Chapitre 1. Le partage d'un segment en extrême et moyenne raison : d'un problème euclidien à une solution cartésienne.

Rédaction, expérimentation : Dominique Baroux, Martine Bühler, Éléonore Petit
(Groupe M.:A.T.H. de l'IREM de Paris)

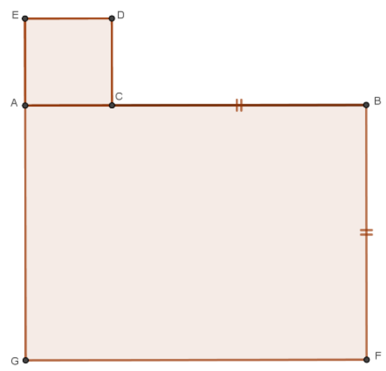
Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 1 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant·e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

2nde — Un problème de l'Antiquité- Résolution algébrique

On considère la figure ci-contre construite de la manière suivante :

- Le segment [AB] est donné.
- Le point C appartient au segment $[AB]$.
- Le quadrilatère ACDE est un carré.
- Le quadrilatère ABFG est un rectangle et $BC = BF$



L'objectif du problème est de répondre à la question suivante :

Peut-on placer un point C sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du carré ACDE soit égale à l'aire du rectangle ABFG ? Où ?

La méthode de Descartes

Extrait de *La géométrie* de Descartes. Essai appendice du *Discours de la méthode* (1637). Ce qui est en italique a été modifié pour une meilleure compréhension.

« Ainsi en voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien celles qui sont connues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, *en cherchant comment ces lignes dépendent mutuellement les unes des autres*, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation….».

Appliquons la méthode de Descartes pour résoudre le problème précédent.

Méthode de Descartes	**Application à la résolution du problème**
« On doit d'abord le considérer comme déjà fait ».	Soit C le point solution du problème c'est-à-dire tel que l'aire du carré ACDE est égale à l'aire du rectangle ABFG
« Donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire ».	
Chercher « comment ces lignes dépendent mutuellement les unes des autres » afin de poser *« ce qui se nomme une équation ».*	

La méthode de Rabuel pour résoudre l'équation précédente

Dans livre de Rabuel, *Commentaires sur la géométrie de Descartes* (1730), on trouve un procédé pour résoudre l'équation $x^2 = a(a-x)$

Supposons la division faite au point C, et nommons AB, a et AC, x. BC sera $a-x$.

Nous aurons par la nature du problème, $AB \times BC = AC^2$, $aa - ax = xx$, $xx + ax = aa$.

Mettons $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, c'est $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}\ aa$;

Extrayons la racine quarrée de chaque côté, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$

Compléter le tableau ci-dessous :

Méthode de Rabuel	Traduction en langage actuel
1) Nommons AB, a et AC, x. BC sera a–x.	$AB = a\ \ AC = x$ a *et* x *désignant des nombres …………….….* *On en déduit:* $BC = a - x$
2) Nous aurons par la nature du problème, $AB \times BC = AC^2$,	
3) $aa - ax = xx$	
4) $xx + ax = aa$	
5) Mettons $\frac{1}{4}aa$ *de chaque côté, c'est* $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}\ aa$;	*En ajoutant…………à chacun des membres de l'égalité, on obtient une équation ayant…………………………………………………………………………* *………que la précédente :* $x^2 + ax = a^2$ $\Leftrightarrow x^2 + ax + \cdots$…..$= a^2 + \cdots$ …
6) Extrayons la racine quarrée de chaque côté, $x^2 + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$	

Applications :

1) En utilisant la méthode de Rabuel, répondre à l'objectif du problème lorsque :

a) AB=10 m

b) AB=$2\sqrt{5}$ m

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 2x = 3$

b) $4x^2 - 8x = -1$

c) $x^2 - 4x = -9$