même valeur à n).

Nous avons collecté 12 copies d'étudiants, et nous avons proposé aux participants à l'atelier de travailler sur 4 de ces copies. Ces réponses d'étudiants nous ont paru intéressantes parce qu'ils identifient de premiers éléments susceptibles d'expliquer les difficultés d'élèves sans pour autant élucider tout à fait ce qui se joue dans les procédures d'élèves, ni les savoirs potentiellement utiles à la prise en charge de leurs difficultés dans l'enseignement. Nous avons proposé aux participants de discuter des potentialités des aides envisagées par les étudiants au regard de leurs analyses des copies d'élèves et les connaissances mathématiques et didactiques que les étudiants mobilisent pour cela.

Un premier élément émergeant de l'analyse des productions d'étudiants avec les participants est le fait que les étudiants identifient bien des difficultés liées aux substitutions en proposant parfois des origines de ces erreurs (pour l'une d'entre eux) ainsi que le montrent les extraits suivants.

[7] Sur les 23 élèves, 9 élèves ont calculé correctement le terme demandé, 12 élèves ont produit des réponses erronées qui s'articulent autour de ces trois erreurs et 2 élèves n'ont rien répondu.

1) P1 : L'élève a identifié que pour calculer V_1 il faut exploiter V_0 mais il s'est trompé lorsqu'il a fallu remplacer n par 0.

P2 : L'élève a cette fois identifié que pour calculer V_1 il faut remplacer n par une valeur mais a choisi 1 au lieu de 0. Cela est sûrement dû au fait qu'il veut calculer V_n pour $n=1$ donc pour lui cela veut dire que $n=1$ dans cet question.

P3 : L'élève a identifié que V_0 allait être exploité pour calculer V_1. Néanmoins, il a remplacé n par 1 dans le terme "$-3n$". Je pense que cette erreur est dûe aux même raisons que pour P2.

1) La production 1 semble confondre n et v_n, l'élève n'utilise que v_0.
La production 2 confond également n et v_n, il n'utilise que $n=1$. De plus ici on doit avoir $n=0$.
La production 3 distingue bien n et v_n, identifie bien que $v_n = v_0$ mais ne fait alors pas le lien que $n=0$.

1)
P1 :
- une substitution est faite, seulement seul le V_n a été bien fait.
- calcul réalisé
Il manque cependant la mise en avant de la substitution et ce qui correspond le calcul
exemple $V_1 = V_{0+1} = 2V_0 = 3V_0 = \dots$

P2 :
- l'élève comprend qu'il va y avoir une substitution mais, le nombre va lui faire défaut
- la présentation des calcul sont bons
- l'élève n'a pas compris que pour un n fixé on associé à V_n un nombre, ici pour 0, $V_0 = 5$

Cela va donc engendré son calcul de fausse.

Figure 2– Analyses de trois étudiants en deuxième année de Master MEEF

Si certains étudiants envisagent plusieurs substitutions possibles, ce n'est toutefois pas le cas de tous. Par exemple, la dernière production semble ne faire référence qu'à une substitution (« la substitution », « le nombre »), celle de *n*. On peut aussi noter dans les copies des éléments qui renverraient à l'idée de variable liée (« pour un *n* fixé on associe à v_n un nombre » même si la relation est inversée ou « $v_n = v_0$ mais ne fait alors pas le lien que $n = 0$ »).

Les discussions avec les participants ont mis en évidence des difficultés pour les étudiants à interpréter ces erreurs en termes de connaissances, ce qui en retour nous a amenés à discuter d'enjeux de formation. La plupart des étudiants insistent sur la confusion entre *n* et v_n ainsi que le montrent les extraits suivants, sans pour autant parvenir à l'interpréter en lien avec des savoirs qui seraient à la fois liés aux variables (associées à la notion de suite) et aux substitutions.

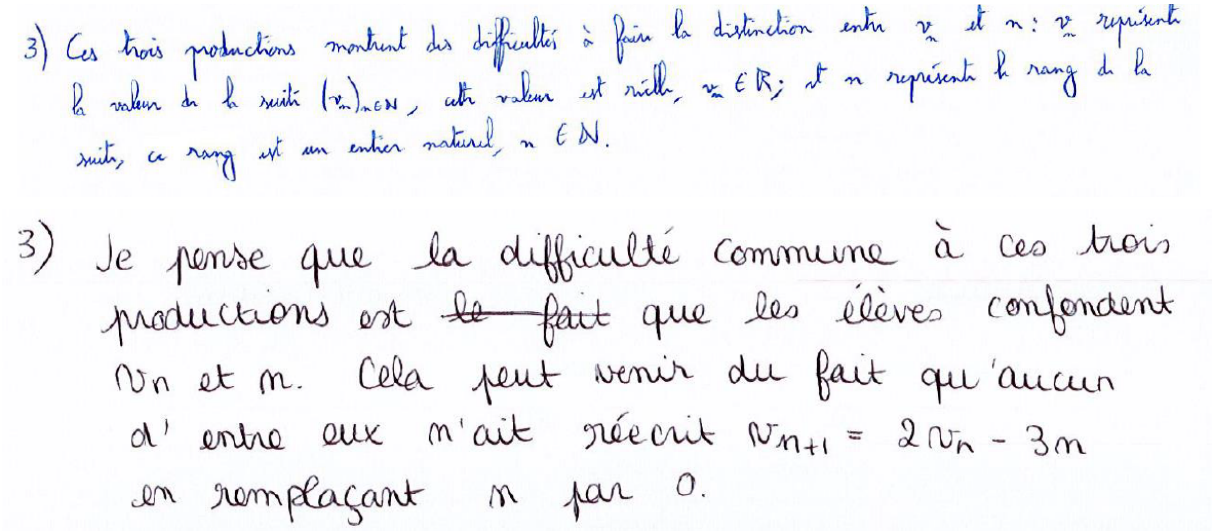


Figure 3 – Interprétations des difficultés d'élèves à calculer le terme v_1

Les étudiants ont bien conscience que les élèves n'ont pas remplacé *n* par la valeur attendue qui est 0 partout dans l'expression (y compris en indice), mais le caractère lié des variables reste implicite, y compris lorsqu'ils proposent des rappels à la définition d'une suite comme aide (à l'instar de ce qui est évoqué dans la production précédente). Ceci peut être renforcé par des abus de langage comme le montre la figure 3, « le rang » ou « la valeur » pouvant être référés à la suite plutôt qu'à l'un de ses termes.

Il n'est par ailleurs pas certain qu'ils identifient tous véritablement que les élèves remplacent v_{n+1} par v_1 et v_n par v_0 sans pour autant considérer qu'ils ont remplacé *n* dans v_n ou dans v_{n+1}. Autrement dit, des substitutions restent masquées pour ces élèves lorsque les variables sont écrites en indice. On peut de fait penser que pour ces élèves, des aides qui consisteraient à leur demander de dire par quoi ils remplacent *n* ne peuvent produire l'effet escompté, s'ils ne considèrent comme variable que l'écriture « *n* » dans la ligne (et non en indice).

Les aides se portent plutôt sur la substituante à trouver pour *n*, avec des propositions intéressantes via l'utilisation d'autres exemples comme ci-dessous (avec v_7), ce qui est une aide nécessaire pour leur permettre de comprendre le choix de la substituante pour *n*.

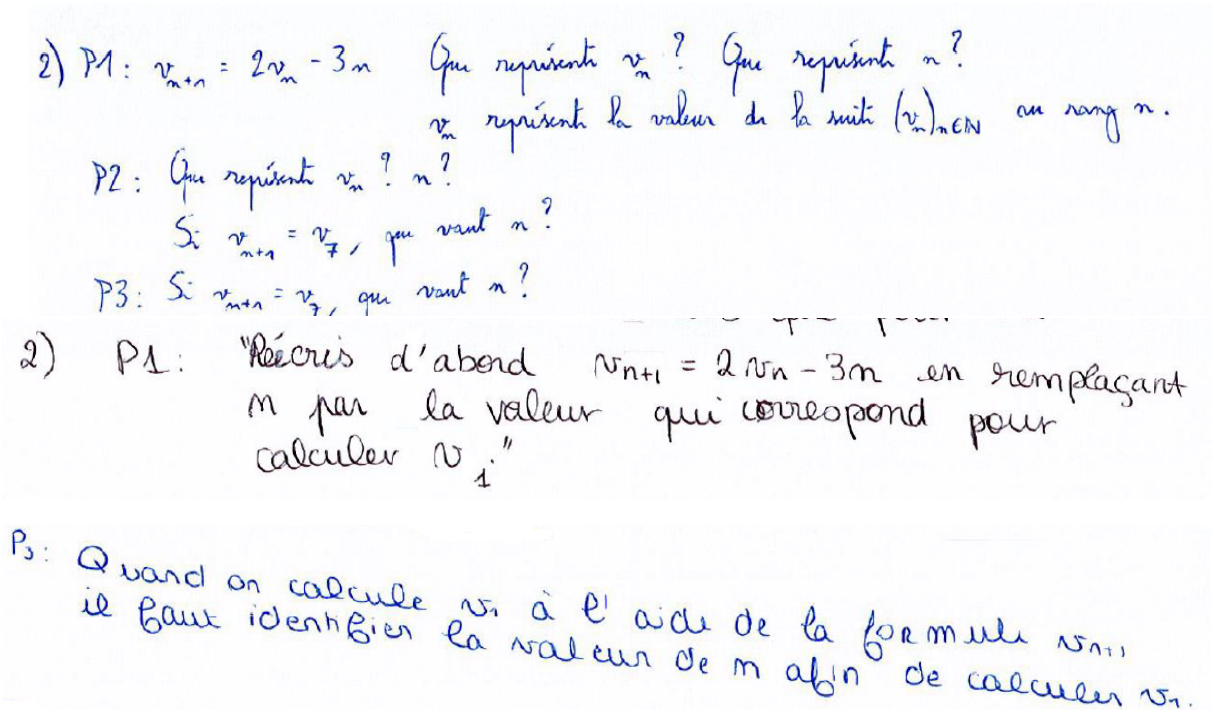


Figure 4 – Aides envisagées par trois étudiants pour permettre aux élèves de prendre conscience de leurs erreurs et de se corriger

Mais elle laisse dans l'implicite la notion de fonction et la question des relations entre variables et des conséquences de ces relations sur les substitutions en lien avec des savoirs qui se rapportent aux écritures. Ceci est révélateur du caractère transparent de ces savoirs pour les étudiants (qui par ailleurs sont débutants). Le fait de dire que v_n est un terme de la suite et n son rang ne suffit pas à les éclairer. Ainsi peut-on penser que de telles aides peuvent être éloignées de l'activité des élèves qui commettent les erreurs présentées à la figure 1. Les indications très ciblées pouvant permettre aux élèves de mener à bien leurs calculs pourraient ainsi ne pas dévoiler tout à fait ce qu'il y a à comprendre des variables rencontrées et des manipulations d'écritures afférentes. Autrement-dit les réussites d'élèves dans de telles tâches de calcul pourraient ne pas témoigner pour autant d'apprentissages liés aux substitutions et aux dépendances entre variables et substituantes.

Pour mieux appréhender la complexité des relations entre les variables et les notations dans une égalité comme « $v_{n+1} = 2v_n - 3n$ » qui peut paraître simple de prime abord, nous avons proposé aux participants de revenir à la définition mathématique des objets manipulés.

La notion de suite entre liste et fonction

Pour le mathématicien, une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Mais en pratique, quand on les manipule, on peut aussi y penser comme à des listes de nombres indexées par les entiers naturels. Rousse (2021) parle ainsi de deux points de vue : « celui d'un processus de correspondance et de dépendance d'une variable en fonction d'une autre » (p. 82) et celui d'une liste. Ce point de vue « liste » commence avec des listes finies : par exemple, couples ou triplets peuvent être notés $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ou encore $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La notation avec des indices devient utile pour les listes finies plus longues, ou de longueur variable N. Ainsi peut-on noter $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \in \mathbb{R}^8$ ou $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Comment noter une liste infinie ? On peut être tenté par $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots)$ mais à quel ensemble appartiendrait une telle liste ? Pour un N-uplet, la notation $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ ne décrit pas vraiment ce qui se passe parce qu'elle contient des points de suspension : les parties non explicitées sont laissées à l'intuition du lecteur qui complètera en fonction de son « bon sens» et de sa culture

mathématique. De plus, cette notation ne se prête pas à une généralisation où on fait tendre N ver l'infini. La notation précise serait $(a_i)_{i\in\mathbb{N},1\leq i\leq N}$. On sait précisément ce qu'il se passe à chaque rang et elle se généralise au cas où les indices sont les éléments de $\mathbb{N}$. L'ensemble de ces listes infinies étant noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on obtient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Or, lorsque D et A sont deux ensembles, l'ensemble des fonctions de D dans A est noté A^D, ce qui nous ramène au premier aspect : celui où les suites sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On passe d'un aspect à l'autre de la façon suivante. A la liste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on associe la fonction

$$a\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\longmapsto a_n\end{cases}$$

Inversement, à une fonction a de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ on associe la liste $(a(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour illustrer les différences portées par ces deux points de vue, nous avons proposé les deux représentations suivantes (figure 5).

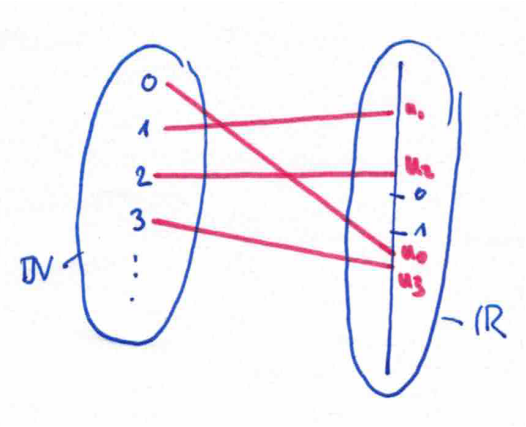
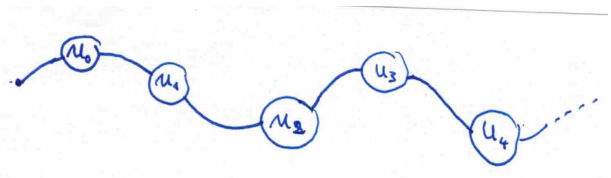
Point de vue fonction	**Point de vue liste de nombres**
Une suite u est une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ 	Une suite est une liste ordonnée de réels, des réels placés « à la file » u_0 ; u_1 ; u_2 ; … 

Figure 5 – Deux points de vue sur les suites numériques

Les travaux de Sierpinska (1990) montrent que la conception d'une suite comme un ensemble (centrée sur les termes indépendamment de l'ordre) ou une « très longue liste de nombres » (p. 31) indépendamment de l'aspect fonction, sont des obstacles à la compréhension de la notion de limite. Une étude menée en Pologne (Przenioslo, 2006) auprès d'élèves de fin du secondaire et d'étudiants à l'entrée à l'Université a montré que 12% d'entre eux seulement prenaient en compte l'aspect fonctionnel d'une suite numérique.
Une des pistes explorées par Przenioslo pour expliquer ce constat est le « sentiment d'un concept autonome » : le concept de suite est vu par les étudiants comme indépendant du concept de fonction. L'auteur interprète ce résultat comme une conséquence du fait que ce sont des chapitres indépendants mais aussi par le nom spécifique (« suites »), et des usages différenciés de représentations, langagière verbale (le vocabulaire terme/rang *vs* image/antécédent, monotonie pour sens de variation), les notations symboliques (u_n pour $u(n)$), les représentations graphiques, les techniques (signe de u_{n+1}-u_n *vs* signe dérivée).

Nous avons rapproché ces deux points de vue de deux interprétations possibles de la lettre n. Ainsi « n » peut être interprété comme une variable qui renvoie à un nombre sur lequel il est possible d'opérer, et dans ce cas la somme « $n + 1$ » peut être considérée comme une augmentation de n de 1 ou le résultat d'un calcul. D'un autre point de vue, n peut être interprété comme un numéro qui désigne la position

dans une liste ordonnée (comme un dossard). Dans ce cas « $n + 1$ » est le successeur de n, ce qui peut être considéré comme une notation du nombre que l'on dit « après » un nombre n donné dans la suite des mots-nombres telle qu'on l'apprend dans les premières années à l'école, ce qui pourrait constituer un obstacle à l'idée de substitution dans « n+1 ». Ce second point de vue nous a semblé favorisé par l'étude des suites définies par récurrence avec la notation u_n. Dans notre groupe, nous avons fait l'hypothèse, à l'inverse, que la notation $u(n)$ dont l'usage est préconisé par les programmes mais dont une rapide étude de manuels montre qu'elle n'est pas tellement travaillée, pourrait être de nature à favoriser l'interprétation de n comme variable en lien avec le point de vue fonction des suites et permettre de développer des discours dans la classe pour prendre en charge les difficultés que nous avons identifiées précédemment. Toutefois, le point de vue fonctionnel nécessite de prendre en charge la question de la relation entre plusieurs variables.

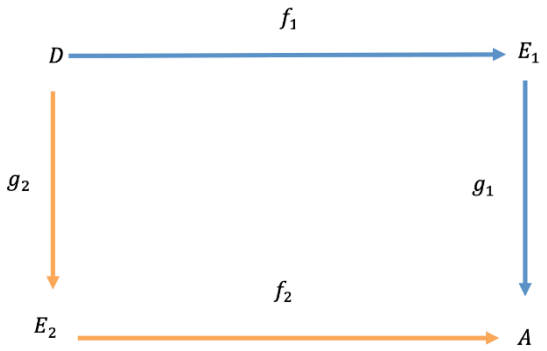
Pour illustrer ceci, revenons à la suite définie par la donnée de u_0 et la relation, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3n$. Pour les experts une telle relation ne présente pas de difficulté. Il suffit de remplacer n par 0 pour obtenir u_1 , puis par 1 pour obtenir u_2 et ainsi de suite. Pour comprendre la complexité du jeu entre les variables de l'expression, nous allons adopter le point de vue fonctionnel et expliciter toutes les variables. Nous aurons besoin de la notion de digramme commutatif : considérons quatre ensembles D, E_1 , E_2 A, et quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 dont les ensembles d'arrivée et de départ sont définis par le diagramme ci-dessous.

On dit que ce diagramme est commutatif si $g_1 \circ f_1 = f_2 \circ g_2$. Considérons maintenant les cinq fonctions suivantes relatives à l'égalité « $u_{n+1} = 2u_n - 3n$ ».

La suite u	La suite i	La fonction « successeur »
$u \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{cases}$	$i \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \longmapsto n \end{cases}$	$s \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{cases}$
La fonction notée (u,i)	La fonction notée f	
$(u,i) \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ n \longmapsto (u_n,\ n) \end{cases}$	$f \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x - 3y \end{cases}$	

Figure 7 – Cinq fonctions relatives à l'égalité « $u_{n+1} = 2u_n - 3n$ »

L'égalité $u_{n+1} = 2u_n - 3n$ est vraie si et seulement si le diagramme ci-dessous est commutatif.



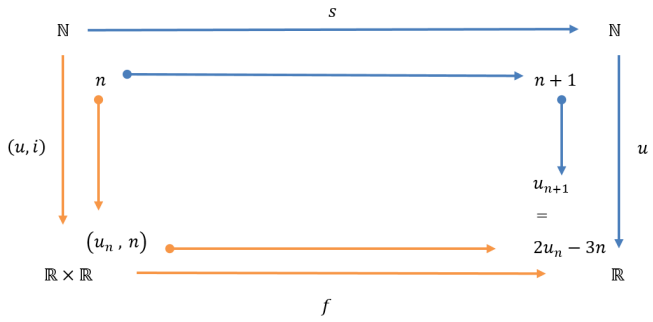


Figure 8 – Diagramme commutatif associé à l'égalité « $u_{n+1} = 2u_n - 3n$ »

Ce diagramme illustre les équivalences suivantes

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3n \iff \forall n \epsilon \mathbb{N}, u(s(n)) = f(u_n, n) \iff u \circ s = f \circ (u, i)$$

La nécessité de considérer une fonction à deux variables, et d'expliciter le plongement de ℕ dans ℝ à l'aide de la suite *i,* révèle la complexité des relations entre la variable *n* et les différents rôles qu'elle prend dans l'égalité.

Des discussions autour d'une tâche de calcul : difficultés d'élèves et enjeux d'enseignement

Afin d'explorer plus avant les difficultés langagières mais aussi des pistes de prise en charge de ces difficultés dans la classe, nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de transcription d'une séance en 1ère Spécialité. Cette séance fait partie d'une séquence exploratoire mise en œuvre par l'une d'entre nous. Nous avons fait l'hypothèse que la notation $u(n)$ et le travail de la correspondance entre rangs et termes pourraient permettraient de rendre plus visible le statut de variable de *n* comme celui de *x* dans $f(x)$ et que la prise en charge par des moyens langagiers des relations entre variables mais aussi de savoirs liés aux substitutions pourrait permettre d'améliorer les apprentissages.

Dès la première activité de la séquence, les élèves ont été amenés à produire des phrases pour exprimer de manière générale la relation entre un terme de rang *n* d'une suite donnée à partir de premières valeurs numériques et le terme de rang $n + 1$ ainsi qu'entre un terme d'une suite et son rang, afin d'articuler les deux aspects «fonction» et «liste» présentés précédemment. Les deux notations $u(n)$ et u_n ont été utilisées tout au long de la séquence. Des tâches de substitution de *n* dans des formules explicites avec la notation fonctionnelle ont aussi été proposées. Nous avons de plus supposé que des tâches de calculs de termes pour des suites définies par une expression de $u(n + 1)$ qui dépend de $u(n)$ et de *n* pourraient permettre de prendre en charge les difficultés d'identification des variables, de dépendance de l'une par rapport à l'autre et des savoirs liés aux substitutions. Ce sont des discussions dans la classe à l'occasion de la résolution d'une telle tâche, que nous avons proposé aux participants de l'atelier d'analyser. Les écritures au tableau sont les suivantes.

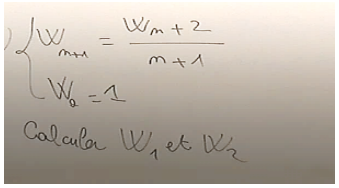


Figure 9 – Un exercice de calcul de deux termes d'une suite

Les discussions avec les participants ont permis de faire émerger que plusieurs substituées sont possibles : *n*, mais aussi $n + 1$, w_{n+1} et w_n. Le fait que la variable *n* apparait dans l'écriture sous le trait

de fraction pourrait favoriser une nécessaire identification de la variable *n* et de la substituante pour pouvoir effectuer ce remplacement, autrement dit, cette forme vise à ce que les élèves ne remplacent pas seulement v_n sans penser le remplacement de *n*.

Une tâche qui génère des débats entre les élèves

L'extrait de transcription suivant montre que c'est précisément sur ces points que s'interrogent deux élèves côte à côte à partir du cahier de l'une d'elles (figure 10).

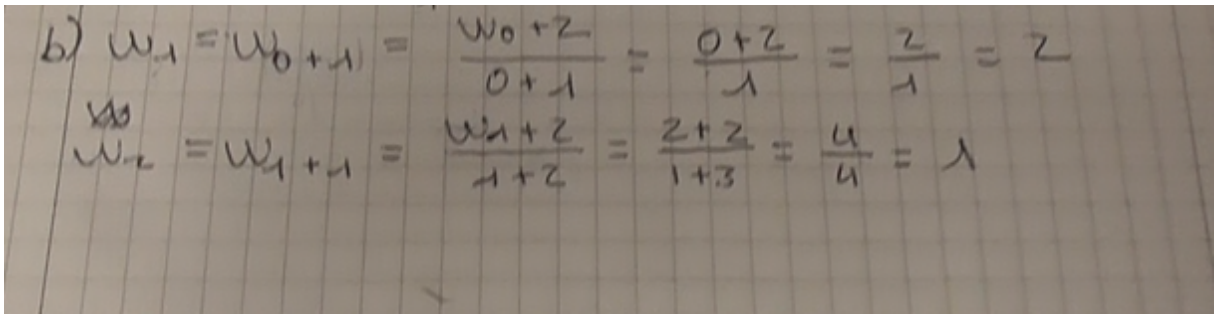


Figure 10 – Cahier de l'élève E1 support de discussions

E1 On a un doute ici (*montre* $\frac{w_1+2}{1+2}$ *sur le cahier de sa voisine*) […] c'est pour en dessous ce qu'il faut mettre
E2 c'est le *n*
E1 mais vu que c'est *n* plus un moi j'ai mis zéro
P […] Et toi tu en penses quoi ?
E2 que le *n* c'est ça (*montre « 1 » dans « w_1 »*) du coup j'ai mis un (*en montrant* $\frac{w_0+2}{0+1}$ *sur le cahier de sa voisine*)
E1 pourquoi j'ai mis plus deux en dessous par contre
E2 oui là tu t'es trompée
E1 oui c'est plus un
P oui ça c'est sûr
E1 oui et là pourquoi j'ai mis plus trois c'est un aussi et là c'est deux

On peut se demander si finalement ce n'est pas l'idée de remplacer par « le suivant » d'un nombre qui a piloté les écritures produites au dénominateur de la fraction, comme si les nombres devenaient variables (dans le sens gauche / droite « 1 + 2 » devenant « 1 + 3 » ou dans le sens haut / bas « 0 + 1 » devenant « 1 + 2 ») et les remplacements se réalisaient dans les expressions numériques. Un peu plus tard, l'élève E1 expliquera d'ailleurs, « là je me suis trompée, j'ai cru que w_0 c'était égal à zéro », un peu comme si les substituantes étaient à trouver dans l'écriture à gauche du signe « = » ou en indice plus généralement même si les écritures renvoient aussi à une erreur usuelle sur l'identification de la structure (la somme de deux termes dont le premier est w_0) qui paraît perturbée par la notation indicielle. Il y a une forme d'instabilité de la source dans laquelle les substitutions s'opèrent qui d'ailleurs paraît invisible dans le discours des élèves, malgré la mention de *n*. Par exemple, pour w_1, E2 paraît ne réaliser la substitution que dans le membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Pour w_2, E1 paraît réaliser des substitutions dans $\frac{w_0+2}{0+1}$ qu'elle a calculé précédemment.

Des notations qui peuvent prendre le pas

Nous avons proposé aux participants de visionner un extrait vidéo lié à la production de l'élève E3 avant de travailler à partir de la transcription suivante.

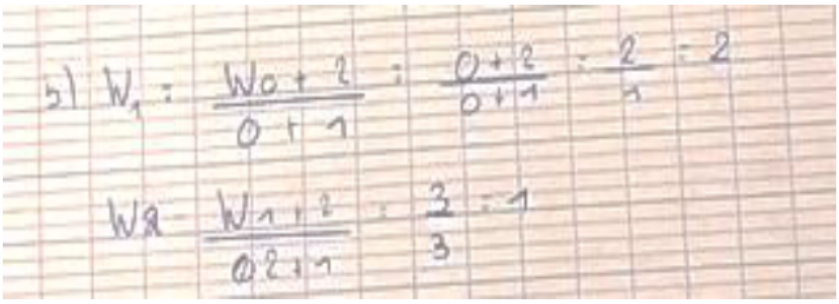


Figure 11 – Cahier de l'élève E3

P pourquoi ça fait trois ici (*en montrant le dénominateur de la dernière fraction*)
E3 parce que après j'ai oublié de mettre deux plus un encore j'ai directement mis trois plus trois
P oui mais c'est faux
E3 je le mets ?
P non c'est pas deux plus un
E3 w un ça fait deux donc on fait deux plus deux ah non ça fait quatre
P oui et en bas ? en bas c'est *n* plus un donc t'as décidé de mettre quoi à la place de *n* ?
E3 ben w deux heu non, ben si *n* plus un ah non c'est un plus un

Pour w_1, cet élève réussit à réaliser la première étape en remplaçant *n* par 0. Toutefois, lors de la deuxième étape, c'est la même substituante qu'il envisage puisque w_0 est à nouveau remplacé par 0. Est-ce un effet de l'écriture « 0 » en indice dans w_0 en lien avec les substitutions pour les suites définies de manière explicite ou bien un effet de substitutions anciennes pour lesquelles il n'y a souvent qu'une substituante ? On peut aussi penser que l'écriture du signe « + » l'amène à s'affranchir de l'écriture « *w* » comme si l'opération et les écritures de nombres prenaient le pas dans l'identification de la structure de l'expression.
Dans le calcul suivant, l'élève a tout d'abord écrit « 0 » au dénominateur avant de le barrer. Ceci amène à penser qu'il n'a peut-être pas travaillé à partir de la source « $w_{n+1} = \frac{w_n+2}{n+1}$ ») mais plutôt à partir de l'écriture au-dessus de ses calculs pour w_1 dans une forme d'analogie en remplaçant « w_0 » par « w_1 » et « 0 » par « 2 » sans doute en lien avec l'écriture en indice de « 2 » dans w_2 donné à calculer. Autrement dit, il semble que les substitutions ne sont pas opérées dans l'égalité de l'énoncé. C'est d'ailleurs au moment où il est invité à y revenir (« en bas c'est *n* plus un ») qu'il réussit à se corriger.

Les parenthèses : une aide pour travailler sur les variables ?

Nous avons partagé avec les participants un certain nombre de questions que nous nous posons dans notre groupe à propos des parenthèses. Si certains épisodes nous amènent à penser qu'un passage régulier d'une notation à l'autre a permis à certains élèves de mieux identifier des substitutions en lien avec l'idée de variable, elles peuvent aussi rendre difficile la lecture de la structure d'une expression. Par exemple, à l'occasion de la résolution d'un exercice où une fonction est définie par l'expression $u(x) = 3x + 2$, une élève explique : « elle a remplacé *x* par l'indice » pour le calcul suivant, les parenthèses pouvant ainsi jouer un rôle pour l'identification de l'expression « n+1 » comme « un tout », et non comme un calcul à effectuer.

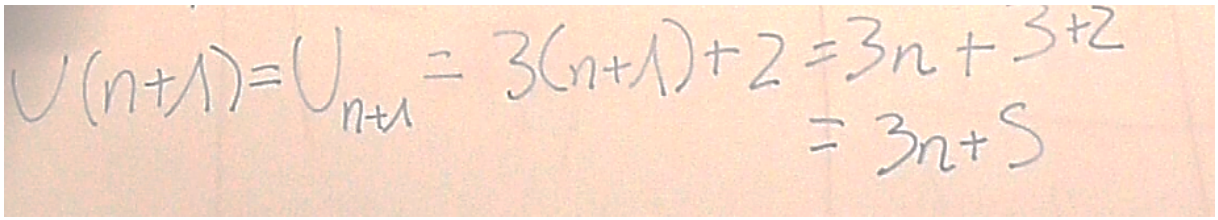


Figure 12 – Ecritures au tableau d'une élève

Pour le calcul du terme v_1 d'une suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -v_n^2 - 1$ et $v_0 = 1$, un élève explique l'écriture suivante à droite du signe « = » en disant « parce qu'il y a un moins et le *v* c'est un » et plus tard « je savais pas par quoi le remplacer » en parlant de « *v* ».

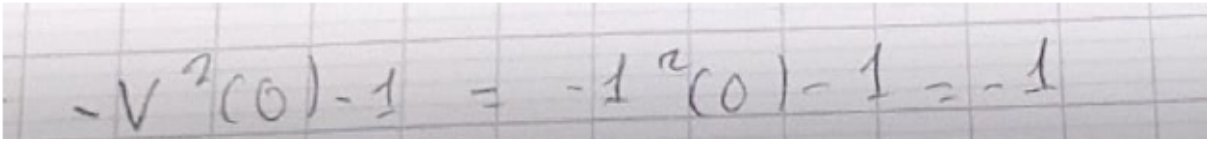


Figure 13 – Cahier d'un élève pour le calcul de v_1

Les parenthèses l'amènent à réaliser une multiplication. La présence d'un exposant a sans doute aussi rendu difficile l'identification de la structure de l'expression, d'autant que remplacer une écriture parenthésée comme « *v*(0) » renvoyant à l'image d'une fonction ne fait pas partie de ce qui se fait usuellement au lycée dans le travail sur les fonctions. De fait, nous pensons que ces usages nécessitent des prises en charge particulières, et qu'une notation pour les substitutions pourrait être utile au regard de la multiplicité des substitutions qui se réalisent dans un calcul comme le suivant et qu'illustrent les flèches.

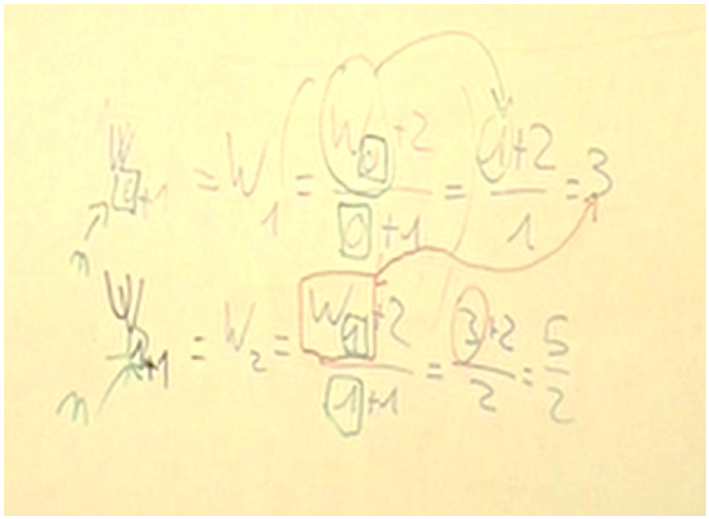


Figure 14 – Ecritures au tableau soutenant l'identification des substitutions à opérer dans les calculs des termes w_1 et w_2

Conclusion : des savoirs pour l'enseignement et des enjeux de formation

Nous pensons important de donner des tâches de ce type pour faire émerger en classe des questions pour les élèves et des discours autour des différentes variables dans les écritures autour des suites mais aussi des valeurs que prennent les variables et des substitutions qui s'y rapportent. Toutefois, les difficultés des élèves à produire des explications autour des usages des écritures nous ont amenés à lister des « savoirs » qui nous paraissent nécessaires à prendre en charge. Par exemple, savoir que v_{n+1} est une

variable, qu'elle peut prendre plusieurs valeurs et que ces valeurs dépendent de celles attribuées à $n+1$ donc à n. Savoir qu'une même variable doit prendre la même valeur partout dans une formule pour conserver l'égalité ou encore qu'une même variable ne peut pas être remplacée par deux valeurs différentes, mais deux variables différentes peuvent avoir la même valeur. Plusieurs substitutions sont possibles mais lorsqu'on remplace v_n par v_0, n est alors remplacé par 0 *puisque les variables n et* v_n *sont dépendantes (autrement dit, la valeur d'un terme dépend de la valeur de son rang* – ce qui donne une autre acception de la locution « le terme de rang *n* »*)*. Lorsqu'on a une égalité, on peut substituer l'un de ses membres par l'autre dans une autre égalité sans changer son dénoté.

Si ces savoirs ne sont pas identifiés dans les premières aides envisagées par les étudiants pour les élèves, l'expérience de formation des participants nous a amenés à faire l'hypothèse dans l'atelier que des discours prenant en charge ces savoirs existent sans doute peu dans les classes, ce qui constitue un enjeu de formation au-delà de la formation initiale. Ceci renvoie pour nous non seulement à permettre aux enseignants de mieux identifier les difficultés d'élèves dans les manipulations des écritures symboliques en lien avec la notion de variable reposant sur de nombreuses connaissances implicites, mais aussi de considérer qu'il y a des savoirs à enseigner et à apprendre autour de leur fonctionnement pour faire des mathématiques, qui vont bien au-delà de l'identification des substituantes et des substituées. Plus encore, les substitutions réalisées au collège et en 2nde et celles qui sont attendues pour l'étude des suites en 1ère sont très différentes et nécessitent des adaptations de connaissances.

Nous avons peu exploré dans l'atelier faute de temps la question des usages du langage verbal associé aux manipulations d'écriture dans l'étude des suites qui est, avec l'élucidation de savoirs transparents, au cœur des réflexions que l'on mène dans notre groupe IRES. En particulier, à l'oral, les discours experts amènent à désigner les suites comme les termes de la même manière à partir d'une notation lue comme si on épelait un mot (u/n). Ainsi que le note Robert (1982), la notation (u_n) des suites (que l'on trouve dans les manuels actuels) donnant à voir les images, conduit à des abus de langage via l'omission de « $n \in \mathbb{N}$ », mais aussi à rendre d'autant plus difficile la distinction entre la suite du point de vue fonctionnel et l'ensemble des valeurs images de la fonction. Ceci peut être renforcé par le fait que la relation entre terme, suite et rang est souvent lacunaire (on parle souvent du terme d'une suite, ou du terme de rang *n*), et pourrait davantage renvoyer à un point de vue « liste ». Tout ceci constitue selon nous une piste importante à développer pour la formation, en questionnant les implicites véhiculés par les usages des notations et du langage verbal dans la perspective de développer des moyens pour les enseigner. La question de la manière dont on peut prendre en charge ces savoirs dans la classe tout en amenant les élèves à développer des discours leur permettant de mieux identifier et comprendre les usages des écritures symboliques pour manipuler les suites reste au cœur du travail de notre groupe.

Références :

Chesnais, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement. Note de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches*. Université de Montpellier. ⟨tel-02046178⟩

Constantin, C. (2017). Techniques de calcul et systèmes de nombres : quelles articulations de l'école au collège ?, *actes du 24e colloque de la COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques*. https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2017_04.pdf

Constantin, C. (2021). La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 26,* 157-194. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_26/adsc-2021_005-157-194.pdf

MENJ (2019). Programmes de mathématiques de spécialité en première générale. BO spécial n° 1 du 22 janvier 2019.

Margolinas, C. & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J. Y. Rochex & J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires*. PUR, p. 19-32.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 805–823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Robert, A. (1982). *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. [Thèse de doctorat, Université Paris VII].

Rousse, S. (2021). Le discret et le continu dans l'enseignement des suites et des fonctions en fin de collège et au lycée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 26,* 45-84 https://doi.org/10.4000/adsc.954

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Editions PETRA.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–41. http://www.jstor.org/stable/40247990

ATELIER C13 La lettre au collège : expérimentations par le groupe Collège de l'IREM des Pays de Loire

Anne ARNEAULT, Thierry BARON, Badri BELHAJ, Franck BERNARD, Nicole DERSOIR, Sylvie GRAU, Christian JUDAS, Vincent LE GLAUNEC, Céline SAUVETRE

Le groupe collège de l'IREM des Pays de Loire s'est donné comme objectif de penser une continuité dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. A partir des nombreuses publications scientifiques (Alves et al., 2013; Bronner & Squalli, 2020; Constantin & Coulange, 2017; Grugeon & Coppé, 2014; Grugeon-Allys et al., 2012; Grugeon-Allys & Pilet, 2017) et ressources sur le sujet, le groupe cherche à identifier certains obstacles et à construire et analyser des situations expérimentées en classe visant à les dépasser.

Dans un premier temps, nous présenterons les objets sur lesquels nous avons choisi de travailler : le statut du signe « = », la production de formules et la résolution d'équations sans la lettre. Ensuite nous ferons une analyse à priori de trois situations expérimentées en classe. A partir des productions des élèves et des analyses à posteriori, nous discuterons des effets de ces situations sur l'apprentissage des élèves mais aussi sur l'enseignement et le développement professionnel des membres du groupe. Ce temps réflexif permettra de mieux comprendre à quelles conditions et en quoi l'investissement dans un groupe IREM peut jouer un rôle dans la formation continue des enseignants de mathématiques.

Présentation du groupe et de ses objets de travail

Le groupe s'est constitué en 2020 autour de la question de l'organisation d'un enseignement cohérent de l'algèbre au collège à partir des multiples ressources existantes. Le groupe a posé quatre grands principes pour fonctionner : travailler ensemble, coopérer, collaborer ; progresser et se voir progresser ; construire des situations à tester et analyser ; gagner en efficacité auprès des élèves. Le travail a commencé par une analyse des programmes et des difficultés que rencontrent les élèves à travers les évaluations nationales, une revue de lecture permettant d'actualiser ce que la recherche dit sur le sujet et en particulier le groupe a porté son intérêt sur les publications de l'OIPA (Observatoire, International de la Pensée Algébrique[8]). Très vite deux axes ont été privilégiés : comprendre ce qui se joue dans le principe d'un enseignement précoce de l'algèbre (Early algebra) ; analyser l'activité des élèves lors de

8 https://www.oipa.education/pour-en-savoir-voir-plus

la mise en œuvre de situations conçues dans l'idée de dépasser les obstacles à l'entrée dans l'algèbre identifiés par la recherche.
A partir des programmes 2020 pour le cycle 4, nous avons pu identifier les types de tâches auxquelles les élèves sont confrontés dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre : « Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. » (Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse, 2020).

Trois genres de tâches sont modéliser, démontrer et résoudre, pour lesquels on peut identifier différentes praxéologies :

- Généralisation : amène à la production de formules, à l'identification de structures.
- Modélisation : permet des mises en équations
- Calcul : permet des transformations d'expressions, la résolution d'équations.

Nous nous sommes alors intéressés aux continuités et ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre. A partir des travaux de Radford, nous avons cherché ce qui faisait obstacle à l'entrée dans la pensée algébrique pour nos élèves de collège.

> « Les trois caractéristiques des formes spécifiques de la pensée algébrique sont définies par Radford (2013) pour qui elles sont épistémologiquement différentes de celles de l'arithmétique : l'usage de nombres non connus (inconnues, variables, etc.) dans la résolution de problèmes, la désignation de ces nombres par différents moyens (codages, gestes, …), l'analycité, c'est-à-dire le traitement des quantités inconnues comme si elles étaient des nombres connus. » (Pilet & Grugeon-Allys, 2022)

Ces trois caractéristiques font qu'en algèbre, contrairement à l'arithmétique, un nombre peut s'écrire sous forme d'un « calcul » en ce sens que l'écriture « $2x - 5$ » désigne à la fois une opération (calcul) et la différence (nombre). Par ailleurs une écriture peut être considérée comme une expression procédurale du fait qu'elle permet un calcul, ou une expression structurelle puisqu'elle montre un agencement. Par exemple « $2x - 5$ » indique qu'il faut multiplier un nombre par 2 puis retirer 5 mais aussi que le résultat est la différence du produit de x par 2 et de 5. Ainsi le signe d'égalité « = » a différents statuts. Il peut être utilisé pour signifier « donne comme résultat » ce qui impose une lecture souvent de gauche à droite, le membre de gauche étant considéré comme un calcul et celui de droite comme un nombre. On comprend alors que cette signification du signe d'égalité ne peut pas s'étendre à l'algèbre. Il peut aussi être considéré comme signifiant « équivaut à », mais il peut aussi servir à assigner (« Soit $a = 2$, … »). Et surtout en algèbre, l'égalité peut avoir une valence de vérité qu'on ne lui donne pas en arithmétique (« $2x - 5 = 7$ » est vraie pour $x = 6$ et fausse sinon).

D'après Jeanotte et Squalli (2022), la pensée algébrique se déploie au moyen :

- d'un ensemble de raisonnements particuliers ;
- des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques ;
- des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

La pensée algébrique peut donc être travaillée avant l'introduction de la lettre par des activités de généralisation liées aux activités sur les motifs (patterns) numériques et géométriques, pour aller ensuite sur des généralisations liées aux propriétés des opérations et aux structures numériques, la représentation des relations entre les quantités et enfin l'introduction de la notation alphanumérique (Radford, 2013). Pourtant les élèves rencontrent des écritures mathématiques utilisant la lettre dès le cycle 2 à travers les formules (aire, périmètre), mais aussi dans la désignation d'unités (2cm) ou comme étiquette (u,d,c dans le système décimal). De plus, dans l'écriture d'une formule, la lettre peut avoir différentes désignations :

> « Dans une formule d'aire, une lettre pourra désigner une inconnue, une variable ou un nombre généralisé selon le regard que l'on porte sur cette formule, selon l'usage que l'on veut en faire, selon la question que l'on se pose. » (Tremblay et al., 2021)

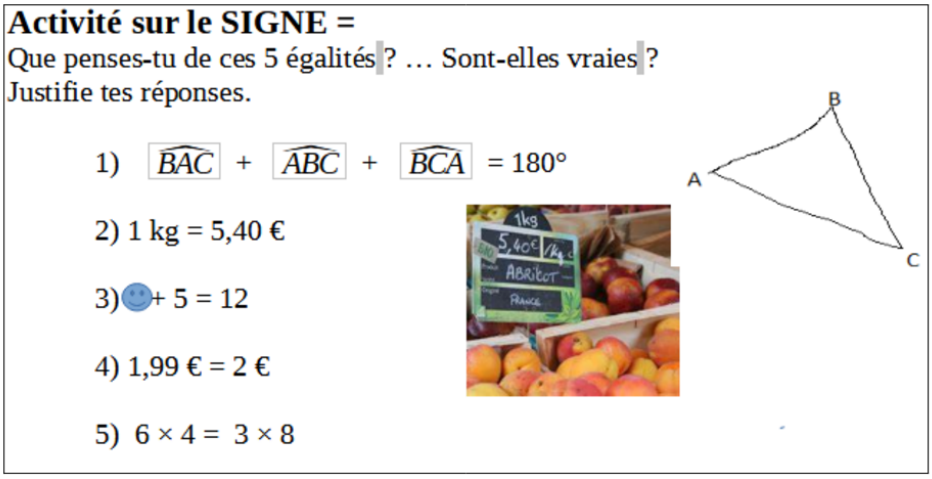
A partir de ces résultats, nous avons orienté notre recherche autour de trois types de situations : un travail autour de l'égalité, la production de formules et la résolution d'équations sous forme de pictogrammes. Ces trois activités ont été proposées dans l'atelier réparti en trois groupes de travail avec comme

consigne d'en faire une analyse à priori et de discuter de sa pertinence au regard des objectifs ciblés. Chaque participant a été invité à proposer des aménagements ou à présenter des activités similaires utilisées en classe. La synthèse de ces échanges est exposée dans la partie qui suit.

Activités autour de l'égalité en 6e

Présentation de la situation et analyse à priori

Pour familiariser les élèves avec les différents statuts du signe =, nous nous sommes arrêtés au départ sur la consigne : ces égalités sont-elles toujours vraies ? parfois vraies ? jamais vraies ? Nous avons testé quelques exemples dans nos classes. Ces situations amenaient toujours de riches échanges entre les élèves et donnaient l'occasion de questionner le sens du signe d'égalité. Mais, nous nous sommes aussi interrogés sur la pertinence de nos choix de questions et de contextes, sur les blocages des élèves et sur le sens que les élèves donnaient à l'utilisation du signe « = ». Il nous a alors semblé nécessaire de clarifier le sens du signe d'égalité, surtout en début de collège.
Pour cela, une petite série de questions a été donnée à des classes de 5e, sous forme d'activité rapide, pour réinvestir ensuite le bilan à différents moments de l'année. L'objectif était d'amener les élèves à se questionner sur l'utilisation adaptée du signe « = ». Les égalités proposées dans le document ci-dessous mettent en évidence des erreurs que les élèves font de manière récurrente et devaient entraîner la formalisation des règles et conventions autour de l'utilisation du signe « = ».



Activité sur le SIGNE =

Que penses-tu de ces 5 égalités ? … Sont-elles vraies ?
Justifie tes réponses.

1) $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

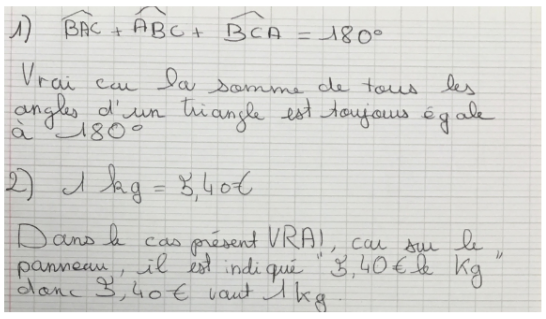
2) 1 kg = 5,40 €

3) ☺ + 5 = 12

4) 1,99 € = 2 €

5) $6 \times 4 = 3 \times 8$

Analyse de productions d'élèves

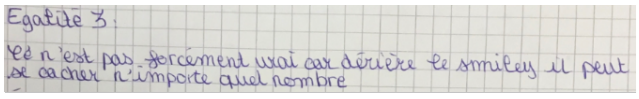


1) $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180°$

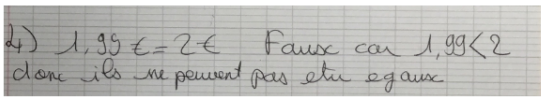
Vrai car la somme de tous les angles d'un triangle est toujours égale à 180°

2) 1 kg = 5,40€

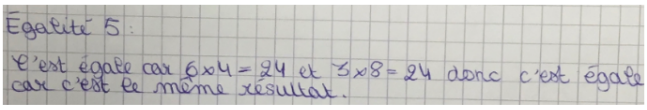
Dans le cas présent VRAI, car sur le panneau, il est indiqué "5,40€ le kg" donc 5,40€ vaut 1 kg.



Egalité 3 :
Ce n'est pas forcément vrai car derrière le smiley il peut se cacher n'importe quel nombre



4) 1,99 € = 2 € Faux car 1,99 < 2 donc ils ne peuvent pas être égaux



Egalité 5 :
C'est égale car 6×4 = 24 et 3×8 = 24 donc c'est égale car c'est le même résultat.

Les productions ci-dessus montrent que les élèves, lorsqu'ils sont interrogés sur la valeur de vérité des égalités, formalisent explicitement certaines représentations qui montrent les interprétations diverses du signe « = » suivant le contexte. Pour la première égalité, les élèves ajoutent dans leur justification les mots « tous » et « toujours » qui attestent d'une perception du quantificateur « quel que soit le triangle ABC » qui n'était pas explicite dans le document. Pour la seconde les élèves précisent « dans le cas présent », ce qui suppose que l'égalité n'est pas toujours vraie, avec l'idée de variabilité du prix au kilogramme des fruits. La question de l'homogénéité n'est pas perçue, le signe « = » est donc plutôt lu

ici comme un signe de correspondance. L'égalité 3 est bien perçue comme pouvant être parfois vraie et parfois fausse, le smiley étant compris comme un « nombre caché » qu'il s'agirait de découvrir. L'égalité 4 est clairement invalidée, il serait intéressant de comparer à la réponse que les élèves auraient fournie pour 1,99… = 2. Pour l'égalité 5, la justification se fait par comparaison du résultat du calcul des deux membres de l'égalité, ce qui peut être un raisonnement à identifier comme pertinent de manière générale : pour démontrer qu'une égalité est vraie, on peut effectuer des traitements sur chacun des deux membres jusqu'à obtenir une expression commune aux deux membres.

Plusieurs éléments ont été donnés en plénière à l'issue du travail :

Le signe « = » ne remplace pas une association entre 2 grandeurs différentes, on écrira plutôt « 1 kg d'abricots coûte 5,40 € » ou « 5,40 € est le prix d'1kg d'abricots ».

Le signe « = » ne doit pas être confondu avec le signe ≈. On écrira : 1,99€ ≈ 2€.

Une égalité peut se lire dans les deux sens.

Le signe « = » ne désigne pas toujours un résultat (de gauche à droite), une réponse à un calcul (une décomposition en produit de facteurs de 24 peut être 6 × 4 et 3 × 8, ces produits représentent le même nombre 24).

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, c'est une propriété, elle est toujours vraie : on dit que cette égalité est vraie.

☺ + 5 = 12 est une égalité qui amène à se questionner … on cherche finalement à trouver la valeur du ☺ qui la rendrait vraie. On dit alors que ☺ + 5 = 12 pour ☺ = 7. C'est aussi alors l'occasion de dire que pour une autre valeur du ☺, l'égalité est fausse.

Aménagements de la situation

Le groupe IREM a continué de s'interroger sur la pertinence des consignes trop vagues qui n'amènent pas l'élève forcément à une réflexion sur le sens de l'égalité. C'est pourquoi, l'activité a été proposée sous une autre forme à d'autres classes par plusieurs membres du groupe.

Un titre est donné à l'activité : Que signifie le signe « = » ?

Deux questions sont posées :

1) Ecrire une phrase correspondant à chaque situation sans utiliser le mot « égal ».

2) Le signe « = » est-il toujours bien utilisé selon toi ?

Cette formulation devait amener l'élève à être plus précis et l'obliger à une traduction de l'égalité.

Une autre expérimentation a été menée cette fois en 3^{e} :

Activité

Observer chacune de ces 12 égalités.

Expliquer si elles sont vraies pour tous les nombres, vraies pour certains nombres ou jamais vraies.

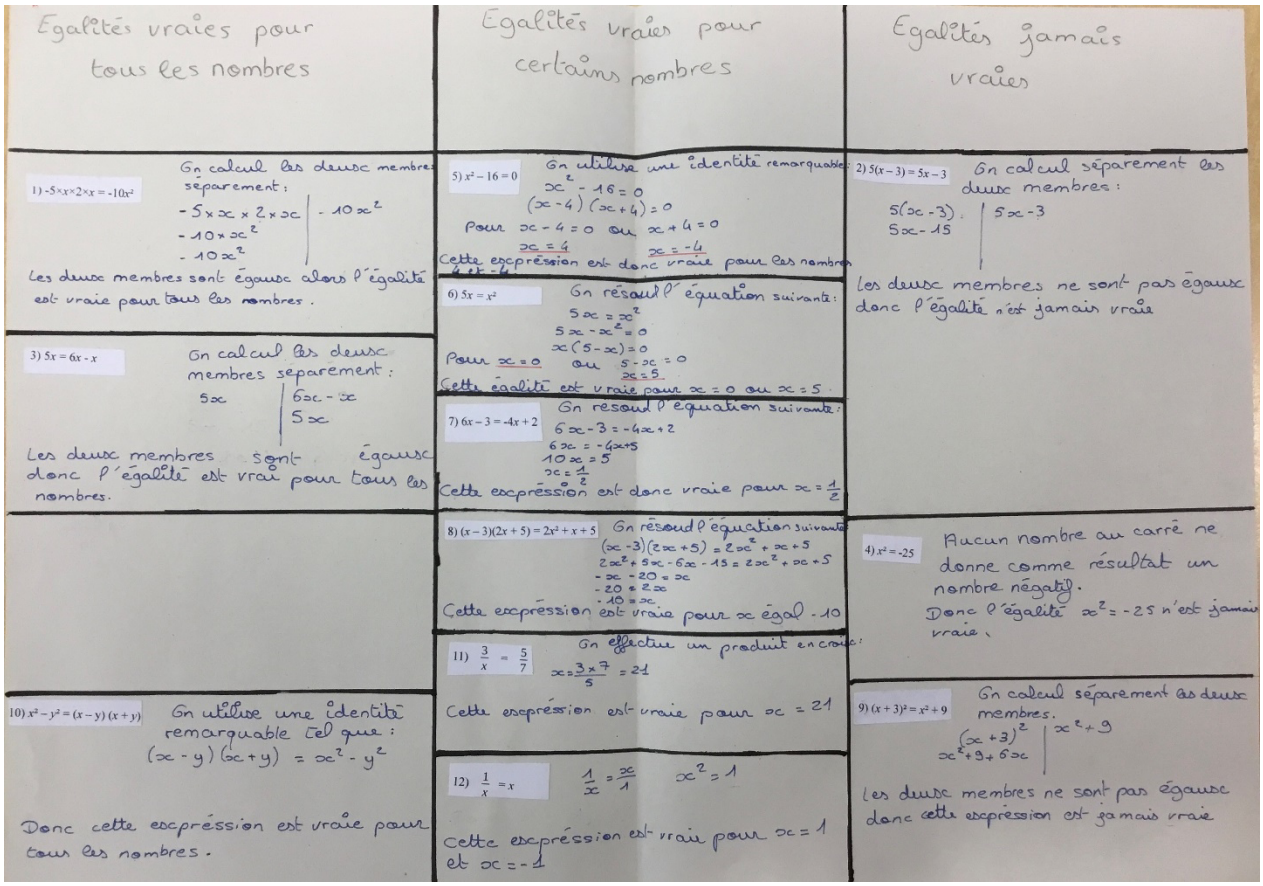
1) $-5\times x\times 2\times x = -10x^2$ 2) $5(x-3) = 5x-3$ 3) $5x = 6x - x$

4) $x^2 = -25$ 5) $x^2 - 16 = 0$ 6) $5x = x^2$

7) $6x - 3 = -4x + 2$ 8) $(x-3)(2x+5) = 2x^2 + x + 5$ 9) $(x+3)^2 = x^2 + 9$

10) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ 11) $\frac{3}{x} = \frac{5}{7}$ 12) $\frac{1}{x} = x$

Cette activité a été donnée en bilan de séquences sur les transformations d'écritures en 3e. Elle a été réalisée en groupe, ce qui a permis de travailler les techniques en donnant de l'intérêt au travail sur les transformations des écritures et du sens à la résolution des équations.



Les productions ont permis de pointer des implicites qui amènent les élèves à des contresens. En particulier le fait de ne pas expliciter les quantificateurs fait qu'une égalité comme $x + x = x^2$ peut être considérée par les élèves comme fausse s'ils la voient comme une règle de transformation (donc en imaginant le quantificateur « pour tout x réel ») alors que d'autres disent qu'elle est parfois vraie quand ils la voient comme une équation à résoudre qui par factorisation est donc vraie pour $x = 0$ et pour $x = 2$.

Cela conforte la nécessité d'utiliser des symboles différents pour mieux faire la différence entre une égalité et une identité (utilisation des lettres en fin de l'alphabet versus celles du début).

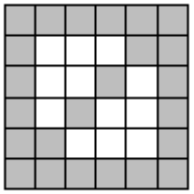
Activité autour de la production de formule : la piscine

Cette activité a été réalisée avec une classe de 5e au tout début de la séquence sur le calcul littéral. L'objectif de l'activité est d'écrire une expression littérale pour généraliser un procédé de calcul.
L'écriture d'une formule suppose pour les élèves différentes représentations qui peuvent être erronées :

- l'écriture d'une égalité alors que parfois un seul membre est donné sous forme algébrique (par exemple : l'aire du rectangle est $L \times l$) ;
- la formule est implicitement vraie ;
- la formule a une portée générale ;
- la formule a une fonction mnémotechnique d'une opération (sa fonction est avant tout opérationnelle) ;
- la formule permet différents calculs suivant le terme qu'il faut déterminer.

Rares sont les formules qui sont explicitement démontrées. Elles apparaissent plutôt comme des lois établies, parfois suite à des expérimentations, pour généraliser une relation observée sur plusieurs cas et non démentie. La preuve se réduit donc souvent au fait de ne pas avoir trouvé de contre-exemple. De plus la loi (en sciences en particulier) est censée pré-exister à son écriture. On découvre une loi, on ne l'invente pas.
Dans l'activité ci-dessous, il s'agit d'amener les élèves à construire une formule permettant de généraliser un calcul.

ACTIVITE : *Écrire une expression littérale*



On souhaite décorer le fond d'une piscine carrée.

Pour cela, on fabrique des motifs à l'aide de carreaux de faïence gris et blancs.

Les carreaux du bord et d'une des diagonales sont gris. Les autres sont blancs.

1) Une petite piscine carrée de 6 carreaux de côté est représentée ci-contre.

Compter le nombre de carreaux gris dans ce cas.

2) On souhaite maintenant utiliser 8 carreaux pour le côté de la piscine. Faire le dessin et compter le nombre de carreaux gris.

3) Et si on avait utilisé 15 carreaux pour le côté de la piscine, combien y aurait-il de carreaux gris ? Réfléchir à la réponse sans faire le dessin de la piscine.

4) Et si on avait utilisé 543 carreaux pour le côté ?

5) Expliquer comment trouver le nombre total de carreaux gris à utiliser en fonction du nombre de carreaux utilisés pour le côté de la piscine.

6) Julien affirme : « On peut fabriquer un motif avec 316 carreaux gris ». Est-ce possible ? Expliquer.

La formule peut ne plus laisser voir le raisonnement. Par exemple le périmètre du carré écrit sous la forme $4 \times c$ ne laisse plus apparaître la définition du périmètre d'un polygone comme somme de ses côtés. L'écriture $c + c + c + c$ est certes plus longue mais elle permet de rendre visible le raisonnement permettant d'associer à « périmètre » une somme et à « aire » un produit. De même écrire : $P = \pi \times d$ est une manière de dire que le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre.

Ainsi dans une perspective de problématisation est-il intéressant de se demander quelles sont les nécessités pour écrire une formule. Une formule peut être nécessaire pour :

- la mémorisation ;

- une économie de calculs ;
- une économie de symboles ;
- garder trace d'un raisonnement ;
- programmer une suite d'opérations ;
- avoir un outil prédictif.

Pour établir une formule, il s'agit donc d'observer différents cas, de repérer ce qui est semblable et différent, de formaliser ce qui est semblable suivant une certaine variable, de tester de nouveaux cas, de prouver la validité de cet énoncé.
Cependant le chercheur qui veut établir une formule, a déjà le projet de trouver cette formule, « il sait ce qu'il cherche ». Dans les classes, les élèves sont au contraire confrontés à observer des faits sans savoir ce qu'il faut chercher. La proposition serait d'inverser l'ordre dans lequel on propose les choses en commençant par poser le problème général pour qu'ensuite l'élève soit amené à travailler les différents cas en sachant à quoi il doit être attentif.

L'activité proposée a été testée dans trois classes de 5e, d'établissements différents et avec des prérequis bien distincts.

1) Dans une classe de 5e d'un collège classé REP avec des élèves ayant travaillé en amont, sur la lettre lors de la séquence sur les aires et les périmètres.
2) Dans une classe de 5e d'un autre collège, sans donner le titre de l'activité.
3) Dans une classe de 5e d'un collège de centre-ville, sans dévoiler le titre de la séquence ni le titre de l'activité, avec quelques modifications dans les intitulés des questions.

Analyse a priori
Les questions sont progressives puisqu'il suffit de dénombrer pour répondre à la première question, ensuite de faire le dessin et de nouveau dénombrer, puis de dénombrer sans le dessin mais avec possibilité de contrôle par le dessin, et enfin de trouver pour une quantité telle que le dessin est impossible à réaliser. La nécessité de la formule peut venir du fait que les clients doivent pouvoir calculer eux-mêmes le nombre de carreaux gris à commander en fonction de la taille de sa piscine. On aurait aussi pu rendre la formule nécessaire en demandant de refaire un très grand nombre de fois le calcul, en amenant par exemple les élèves à utiliser le tableur pour réaliser un tableau pour le catalogue de commande.
La présentation du problème initial tiré d'un manuel, indique qu'il faut faire plusieurs calculs et que la variable indépendante est le nombre de carreaux sur le côté de la piscine. Cela peut attirer l'attention sur le calcul à faire à partir de cette donnée. Cependant plusieurs techniques de dénombrement sont possibles, le calcul peut avoir des structures différentes. Une première difficulté est donc, dès la première question, de planifier un processus de dénombrement (commencer par un coin, dénombrer le contour puis la diagonale, ou faire ligne par ligne, ou remarquer une symétrie…). On peut imaginer que les élèves vont reproduire le processus dans les autres figures, ce qui va amener à éventuellement l'optimiser en repérant des « raccourcis » (par exemple les 4 côtés sont égaux ou la diagonale c'est un côté moins deux carreaux etc.).

La formule a donc comme fonction de décrire le processus de dénombrement. On peut imaginer une formulation en langage naturel pour décrire ce processus, ce sera suffisant par rapport au problème posé ici.

Analyse des productions d'élèves

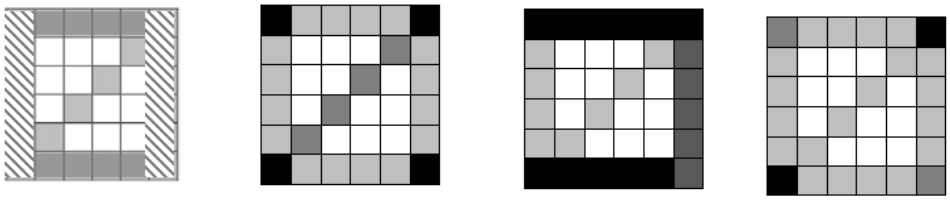
1ère expérimentation

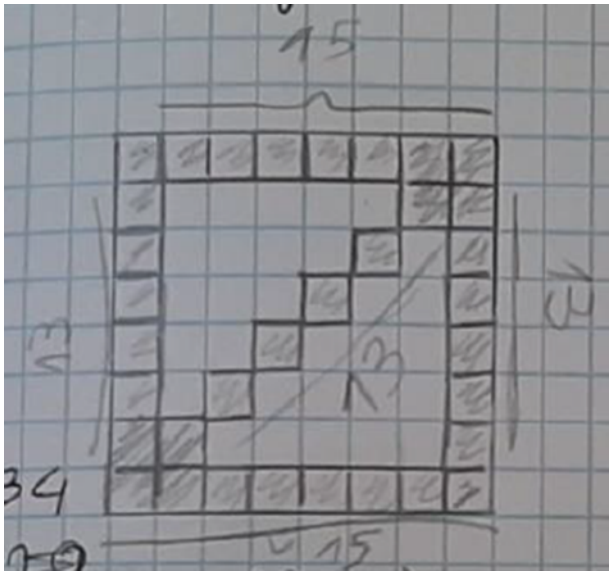
L'activité est proposée dans sa formulation donnée plus haut. Elle a été réalisée avec une classe de 5e au tout début de la séquence sur le calcul littéral. En amont, le travail sur la lettre avait déjà été abordé lors de la séquence sur les aires et les périmètres.

Les élèves ayant déjà eu l'occasion de travailler avec des formules (aires, périmètres par exemple) dans ce contexte, les lettres sont souvent l'abréviation de la grandeur mesurée (L pour Longueur dans un rectangle par exemple). Ce qui signifie que la lettre est porteuse d'un double sens : elle évoque le nom donné à cette grandeur dans le contexte et elle désigne sa mesure dans une unité homogène à l'ensemble de la formule.

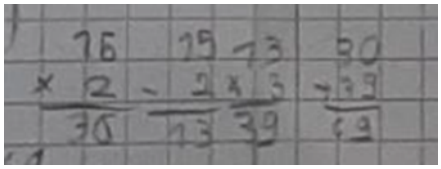
La comparaison des processus amène la nécessité d'avoir une même mise en forme. Cela peut passer par l'intermédiaire de :

- schémas:

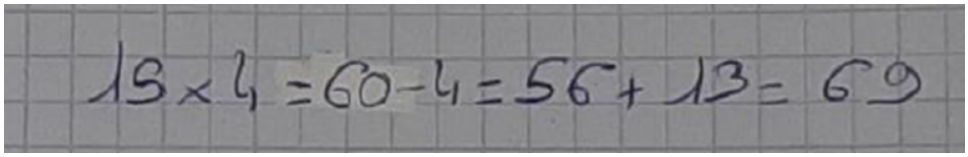


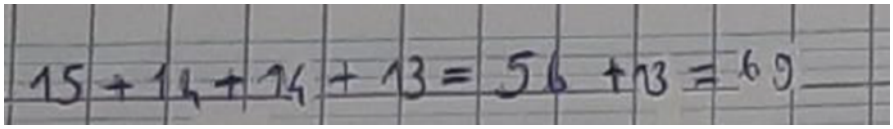


- opérations posées :

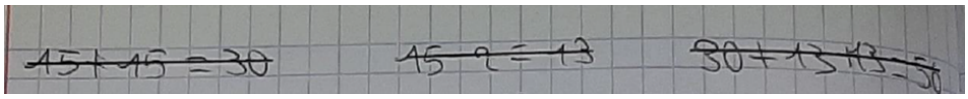


- calculs pas à pas non séparés





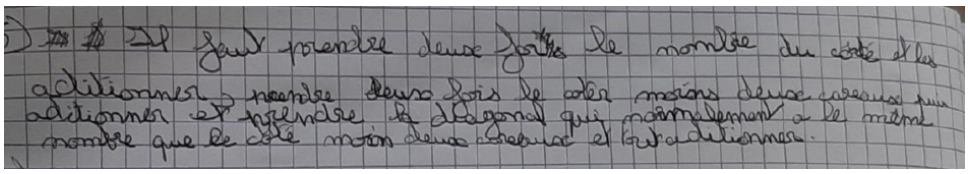
- calculs pas à pas séparés



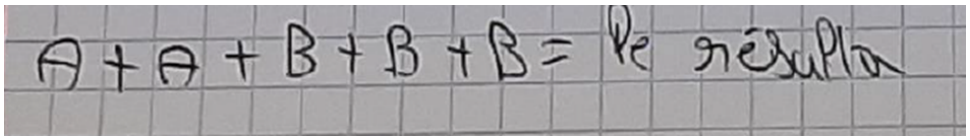
- calcul global en ligne (*sur aucune production ici)*

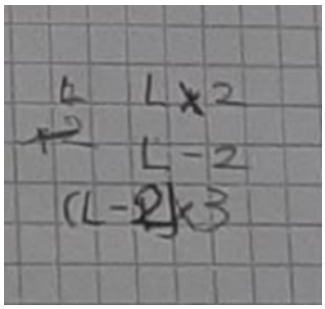
15 + 14 + 14 + 13 + 13 = 15+28+26 = 15+54 = 69

- expression en langage naturel :



- écritures algébriques :







Il semble que la progression soit dans cet ordre : il s'agit de percevoir ici une certaine symétrie dans la figure et une certaine orientation permettant de dénombrer les cases grises en étant certain de toutes les compter sans jamais en compter une plusieurs fois. Ici il n'est utilisé ni un raisonnement arithmétique ni un raisonnement analytique.
La nécessité de dénombrer sans la figure suppose de mettre en place une autre stratégie en repérant des opérations qui vont permettre de modéliser le dénombrement. On remarque que l'écriture de ces opérations montre les étapes du calcul et que l'utilisation du signe « = » a le sens de « a pour résultat » amenant à l'écriture d'égalités erronées. Le raisonnement est arithmétique et on reste sur une écriture procédurale.

Devoir formaliser le processus amène à observer des **régularités** dans le calcul, on entre dans une étude de la structure. Enfin on est amené à **désigner** les quantités utilisées lorsqu'elles sont inconnues. C'est ici que commence l'entrée dans la pensée algébrique : on nomme ou symbolise une quantité inconnue et on la traite ensuite comme s'il s'agissait d'une quantité connue. On a alors un raisonnement analytique.

Le premier nombre utilisé étant le nombre de carreaux sur le côté, le mot « côté » est utilisé, remplacé par certains élèves par une lettre, assez naturellement les élèves utilisent le même mot pour travailler sur

la périphérie et en utilisant un autre pour désigner la diagonale (par exemple L pour largeur et *d* pour diagonale).

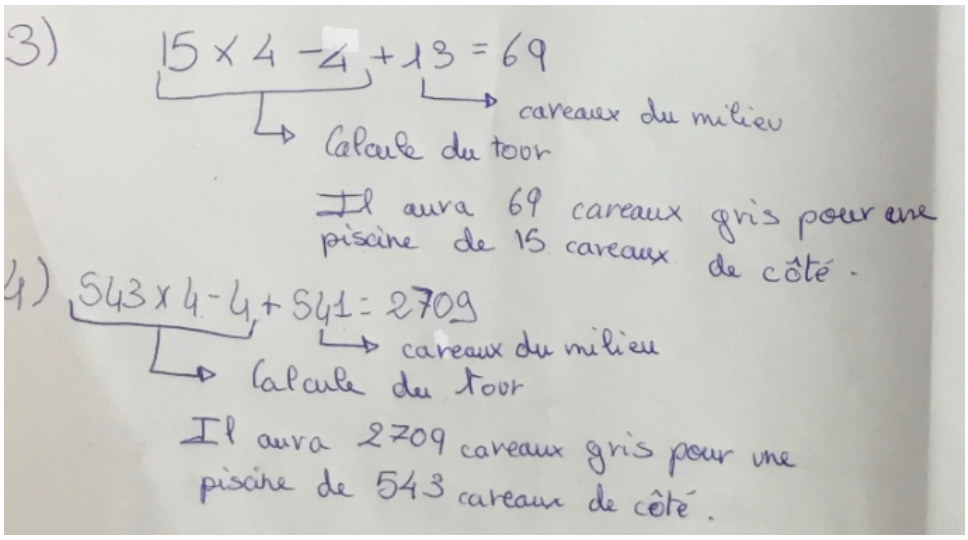
Percevoir que la longueur de la diagonale en carreaux est égale à la mesure du côté est une étape décisive pour exprimer l'ensemble en fonction seulement du côté. L'écriture intègre alors une prise en compte de la dénotation (désignation du même nombre sous des formes différentes). Le raisonnement est algébrique.

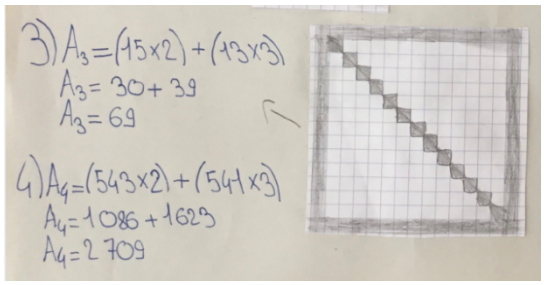
2ème expérimentation

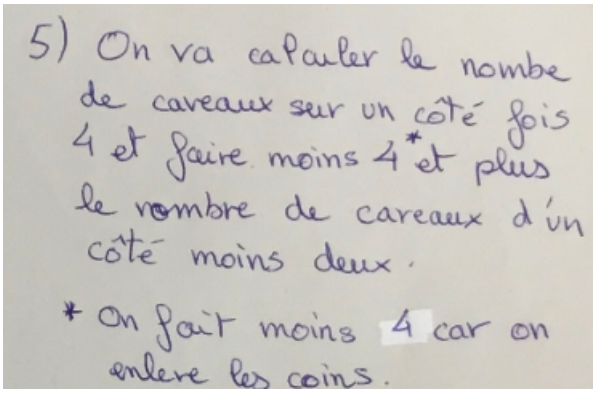
L'activité est proposée dans sa formulation initiale, elle a aussi été réalisée avec une classe de 5e au tout début de la séquence sur le calcul littéral. La principale différence avec l'expérimentation précédente est l'absence du titre de l'activité. Les élèves ne savent donc pas que le problème va traiter du calcul littéral. De plus, aucun travail en amont sur la lettre n'a été réalisé.

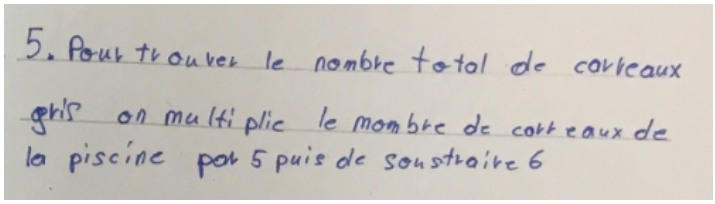
Les productions des élèves utilisent beaucoup plus le registre du langage naturel et des symboles (parenthèses, flèches) pour indiquer la manière dont ils ont organisé le dénombrement.

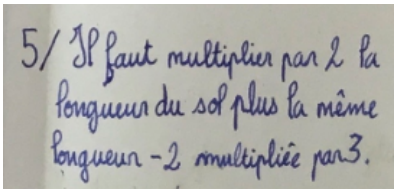
Dans les exemples ci-dessous, les élèves expliquent leur procédure avec des phrases, sans chercher à donner une formule ou ils donnent une suite de calculs, la généralisation prend du sens au fil des questions mais elle apparaît comme un programme de calcul.





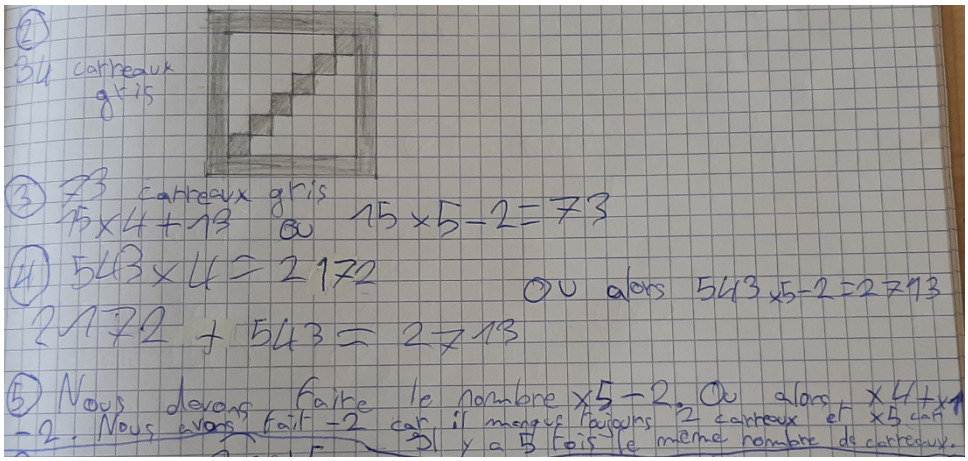




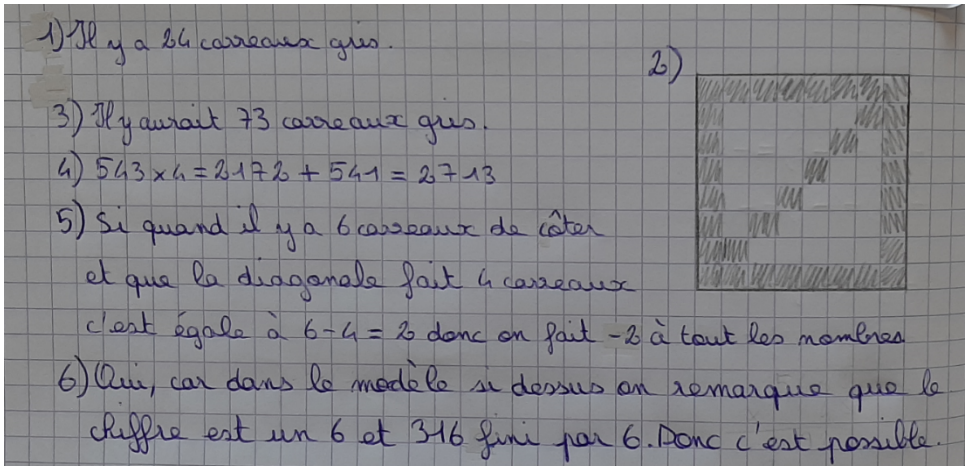


3ème expérimentation

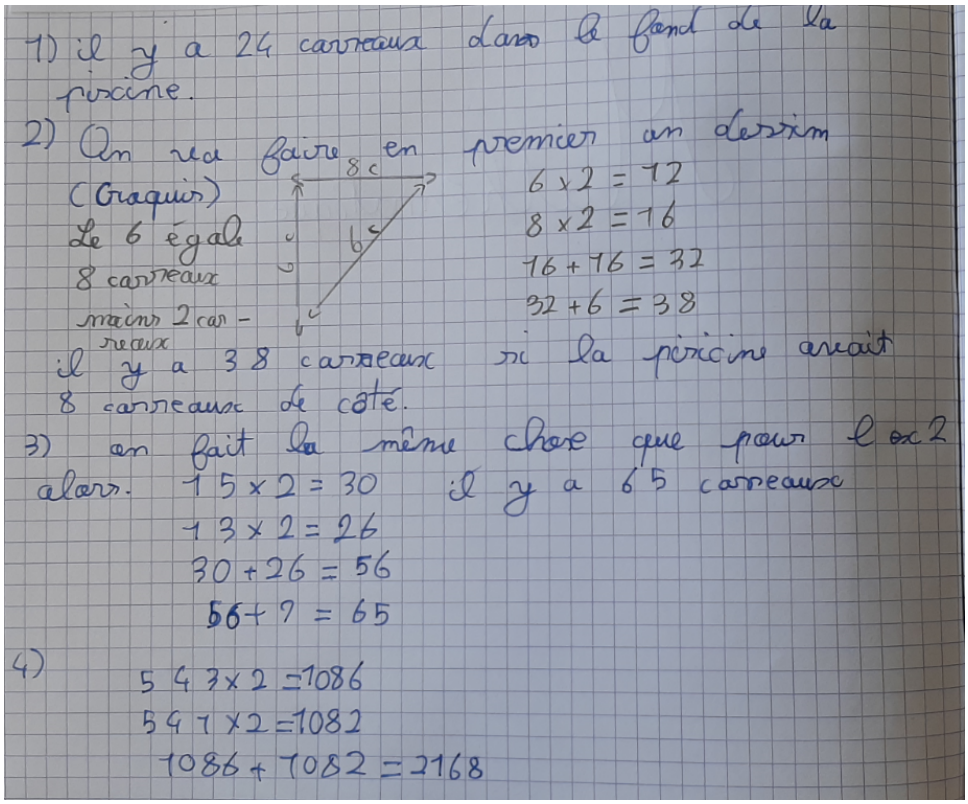
L'activité est toujours proposée dans sa formulation initiale, avec une classe de 5e et au tout début de la séquence sur le calcul littéral. Comme dans l'expérimentation 2, le titre a été enlevé.



Ici il est intéressant de remarquer que l'élève contrôle son travail en organisant différemment deux dénombrements, il vérifie qu'il a bien le même résultat. Il traduit son calcul par une suite d'opérateurs : × 5 – 2, ce qui pourrait s'apparenter à un programme de calcul. Il est cependant ennuyé pour formaliser le second processus car le nombre de carreaux du côté intervient deux fois dans le calcul. En écrivant × 4 + × 1−2 on peut pratiquement lire la formule correspondante puisque le signe de la multiplication peut implicitement être considéré comme l'écriture de « *x* multiplié par ».



Cette production montre que la nécessité de penser un processus n'apparaît qu'à la question 5, c'est-à-dire quand cela est explicitement demandé. Par ailleurs, la réponse à la question 6 peut étonner, l'argumentation porte sur un constat sur le chiffre des unités sans que cette preuve ne soit réellement construite ni induite par les questions précédentes. Il semble bien ici que le principe de généralisation ne soit pas acquis.



Dans cette production, on remarque une mise en forme des calculs identiques pour les différentes questions. Nous y voyons plus une pensée algorithmique qu'une pensée algébrique en ce sens que la résolution se fait par une succession d'opération qui ne sont pas regroupés dans une seule expression.

Activité Pictogrammes

Présentation de la situation et analyse a priori

L'objectif de cette dernière situation, est de retarder le plus possible l'utilisation de la lettre et de travailler avec des symboles (pictos) pour appréhender le travail sur le calcul littéral, et notamment les équations en 4e, sans le « stress » de la lettre que certains élèves expriment très souvent. Ces pictos pourraient ainsi devenir une image mentale de la lettre. L'enjeu est juste de « dédramatiser » l'entrée dans le calcul algébrique et de mesurer les effets sur les apprentissages.

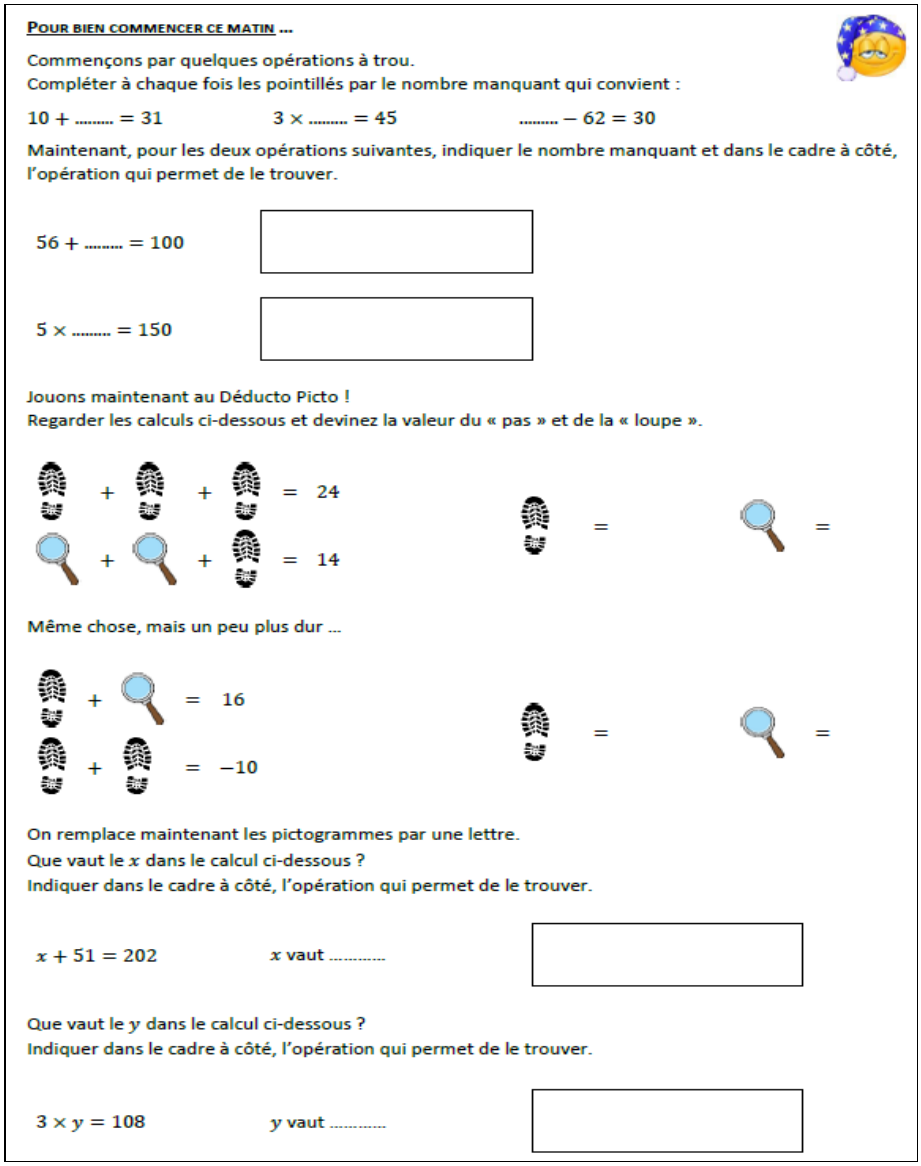
Cette activité basée sur un travail de Joan RIGUET. Un des avantages des pictos est que les élèves entrent facilement dans l'activité et proposent des réponses, essaient, vérifient, recommencent. L'introduction des pictos est parfois faite dès l'école primaire ou dans les familles par l'intermédiaire des cahiers d'activités type « jeux de logique » du commerce. L'introduction des pictos peut aussi avoir pour objectif de renforcer les connaissances sur le calcul avec les nombres relatifs. L'idée est de proposer une progression sur plusieurs semaines, passant des « opérations à trous », aux pictos puis à la lettre.

Analyse de production d'élèves

Une difficulté est observée, les élèves font l'activité mais nous n'avons pas accès à leurs procédures, nous n'avons que très peu de traces écrites des raisonnements des élèves. Le groupe se questionne au retour de cette expérience sur différentes pistes :

- Créer des situations où les pictos ont pour solution un nombre décimal ou fractionnaire.
- Créer une équation avec une « loupe » dans les deux membres qu'il faudrait enlever pour déclencher la résolution de la suite.

L'objectif des pictos est de développer la pensée algébrique (et non pas arithmétique) pour résoudre des problèmes de type système. Le groupe continue de réfléchir sur cette piste et des expérimentations sont prévues autour de l'idée d'un nombre mystère symbolisé par une boîte matérielle.



POUR BIEN COMMENCER CE MATIN ...

Commençons par quelques opérations à trou.
Compléter à chaque fois les pointillés par le nombre manquant qui convient :

$10 + \ldots\ldots = 31$ $\quad 3 \times \ldots\ldots = 45$ $\quad \ldots\ldots - 62 = 30$

Maintenant, pour les deux opérations suivantes, indiquer le nombre manquant et dans le cadre à côté, l'opération qui permet de le trouver.

$56 + \ldots\ldots = 100$

$5 \times \ldots\ldots = 150$

Jouons maintenant au Déducto Picto !
Regarder les calculs ci-dessous et devinez la valeur du « pas » et de la « loupe ».

Même chose, mais un peu plus dur ...

On remplace maintenant les pictogrammes par une lettre.
Que vaut le x dans le calcul ci-dessous ?
Indiquer dans le cadre à côté, l'opération qui permet de le trouver.

$x + 51 = 202$ $\quad x$ vaut .....

Que vaut le y dans le calcul ci-dessous ?
Indiquer dans le cadre à côté, l'opération qui permet de le trouver.

$3 \times y = 108$ $\quad y$ vaut .....

Les effets sur les pratiques des membres du groupe

Notre atelier s'est terminé sur un retour réflexif des membres du groupe IREM sur les effets du travail mené sur le développement professionnel et sur les pratiques de chacun et chacune.

Une acculturation
Nous sommes une quinzaine d'enseignants en collège qui avons répondu à l'appel du groupe collège de l'IREM des Pays de La Loire à la rentrée 2020. Le groupe est composé de profils variés : certains participent à un atelier IREM pour la première fois, d'autres sont formateurs et ont l'habitude de ces temps de travail. Certains sont jeunes dans le métier et d'autres plus anciens. Une maîtresse de conférences en didactique des mathématiques participe à l'animation du groupe.
Des points communs sont relevés dès les premières rencontres. Il s'agit de remettre en question ses pratiques, comprendre les erreurs des élèves, être à l'écoute de nouvelles mises en œuvre, être motivé pour tester, essayer, analyser des situations co-construites. La première année a été perturbée par les

conditions sanitaires pendant l'épidémie de COVID mais très vite le groupe s'est stabilisé et a organisé le travail.

Nous avions l'impression initiale que bâtir une progression serait quelque chose d'essentiel pour proposer une cohérence des apprentissages de l'algèbre avant le lycée, mais nous avons vite compris que le sujet n'était pas simple et notre travail sur la progression n'a pas abouti. La question du sens devait être traitée en parallèle de la question des techniques. Se focaliser sur le triptyque modéliser, démontrer, résoudre nous a permis de réfléchir à des activités que nous avons très vite expérimentées. De retour dans le groupe avec les productions des élèves, nous nous questionnons beaucoup, nous échangeons sur nos expériences, nous remettons en cause nos pratiques (comment gérer la recherche, quelles traces écrites, quelles mises en commun, quelles traces au tableau, quelle place à l'oral...). Très souvent, ce sont les difficultés des élèves qui nous motivent à trouver des leviers pour étayer, enseigner autrement, aborder de nouveaux points de vue. Mettre l'élève au centre de nos échanges de pratique, c'est ce qui nous intéresse le plus dans ce travail de groupe.

En fait nous avons construit un problème professionnel collectivement en mettant en commun certains éléments factuels, en partageant des connaissances didactiques, en partageant nos solutions et en les comparant. Si les pratiques pédagogiques, les contextes d'exercices sont différents, nous constatons que nos analyses ne portent jamais sur ces aspects si ce n'est pour analyser la portée de nos choix didactiques. Ressortent de nos travaux certaines nécessités qui guident nos choix.

Une vigilance dans sa pratique

Présenter aux autres comment nous avons mis en œuvre une activité nous oblige à préciser et expliciter des impensés de nos pratiques, des routines installées. Les questions nous obligent à préciser nos choix, ce à quoi on a pensé au moment où on a proposé telle aide, telle formalisation, telle écriture. Les propositions ou pratiques des autres nous ouvrent de nouveaux possibles. De fait nous reprenons régulièrement les mêmes situations que nous expérimentons dans nos différentes classes, à différents niveaux, et nous analysons les effets des modifications apportées à la situation. Parfois il suffit d'une modification minime dans la consigne ou le choix d'une valeur pour que l'activité des élèves soit totalement différente. La multiplicité des expérimentations sur les trois dernières années nous apporte quelques éléments qui permettent de voir la pertinence de la situation vis-à-vis des objectifs d'apprentissage que nous nous sommes fixés.

Plusieurs attestent de changements dans leur pratique, ne serait-ce qu'une attention particulière à la manière dont ils ou elles formulent oralement et écrivent les éléments qui vont permettre l'institutionnalisation. Il s'agit en fait d'une vigilance nouvelle qui s'exerce par exemple pour éviter de parler d'expression mais d'écriture, pour oraliser les écritures algébriques, pour différencier la nature des tâches.

Un autre aspect est souvent évoqué, c'est celui de la temporalité nécessaire à construire les différentes facettes de l'algèbre. S'il nous apparaît intéressant de concevoir une entrée précoce dans la pensée algébrique, le formalisme et le traitement des expressions algébriques nous semblent souvent trop rapide. Cela interroge nos progressions et notre conception des séquences.

Un sentiment de compétence

Depuis le début, nous nous sommes donnés comme contrainte d'écrire et de partager notre travail à l'extérieur de notre groupe. Nous avons eu l'occasion d'animer un atelier lors des journées académiques de l'IREM des Pays de la Loire et nous avons proposé d'animer cet atelier au colloque de la CORFEM. Formaliser les choses, penser une mise en activité, proposer des supports, mettre notre travail en discussion, avec des pairs mais aussi des chercheurs, cela participe à construire un sentiment d'appartenance à une communauté de didacticiens et didacticiennes des mathématiques et de fait renforce notre sentiment de compétences. C'est motivant et énergisant, nous espérons que cela se ressent

dans nos classes avec qui nous partageons parfois cette aventure en leur disant qu'on teste des choses pour faire de la recherche. C'est une sorte de mise en abyme de la recherche scientifique.

Références :

Alves, C., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Dametto, S. M., Lamorthe, C. P., Roubin, S., & Coppé, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, *92*, 1.

Bronner, A., & Squalli, H. (2020). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 1-10. https://doi.org/10.7202/1070022ar

Constantin, C., & Coulange, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : Une entrée dans la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 9-32. https://doi.org/10.7202/1055726ar

Grugeon, B., & Coppé, S. (2014). *Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4* [Contribution à propos du numérique et de l'algébrique au cycle 4]. CSP. https://www.education.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/document/GRUGEON_Brigitte_-_PU_-_COPPE_Sylvie_-_MCF_-_CSP_Contribution_374226.pdf

Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 106-130. https://doi.org/10.7202/1055730ar

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Hors série*, 137-162.

Jeannotte, D., & Squalli, H. (2022). Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : Quel potentiel et quelle trajectoire visée? *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 34-58.

Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse. (2020). Programme du cycle 4. *BO*, *31*.

Pilet, J., & Grugeon-Allys, B. (2022). L' activité numérico-algébrique dans des manuels scolaires français de primaire : Le cas du calcul réfléchi multiplicatif. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 4-33.

Radford, L. (2013). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Tremblay, S., Polotskaia, E., & Passaro, V. (2021). Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *2*, 78-109.

THEME 2

Transposition de savoirs, concepts et méthodes didactiques dans la formation

La formation, initiale et continue, vise plusieurs objectifs notamment celui de garantir l'apport et l'appropriation de savoirs issus de la recherche en didactique des mathématiques par les étudiants et enseignants. Après avoir mené une réflexion sur des outils d'analyse des pratiques enseignantes et leurs usages en formation initiale et continue lors des CORFEM 2021 et 2022, le thème 2 s'intéresse cette année au processus de transposition d'éléments issus de la recherche en didactique des mathématiques pour la formation, et à ses effets sur les pratiques. Quelle sélection des concepts à transposer est faite en formation ? Quel travail est proposé en formation sur les concepts liés aux mathématiques enseignées (les nombres décimaux, les limites par exemple) ou sur des concepts didactiques plus transversaux (adidacticité, analyse a priori, tâche-technique-technologie-théorie, activité constructive et activité productive, etc.) ? Comment les étudiants et les enseignants en formation s'emparent-ils des concepts ainsi transposés ? Comment développent-ils un regard didactique ?

Les recherches sur la formation (Chesnais, Choquet & Grau, Grugeon-Allys, Sayac) montrent la nécessaire construction de liens entre les situations professionnelles vécues, observées et les savoirs théoriques mais aussi la nécessité pour un enseignant de conduire une analyse de son activité, seul, en entretien et/ou en collectif de travail afin d'ajuster ses pratiques. Comment penser des modalités, une progressivité, les conditions de la transposition de cadres, méthodes et résultats de la recherche pour permettre cette analyse et outiller ainsi les pratiques ?

Références :

Chesnais, A. (2022). Penser l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques à partir de la recherche en didactique des mathématiques. Conférence CORFEM 2022. Nantes. *Actes à paraître*.

Choquet, C., & Grau, S. (2021). Analyse de la pratique des enseignants stagiaires en lien avec des dispositifs de formation : Croisements de deux cadres théoriques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, à paraître*.

Grugeon-Allys, B. (2010). Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice, In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.C. (Eds), *Les parcours de formation des enseignants débutants.* Presses Universitaires Blaise Pascal.

Sayac, N. (2013). La recherche dans la formation des enseignants : quel impact sur les étudiants en termes de développement professionnel et de rapport au(x) savoir(s) ? *Formation et profession*, 21(1), 1-12.

Conférence 1

La transposition didactique des savoirs d e la didactique vers la formation des enseignants : quelques réflexions.

Magali HERSANT - INSPE académie de Nantes, Nantes Université

Parler de transposition didactique des savoirs didactiques vers la formation des enseignants suppose de considérer la didactique des mathématiques comme une discipline scientifique qui renvoie à une certaine pratique et produit des savoirs. En nous situant dans cette perspective, nous proposons de réfléchir aux différents savoirs issus de recherches en didactique des mathématiques qui peuvent faire l'objet d'une telle transposition en formation(s) et aux conditions de cette / ces transpositions dans différents contextes institutionnels. Pour mener cette réflexion, nous nous appuierons sur des travaux didactiques relatifs à la formation des pratiques enseignantes en mathématique ou au développement professionnel des professeurs.

Conférence 2

Des savoirs didactiques aux savoirs professionnels : quelle transposition

Sylvie COPPE – FPSE, Equipe DiMaGe

La question de la transposition des savoirs de la didactique des mathématiques aux savoirs professionnels des enseignants de mathématiques (du primaire ou du secondaire) se pose en particulier depuis les années 1990, avec la création des IUFM qui ont regroupé les formations du primaire et du secondaire et dans lesquels de nombreux·ses chercheur·ses en didactique ont été impliqué·es. D'ailleurs, la création de la CORFEM, dans ces années 90, avait pour but de travailler de façon collaborative sur ces questions. Le champ de la didactique des mathématiques a développé des concepts théoriques et des méthodes particulières qui constituent toute une palette d'objets et d'outils pertinents pour le travail de formation mais qui supposent des adaptations pour qu'ils puissent s'intégrer aux contextes et besoins des pratiques enseignantes. Dans cette conférence, en parcourant un certain nombre de concepts et méthodes issus de la didactique des mathématiques, nous essaierons de déterminer ce qu'ils peuvent apporter en formation et selon quelles adaptations.

Atelier A21 – Un jeu de rôle en formation d'enseignants : quelles contraintes et conditions nécessaires à la transposition de l'institutionnalisation ?

Ismaïl Mili Haute Ecole Pédagogique du Valais, Suisse
Sylvia Coutat Université de Genève, Suisse
Marina De Simone Université de Genève, Suisse
Stéphane Favier Université de Genève, Suisse
Céline Vendeira Université de Genève, Suisse

Cet atelier se propose de présenter et vivre un dispositif de formation basé sur le jeu de rôle (JDR – au sens de Lajoie et al., 2019, Guille-Winder & Mili, 2023) élaboré dans le cadre de la formation des futurs enseignants des degrés secondaires genevois et valaisans (CH). Basée sur un référentiel de compétences propre à chaque institut, la formation des enseignants suisse romands a pour objectif d'outiller les étudiants à l'analyse réflexive de la pratique professionnelle en « mobilisant des outils conceptuels mis à disposition par la recherche » en didactique notamment. L'élaboration de dispositifs de formation par le JDR (simulation et analyse de situations d'enseignement/apprentissage) a ainsi soulevé plusieurs questionnements portant notamment sur la transposition de tels outils conceptuels : est-ce que toutes les situations de formation axées sur le JDR permettent la transposition de tels savoirs issus de la didactique ? Ou encore comment calibrer de telles situations de formations qui permettent la transposition de ces savoirs pour un usage professionnel ? De plus, au-delà du seul choix de la situation mathématique sur laquelle se base le JDR, comment sera-t-il possible pour le formateur d'exploiter une telle situation de formation ? Quelles seraient les composantes de la situation de formation qui semblent favoriser la transposition d'un concept didactique ou qui, à l'inverse, pourraient la bloquer ? Cet atelier propose ainsi une articulation entre des résultats d'expériences vécues dans le cadre de nos propres formations et une étude théorique que nous souhaitons partager avec les participants. Ainsi, après avoir vécu le dispositif tel que proposé en formation sur la base d'une tâche de 6ème, les participants seront amenés en tant que formateurs à exploiter le matériau produit pour aborder le concept d'institutionnalisation (au sens de Margolinas, 2014) en formation. Dans un troisième temps, les contraintes et les conditions nécessaires (en termes de tâches mathématiques, de choix du formateur, etc.) à la transposition de ce savoir didactique seront thématisées collectivement.

Références :

Guille-Winder, C. & Mili, I. (2023). Un jeu de rôles sur la structuration de l'espace en formation d'enseignants. Dans F. Wozniak (dir.), Actes du colloque COPIRELEM 2022. Toulouse.

Lajoie, C., Mangiante, C., Masselot, P., Tempier, F., Winder Guille-Biel, C. (2019), Former à aider un élève en mathématiques. Une étude des potentialités d'un scénario de formation basé sur un jeu de rôles. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 19, 168–188.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? Revue Française de Pédagogie, 188, 13-22.

ATELIER A22 Comment développer un regard didactique en formation initiale ?

CHOQUET Christine, GAUDEUL-MAEGHT Claire - INSPE Site de Nantes, Nantes Université

Depuis la rentrée scolaire en septembre 2022, les futurs professeurs de mathématiques en France sont formés au métier soit dans le cadre du Master MEEF3 Mention Second degré (quand ils n'ont pas encore obtenu ni le Master, ni le CAPES de Mathématiques), soit dans le cadre d'un DIU4 Second degré (quand ils ont obtenu le CAPES mais pas le Master MEEF). Lors de cet atelier, dans le cadre du thème 2, après avoir rappelé brièvement les enjeux communs et les différences de chacun de ces deux parcours de formation initiale, nous présenterons comment, un groupe de formatrice en INSPE propose de former ces différents étudiants à un regard didactique permettant d'éclairer les et/ou leurs pratiques enseignantes. Quelques étudiants viendront exposer des extraits de leurs travaux d'analyse, en proposant des liens avec des contenus proposés dans le cadre des formations intitulées Didactique, Analyse de pratiques et Recherche. Le travail de l'atelier s'appuiera également sur des données recueillies auprès de formatrices, d'étudiants en première année de Master MEEF Mathématiques (M1) et d'étudiants en DIU Mathématiques. Il s'agira, en appui sur ce corpus, d'étudier : -comment le recours à des notions didactiques, (cadres, registres empiriques/registres explicatifs, outil/objet, milieu, etc.) intervient dans l'analyse, menée par des étudiants, de productions d'élèves issues d'un stage en pratique accompagnée ; -comment des outils mobilisés et issus des recherches en didactique des mathématiques (l'analyse a priori, la hiérarchisation des productions, le processus d'institutionnalisation, etc.) permettent de mener une analyse de sa propre pratique de professeur débutant. Nous évoquerons également plusieurs limites de la mobilisation de ces divers éléments issus de la recherche en didactique (Chesnais, Sayac, Choquet et Grau, Choquet). En effet, ils sont parfois mal compris et ne permettent pas toujours de mener à une compréhension pertinente de ce qui se joue dans la classe en termes d'enseignement et d'apprentissages. Voire, ils peuvent être parfois perçus comme en rupture avec la pratique quotidienne en classe, comme trop « théoriques » et de ce fait peu mobilisables dans des analyses de la pratique ordinaire. Une discussion pourra s'engager sur les choix opérés lors de ces formations permettant, d'après nous, d'assurer un développement professionnel de ces futurs professeurs. Les échanges avec les participant.e.s amèneront à interroger les difficultés rencontrées par le groupe de formatrices pour transposer des éléments didactiques issus de la recherche et pourra conduire à envisager d'autres pistes de contenus ainsi que d'organisations de la formation initiale.

Références :

Chesnais, A. (2022). Penser l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques à partir de la recherche en didactique des mathématiques. Conférence CORFEM 2022. Nantes.

Choquet, C., & Grau, S. (2021). Analyse de la pratique des enseignants stagiaires en lien avec des dispositifs de formation : Croisements de deux cadres théoriques. Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques.

Choquet, C. (2022). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. Annales de didactique et de sciences cognitives. Numéro thématique 1. IREM de Strasbourg. https://doi.org/10.4000/adsc.1880 .

Sayac, N. (2013). La recherche dans la formation des enseignants : quel impact sur les étudiants en termes de développement professionnel et de rapport au(x) savoir(s) ? Formation et profession, 21 (1), 1-12.

ATELIER B21 Le *labomath,* lieu de formation et de développement professionnel : étude de cas au collège de Trélazé

Nadia Zebiche, INSPE de Nantes, CREN ; Hélène Humeau, CLG Jean Rostand (Trélazé) ; Damien Robert, CLG Jean Rostand (Trélazé) ; Hugues Vivier, CLG Jean Rostand (Trélazé) ; Laurent Simonneau, CLG Jean Rostand (Trélazé) ; Sylvie Grau, INSPE de Nantes, CREN

La mise en place de laboratoires de mathématiques – appelés labomaths – mesure phare du rapport Villani-Torossian (2018, p.48), offre l'opportunité d'un dispositif de formation horizontale (Chesnais, 2022 ; Ministère de l'éducation nationale, 2023) pour les enseignants de mathématiques et donc d'une nouvelle modalité de développement de compétences professionnelles. Crée depuis 2019, le labomath de Trélazé réunit cinq enseignant.e.s de mathématiques et une référente universitaire. L'envie d'expérimenter de nouvelles situations en classe a orienté le groupe vers le dispositif ResCo développé à l'IREM de Montpellier (2014). D'autre part, sur l'année scolaire 2022-2023, ce labomath a servi de terrain de recherche dans le cadre d'un travail plus général sur les formations d'enseignants entre pairs (Grau, 2021). Une chercheure a donc assisté à différents temps d'expérimentation et de réunions du laboratoire. En lien avec le thème 2, nous proposons dans cet atelier de rendre compte de la prise en charge par le labomath d'une situation "les Vitres" issu du Dispositif ResCo. Plus précisément nous cherchons à comprendre comment les enseignants s'emparent de la question de l'enseignement de la modélisation et comment leur réflexion évolue tout au long du dispositif. Dans l'atelier nous mettrons à l'étude un corpus constitué de productions d'élèves, de documents de travail des enseignant.e.s et des transcriptions d'échanges issues des réunions du labomath, corpus que nous analyserons dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation (Doussot et al , 2022).

Références :

Chesnais, A., (2022). Penser l'accompagnement du développement professionnel des enseignants de mathématiques à partir de la recherche en didactique des mathématiques. Conférence aux XXVIIIe journées CORFEM, Nantes, France.

Doussot, S., Hersant, M., Orange-Ravachol, D., Lhoste, Y. (2022). Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique. De Boeck.

Grau, S. (2021). Formation continue des enseignants en mathématiques : projet de recherche sur différents modes de compagnonnage au 1er et 2nd degré en France. Actes du 52e colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques, Outaouais, Québec.

Groupe ResCo (2014). La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. Repères-IREM, N°96. p. 73-96.

Ministère de l'éducation nationale, (2023). Laboratoires de mathématiques. https://eduscol.education.fr/1469/laboratoires-de-mathematiques

Villani, C., Torossian, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-desmathematiques-3242

ATELIER B22 – La notion d'adidacticité en formation initiale

Nathalie Boffy, INSPE Site de Nantes, Nantes Université

Cet atelier vise à partager un dispositif de formation dont l'objectif est de montrer l'intérêt d'étudier les potentialités adidactiques (Perrin-Glorian et Hersant, 2003) des situations d'apprentissage pour l'anticipation des activités des élèves et de l'enseignant. Ce dispositif de formation concerne un groupe d'étudiants en deuxième année de master MEEF mathématiques (INSPÉ site de Nantes), dans le cadre du module intitulé « Didactique des mathématiques pour la classe ». Dans une première partie, nous présenterons les choix retenus par la formatrice pour ce dispositif de formation et les hypothèses qui le sous-tendent. Nous porterons ces choix à la discussion, notamment ceux concernant les éléments théoriques en lien avec la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) qui ont été retenus pour être présentés aux étudiants ainsi que les situations de formation qui les introduisent et les mobilisent. Dans un second temps, l'analyse particulière d'une situation de formation amènera à questionner de quelle façon les étudiants parviennent à s'emparer de ces repères théoriques lors de l'élaboration d'une situation d'enseignement et d'apprentissage. Cette situation de formation consiste en la préparation d'une séance de géométrie en classe de sixième autour de programmes de construction, avec un certain nombre de contraintes et de ressources. Elle intervient à la fin de ce module de formation consacré à l'intérêt d'étudier les potentialités adidactiques de situations d'apprentissage. Il nous a donc semblé intéressant d'observer comment s'exerce le regard didactique (Hersant, 2021) des étudiants à l'issue de ce travail adossé à ces repères théoriques. L'analyse du verbatim des interactions entre quatre étudiants lors de cet épisode de formation nous permettra de questionner les intérêts et les limites du dispositif de formation proposé.

Références :

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M. J., Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 23(2), 217-276.

Hersant, M. (2021). Former au regard didactique : dynamique des problèmes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques chez une stagiaire. Dispositifs et collectifs pour la formation, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. *Actes de la COPIRELEM 2021,* Grenoble, France. 575- 583.

ATELIER C21 Des référents épistémologiques et didactiques pour « dénaturaliser » les pratiques enseignantes dominantes sur le terrain en Belgique francophone

Kevin Balhan (kevin.balhan@uliege.be, ULiège, Ladimath), Christophe Dubussy (UNamur, Ladimath), Pierre Job (ICHEC, LadICHEC et Ladimath)

Les futurs-enseignants en formation initiale ont un sentiment de naturalité vis-à-vis des pratiques enseignantes qui les ont formés. Ils s'y sont assujettis (Chevallard, 1992). Or, en Belgique francophone, les pratiques enseignantes dominantes souffrent de certains dysfonctionnements : monumentalisme (Chevallard, 2000), praxéologies « à trous » (Rouy, 2007), pratiques ostensives (Berthelot et Salin, 1992), pouvant en partie résulter de la prégnance du rapport empiriste au monde sensible (Job et Schneider, 2014) consistant à appréhender les concepts mathématiques par ce que nos sens nous en livrent. Ce constat actuel nous conduit à intégrer dans notre dispositif de formation des futurs enseignants les concepts de praxéologie et de transposition didactique (Chevallard, 1992) permettant respectivement de questionner les savoirs mathématiques enseignés et de se déprendre de leur « naturalité », ainsi que celui de variable didactique (Brousseau, 1998) qui met l'accent sur l'impact des choix des enseignants sur l'apprentissage des élèves. Ces référents didactiques sont complétés par la distinction que fait Schneider (2008) entre praxéologies « modélisation » et « déduction », ouvrant ainsi le champ de conscience des étudiants à d'autres transpositions didactiques possibles. Principalement à partir de propositions de leçons de nos étudiants sur l'introduction des nombres complexes dans des classes de terminale, nous montrerons de quelle manière nous les aidons à prendre du « recul » par rapport aux pratiques enseignantes auxquelles ils se verront confrontés lors de leur entrée dans la profession.

Références

Berthelot, R., & Salin M.-H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. *Thèse de doctorat*, Université de Bordeaux I.
Brousseau, G. (1998). *Théories de situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12(1), 73–112.
Job, P. & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemologial obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 635-646.
Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique. *Thèse de doctorat*, université de Liège.
Schneider, M. (2008). *Traité de Didactique des Mathématiques.* Liège : Presses universitaires de Liège.

ATELIER C22 La Lesson Study adaptée comme espace de lien entre pratique et recherche : retour sur expérimentations

Blandine Masselin, RMA, membre affiliée au LDAR de l'Université de Paris, IREM de Rouen, Référente Mathématiques, Académie de Normandie ;
Frédéric Le Menez, IREM de Rouen, Référent Mathématiques des Circonscriptions de Bernay, Le Neubourg, Pont Audemer, DSDEN 27

Développée dès 2016 en Normandie, la Lesson Study adaptée (Masselin, 2020) notée LSa est un dispositif de formation qui permet l'observation d'une séance conçue par un collectif d'enseignants et menée par l'un d'entre eux. La LSa, variante des LS japonaises est un dispositif français de formation où la recherche est présente. Nous partageons des éléments de transposition des espaces des contraintes (Choquet, 2019) et du cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) vécues en LSa sur des extraits vidéo et productions d'élèves.

Présentation des Lesson Study adaptées

Rappel historique

La Lesson Study adaptée (Masselin, 2020) est un dispositif de formation qui permet l'observation d'une séance conçue par un collectif d'enseignants et menée par l'un d'entre eux. La LSa est une variante des LS japonaises (Lewis & Hurd, 2011) en contexte français de formation où la recherche est présente. Des adaptations sont l'apport par les facilitateurs (Masselin & al., 2022) d'une situation et l'analyse de pratique à partir d'extraits vidéo de classes.

Depuis 2016, une trentaine de LS itérées avec plus de 300 enseignants (Artigue & Masselin, accepté). Au départ, le groupe Activité-LS de l'IREM de Rouen avait pour problématique l'enseignement de la modélisation. Il a co-produit avec la DGESCO le document ressources « Mathématiques et quotidien » (MENSCO, 2016). Se questionnant sur « *Comment former autour des situations de modélisation du document ressources ?* », et repérant des limites à une stratégie d'homologie décrite par Houdement & Kuzniak (1996) pour former (Derouet & Masselin, 2019), le groupe a initié des premières Lesson Studies adaptées au contexte français de formation continue.

Le principe des LSa est le suivant : un germe de situation (Masselin & Artigue) est soumis à un collectif d'enseignant selon une problématique émergeante. Le collectif résout et partage une solution de cette situation, en fait une analyse *a priori* avant de préparer une séance de classe pour un niveau choisi. Une fois la séance planifiée, elle est réalisée dans une classe avec un volontaire comme enseignant-expérimentateur et les autres l'observent en direct. Le collectif réalise une analyse *a posteriori* de la séance et des répercutions de choix initiaux et imagine des alternatives possibles.

La lesson study adaptée se développe selon une certaine temporalité et comprend trois boucles (Fig 1) :

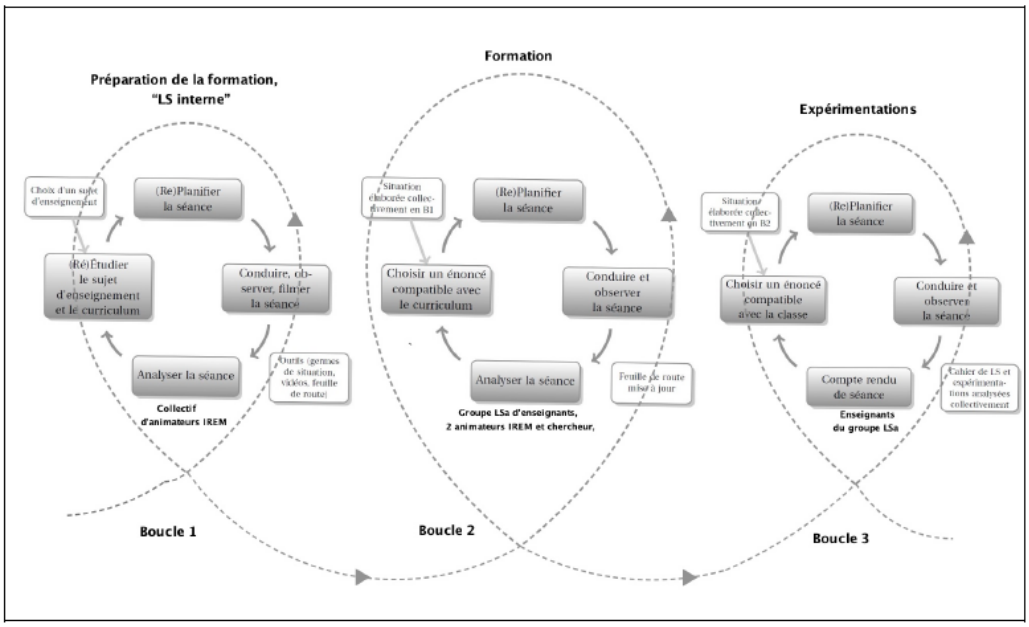


Figure 6 : Les trois boucles de la LSa

Généralement, une douzaine maximum d'enseignants sont regroupés en formation continue. En formation initiale, à l'INSPE, selon l'articulation de l'UE, cela peut s'articuler ainsi : une vingtaine d'étudiants de Master 1 ou de Master 2 analysent une ressource initiale et planifient collectivement la leçon de recherche. Ensuite, pour la séance en classe, le collectif est séparé en deux : deux leçons de recherche et analyses *a posteriori* sont réalisées en parallèle avant une mise en commun et des apports complémentaires apportés sur un temps commun à la dernière séance.

L'observation n'est pas orientée selon un axe. Elle dépend de l'inscription de la Lesson Study. Si on a une problématique comme la constellation à Routot (autour de l'engagement de tous les élèves dans le travail mathématique), on va rechercher durant l'observation des points saillants en lien avec la problématique choisie.

A priori les fiches d'observateurs vont permettre le recueil factuel des interactions entre élèves ou entre élèves et enseignants. La grille d'intervention de l'enseignant permet de se questionner sur ces interactions potentielles et anticipées avant la mise en œuvre de la situation dans une classe. Nous renvoyons le lecteur aux cahiers de Lesson Study publiés sur le site de l'IREM de Rouen.

Des extraits vidéo de classe sont proposés au collectif d'enseignants le premier jour avant la préparation collective de la séance. Ils visent à orienter le regard des enseignants vers le travail mathématique qui pourra être développé en classe. Ces extraits permettent de ne pas uniquement se focaliser sur des questions de gestes professionnels. Ils sont choisis en fonction de ce qui ressort de l'analyse *a priori* de la situation proposée, selon par exemple des manques repérés.

La situation initiale, le contexte et les choix du collectif d'enseignants

La situation initiale « aire de baignade »

Les participants de l'atelier ont découvert un germe de situation (Masselin & Artigue, accepté), l'« aire de baignade » qui a été proposé en LSa de liaison Cycle 3.

Aire de baignade

Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25m.

La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m^2.

Pourront-ils respecter la loi ?

Figure 7 : Enoncé Aire de baignade

Le partage de la résolution de cette situation dans l'atelier a révélé majoritairement un choix de zones de baignade rectangulaires par les participants.
En réalité, plusieurs modélisations sont envisageables (rectangulaire, demi-cercle, …) et donnent des réponses différentes au problème (voir le cahier de LS « aire de baignade » (Masselin & Hartmann, 2023)). D'autres énoncés, comme celui proposé par S. Coppé, indiquent dès le début le type de zone à considérer.

Le contexte

La LSa dont nous partageons une première transposition a lieu en liaison écoles-collège (cycle 3) dans l'Eure au Neubourg. Elle regroupe 3 enseignants de chacune des écoles Jean Moulin et Dupont de l'Eure du Neubourg et 3 enseignants du collège Pierre Corneille du Neubourg. Cette LSa s'est déroulée en présence de deux facilitateurs (nom donné aux formateurs en LSa) et d'une chercheure invitée C. Choquet (Université de Nantes, CREN). Cette LSa a eu lieu sur trois jours avec une continuité proposée à distance avec en appui un espace collaboratif Tribu pour échanger durant le processus :

- ***Jour 1*** *noté J1* ***(29/11/22)*** : découverte du germe de situation (énoncé ressource), analyse *a priori*, planification de la séance
- ***Jour 2*** *noté J2* ***(10/01/23)*** : conduite de la séance et analyse *a posteriori*

- ***Jour 3*** *noté J3**(17/03/23)*** : retours sur les expérimentations en classe, apports de la recherche et compléments didactiques. Toutes les phases sont collectives et sont synthétisées par la diapositive suivante : Nous avons partagé dans l'atelier une grille dite d'amorce d'analyse *a priori* réalisée avant la préparation de la feuille de route. Elle comporte six item (connaissances mathématiques en jeu, place dans la(les) progression(s), dimension vie quotidienne, dimension TICE et/ou matérielle, procédures en jeu, difficultés et erreurs possibles). Cette grille porte sur le germe de situation. C'est à l'occasion de la mise en commun des éléments de cette grille partagés dans le collectif que des extraits vidéo sont proposés au collectif par les facilitateurs.

Les choix d'énoncé et de scénario du collectif d'enseignants
La présentation du résumé du scénario du collectif d'enseignants permet ensuite de comprendre les productions à analyser.
Phase 1 (5 min) : Distribution de l'énoncé, lecture silencieuse individuelle puis collective par l'enseignant. Les élèves peuvent poser des questions sur le vocabulaire.
Phase 2 (5 min) : Phase individuelle de recherche sur feuille blanche ou quadrillée
Phase 3 (40 min) : mise en commun au sein du groupe classe puis phase de recherche collective (par quatre).
Phase 4 (les 5 dernières min) : Sur une feuille A3, écrire un bilan de leur recherche
Phase 5 : Bilan collectif

Les analyses des productions des élèves
Des analyses des productions des élèves ont été réalisées dans le cadre théorique mobilisé par la chercheuse intervenant dans le dispositif de formation.
Ce cadre, le cadre de l'apprentissage par problématisation (Orange, 2007) permet de modéliser l'activité des élèves dans le cadre de la résolution du problème proposé. Cette modélisation de l'activité des élèves est présentée sous la forme d'un *espace de contraintes* (Choquet, :

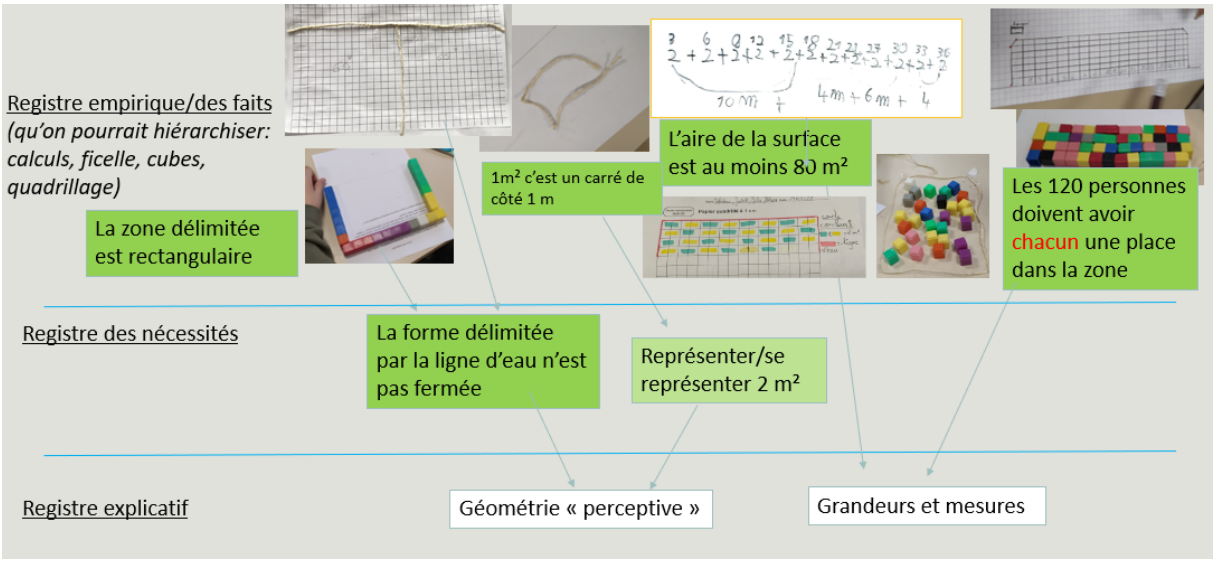


Figure 8 : modélisation de l'activité de la classe pour l'Aire de baignade

Conclusion
Cet atelier nous a permis de présenter un dispositif de formation continue, basé sur la collaboration entre enseignants, facilitateur et chercheur. Les analyses menées des productions des élèves ont permis de montrer comment la résolution du problème avance dans la classe. Puis la richesse des échanges sur les résultats de ces analyses, menés lors de J3 entre les enseignant.es investis dans la formation, montrent tout l'intérêt de la LSa pour interroger voire modifier ses pratiques.

Références :

Blum,W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G., P. B. W. Haines & S. Khan (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.
Choquet, C. (2019). Formation à l'analyse de l'activité des élèves en mathématiques au cycle 3 : une complémentarité de deux cadres théoriques. *Ressources n°21-INSPE Académie de Nantes*.
Lewis, C. & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction,* Porthmouth, Heinemann.
Masselin, B., Hartmann, F. & Artigue, M. (2022). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de Lesson Study adapté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, numéro thématique « Les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques. Une approche par la recherche en didactique », 1, 213-260.
Masselin, B. (2020) *Ingénieries de formation en Mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Rouen : Presses Universitaires de Rouen et du Havre. http://purh.univrouen.fr/node/1309

Orange, C. (2007). Apprentissages scientifiques : ce qui se construit et ce qui se transmet », Recherches en éducation, 4. http://journals.openedition.org/ree/3938

ATELIER C23 Un atelier sur l'enseignement de la combinatoire dans la formation des enseignants des mathématiques, en contexte hongrois et français

Katalin Gosztonyi, IMAG, Université de Montpellier, France

Le domaine de la combinatoire joue un rôle important dans les programmes hongrois de l'enseignement publique depuis des décennies. Dans le cadre de nos recherches, nous avons étudié la construction de ce chapitre dans les programmes et son rôle dans l'enseignement des mathématiques, tout particulièrement par rapport à une approche d'enseignement par problèmes. Nous avons notamment proposé d'interpréter la construction des chapitres combinatoire des programmes en termes de « séries de problèmes ».
En même temps, nos expériences montrent que l'enseignement de ce chapitre par une telle approche reste difficilement accessible pour la majorité de nos étudiants hongrois, suivant la formation des enseignants de mathématiques du second degré. Depuis 2016, nous avons progressivement transformé notre cours sur l'enseignement des mathématiques discrètes, dans le cadre d'une collaboration entre mathématiciens et didacticiens, pour traiter plus explicitement l'approche par séries de problèmes.
Dans le cadre de l'atelier, nous avons d'abord analyser des extraits de programmes et manuels scolaires hongrois en termes de « séries de problèmes ». Ensuite, nous discuterons les défis du traitement du sujet en formation, et les choix que nous avons faits.
La difficulté principale que nous allons traiter est l'engagement des étudiants dans une activité de résolution de problèmes, similaire à ce qu'ils sont censés faire avec leurs élèves du second degré, mais sur des problèmes différents : car les tâches du second degré ne sont plus que des exercices pour nos étudiants et ne leur constituent donc pas un défi suffisant pour les engager dans une réflexion sur les enjeux didactiques du chapitre.

Références :

Dumont, M. et Varga, T. (1973). Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Guide et commentaires. Paris : O:C:D:L.
Gosztonyi, K. (2015). *Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des «mathématiques modernes» : Le cas de la Hongrie et de la France.* [PhD]. University of Szeged; Université Paris-Diderot-Paris 7. https://hal.science/tel-01766902
Gosztonyi, K. (2017) Understanding didactical conceptions through their history: a comparison of Brousseau's and Varga's experimentations. *CERME 10 proceedings*, https://keynote.conferenceservices.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0594.pdf
Varga, T. (1982). New topics for the elementary school math curriculum. In. Th. C. O'Brien (Ed.),

Toward the 21st Century in Mathematics Education (pp. 12-34). Teachers' Center Project, Southern Illionis University at Edvardsville.