Chapitre 1. Le partage d’un segment en extrême et moyenne raison : d’un problème euclidien à une solution cartésienne.

Rédaction, expérimentation : Dominique Baroux, Martine Bühler, Éléonore Petit
(Groupe M.:A.T.H. de l’IREM de Paris)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 1 de l’ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n’a ni valeur de modèle, ni de recette. L’enseignant·e pourra pleinement se l’approprier et l’adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l’ouvrage susdit.

Les propositions 6 et 11 du livre II des *Éléments* d'Euclide

Quelques remarques préalables :

- Euclide appelle « droite » ce que nous appelons « segment ».
- Un rectangle est « contenu par deux droites » s'il s'agit d'un rectangle dont les côtés sont égaux à ces deux droites (c'est-à-dire segments).

Nous donnons le texte d'Euclide dans des encadrés, pour les lecteurs curieux de lire le texte original.

La proposition 6

Cette proposition est un préalable à la résolution par Euclide du problème de partage d'un segment qu'il résout à la proposition 11.

« Proposition 6

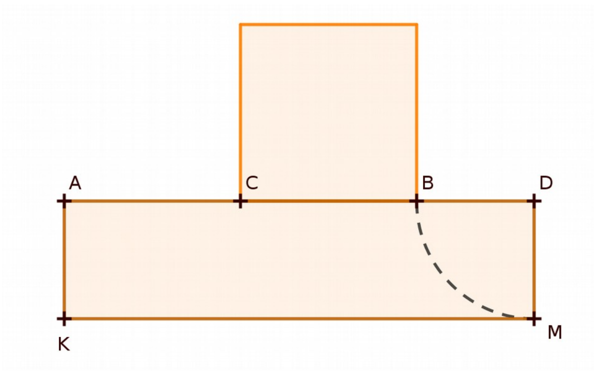
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée.

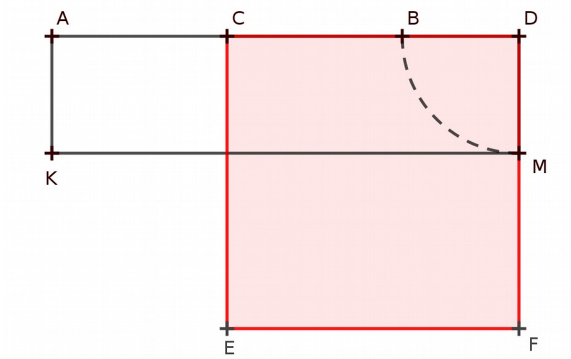
En effet, qu'une certaine droite AB soit coupée en deux parties égales au point C, et qu'une certaine droite BD, lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par AD, BD, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD. »

Une traduction en termes modernes :

C est le milieu de [AB].

La somme des aires du rectangle ADMK et du carré de côté [CB] est égale à l'aire du carré CDFE.





Une démonstration moderne avec les formules de calculs d'aires, tenant compte de $AC=CB$:

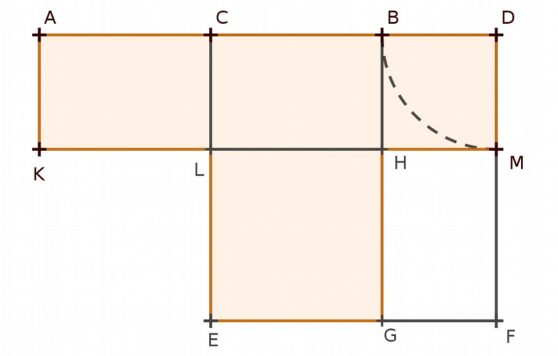
$$AD\times BD+CB^2=(CD+AC)(CD-CB)+CB^2=CD^2-CB^2+CB^2=CD^2$$

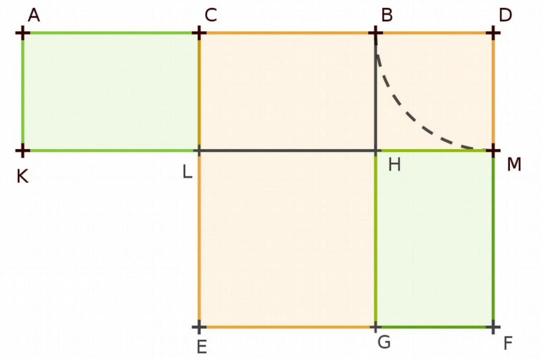
Une démonstration « visuelle » inspirée par celle d’Euclide :

La somme des aires du rectangle ADMK et du carré LHGE de côté [LH] (avec LH = CB) est égale à l’aire du polygone ADMHGELK.

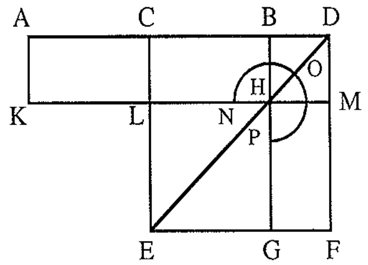
Mais l’aire du rectangle ACLK est égale à celle du rectangle CBHL, elle-même égale à celle du rectangle HMFG.

Donc l’aire du polygone ADMHGELK est égale à celle du carré CDFE.





La démonstration d’Euclide

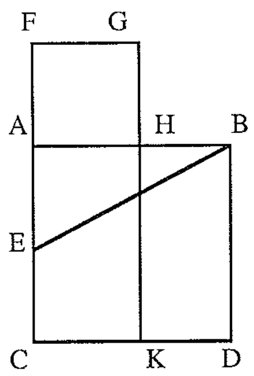


En effet, qu'une certaine droite AB soit coupée en deux parties égales au point C, et qu'une certaine droite BD, lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par AD, BD, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.
En effet, que le carré CEFD soit décrit sur CD. Et que DE soit jointe; et, d'une part que par le point B soit menée BG parallèle à l'une ou l'autre des droites EC, DF; et d'autre part que par le point H, soit menée KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, EF; et que par le point A, soit encore menée AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, DM.
Or, puisque AC est égale à CB, AL est aussi égal à CH (I. 36). Mais le complément CH est égal au complément HF (I. 43), et donc AL est égal à HF. Que CM soit ajouté de part et d'autre. AM tout entier est donc égal au gnomon NOP. Mais AM est le rectangle contenu par AD, DB car DM est égal à DB, et donc le gnomon NOP est égal au rectangle contenu par AD, DB. Que LG - qui est égal au carré sur BC - soit ajouté de part et d'autre. Le rectangle contenu par AD, DB, avec le carré sur CB, est donc égal au gnomon NOP avec LG. Mais le gnomon NOP et LG sont le carré CEFD tout entier - qui est celui décrit sur CD.
Donc le rectangle contenu par AD, DB, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.
Donc si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée. Ce qu'il fallait démontrer.

La proposition 11 : un problème géométrique de partage d'un segment

« *Proposition 11*

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant. »

Une traduction en termes modernes :

Le segment [AB] est donné. Il faut construire le point H sur le segment [AB] tel que l'aire du carré AHGF (construit sur le segment [AH]) soit égale à l'aire du rectangle HBKD (BD étant égal à AB).

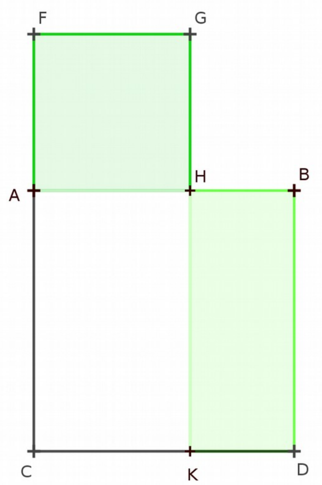
Une heuristique possible :

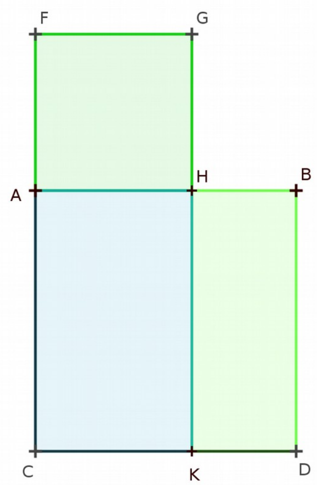
AB est un segment donné. ABDC est un carré.

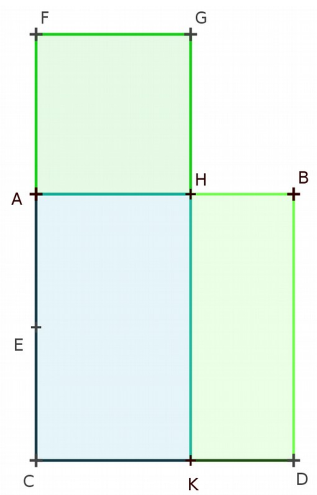
Il faut construire H sur [AB] tel que l'aire du carré AHGF soit égale à l'aire du rectangle HBKD.

Par ajout du rectangle AHCK, cela revient à construire le point H sur [AB] tel que l'aire du rectangle CKGF soit égale à l'aire du carré ABDC.

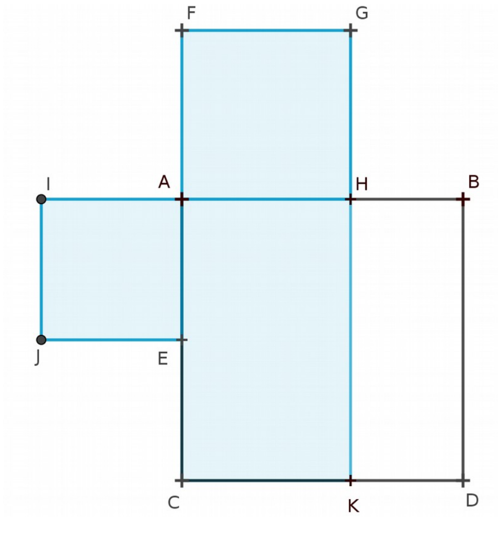
On reconnaît alors un « rectangle contenu par la droite entière CA avec la droite ajoutée AF et la droite ajoutée ». On va appliquer la proposition 6 ; on construit donc le milieu E du segment [AC].

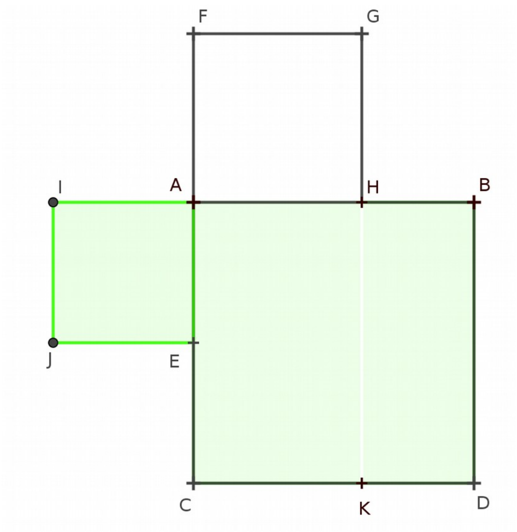




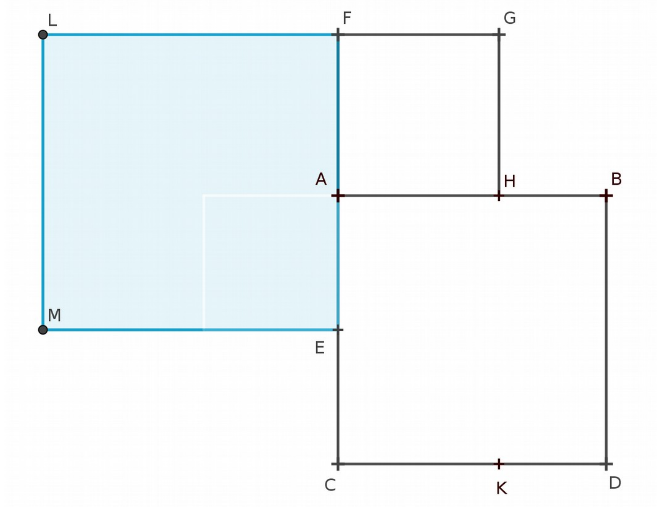


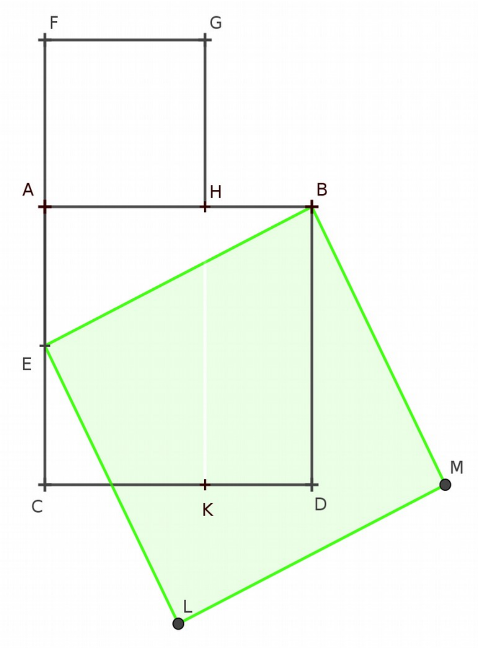
Le problème revient donc à construire le point H sur [AB] tel que la somme de l'aire du rectangle CKGF et du carré AEJI de côté [AE] soit égale à la somme de l'aire du carré ABDC de côté [AB] et du carré AEJI de côté [AE].



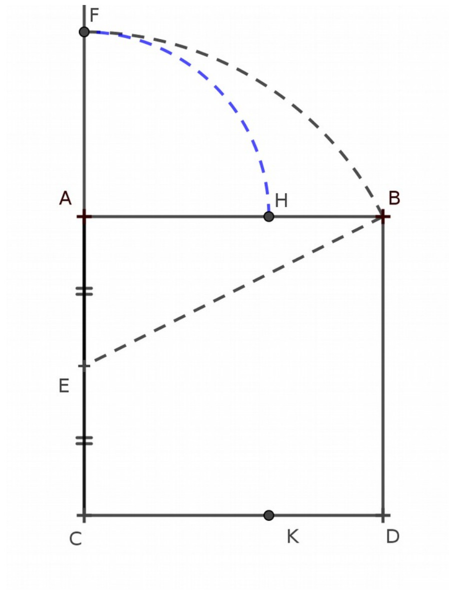


Or, d'après la proposition 6 que nous venons d'étudier, la somme de l'aire du rectangle CKGF et du carré de côté [AE] est égale à l'aire du carré de côté [FE] et, d'après le théorème de Pythagore (proposition 47 du livre I d'Euclide), la somme des aires des carrés de côté [AB] et [AE] est égale à l'aire du carré de côté [BE].





Il faut donc que les carrés de côté [FE] et [BE] ait la même aire, c'est-à-dire que FE = BE. Cette condition permet de construire, après avoir placé le milieu E de [AC], le point F sur la demi-droite EA) tel que EF = BE, puis le point H sur [AB] tel que AH = AF.

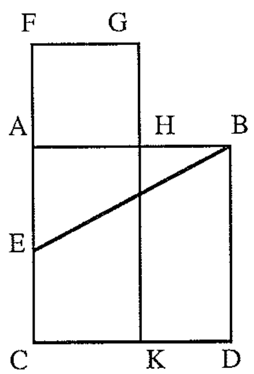


Euclide ne donne aucune heuristique. Il donne la construction, puis démontre qu’elle est correcte. La démonstration se fait en « remontant » notre heuristique.

La construction donnée par Euclide

« En effet, que le carré ABCD soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH. »

La démonstration d’Euclide



« En effet, puisque la droite AC a été coupée en deux parties égales au point E et, puisque FA lui a été ajoutée, le rectangle contenu par CF, FA, pris avec le carré sur AE, est donc égal au carré sur EF (II.6). Or EF est égale à EB. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal au carré sur EB. Mais à celui sur EB sont égaux ceux sur BA, AE (I. 47), car l'angle en A est droit. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal à ceux sur BA, AE (N.C. 1). Que le carré sur AE soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par CF, FA, est égal au carré sur AB (N.C. 3). Et, d'une part le rectangle contenu par CF, FA est FK - car AF est égale à FG - , d'autre part le carré décrit sur AB est AD. Donc FK est égal à AD. Que AK soit retranché de part et d'autre; le reste FH est donc égal à HD (N.C. 3). Et, d'une part HD est le rectangle contenu par AB, BH - car AB est égale à BD - , d'autre part FH est le carré décrit sur AH. Donc le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH. »

Source du texte d’Euclide : EUCLIDE *Les Éléments*, traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes. Paris : PUF, 1990 (vol.1), 1994 (vol.2), 1998 (vol.3), 2001 (vol.4).