Chapitre 3. L'irrationalité de $\sqrt{2}$ en classe de seconde : du doute à la démonstration.

Rédaction : Évelyne Barbin, GRHM[1] de l'IREM des Pays de la Loire.

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 3 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant·e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

[1] Groupe de Recherche sur l'Histoire des Mathématiques.

La question de l'irrationalité dans l'*Organon* d'Aristote

Dans son traité de logique, intitulé *Organon,* Aristote (384-322 av. J.-C.) s'intéresse aux preuves par l'absurde et il prend pour exemple une démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré[2] :

> « On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire. Car tel est, avons-nous dit, le raisonnement par l'absurde : il consiste à prouver l'impossibilité d'une chose au moyen de l'hypothèse concédée au début. »

Il affirme donc que, si nous supposons que la diagonale et le côté d'un carré sont commensurables, c'est-à-dire si leur rapport est rationnel, alors nous en tirons une contradiction. Cette déduction semble aller de soi. Il formule ainsi cette contraction – « les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs » –, ce que nous interprétons par – « des nombres impairs s'avèrent également pairs ».

Le texte d'Aristote peut être interprété de la manière suivante. Nous pouvons associer à tout nombre n, de manière univoque, le nombre maximal de fois que l'on peut le diviser par 2, que nous noterons $\mathrm{Max}_2\,(n)$. Supposons maintenant que le rapport de la diagonale M et du côté N d'un carré soit rationnel. Alors, en vertu du théorème de Pythagore, il existerait deux nombres (entiers) M et N tels que $M^2 = 2\,N^2$. La contradiction s'obtient ainsi :

1) $\mathrm{Max}_2\,(n)$ est forcément pair si n est un nombre carré ;
2) M^2 est un carré donc $\mathrm{Max}_2\,(M^2)$ est pair ;
3) N^2 est un carré donc $\mathrm{Max}_2\,(N^2)$ est pair, donc $\mathrm{Max}_2\,(2\,N^2)$ est impair et $\mathrm{Max}_2\,(M^2)$ aussi.

Ainsi $\mathrm{Max}_2\,(M^2)$ est à la fois pair et impair.

La division (d'un entier) par le nombre 2 joue un rôle crucial dans l'arithmétique égyptienne et elle est bien présente dans les livres arithmétiques des *Éléments* d'Euclide.

Des historiens ont proposé d'interpréter le texte d'Aristote[3] en écrivant un nombre n quelconque comme le produit d'une puissance m de 2 par un nombre impair P :

$$n = 2^m \times P.$$

Il y a lieu de douter que les Grecs aient conçu ce type de factorisation car ils représentaient l'opération de multiplication par un rectangle. Ainsi, nous ne trouvons pas de décomposition d'un nombre en facteurs premiers dans les livres arithmétiques des *Éléments* car la figuration géométrique ne peut aller au-delà de trois facteurs, avec un parallélépipède.

Une représentation géométrique, proposée par l'historien des mathématiques Richard Knorr[4],

---

[2] ARISTOTE, *Organon*, III, Les premiers analytiques, trad. Jules Tricot, Paris, Vrin, 1992, p. 121-122.
[3] OFMAN, Salomon, « Une nouvelle démonstration de l'irrationalité de racine de 2 d'après les Analytiques d'Aristote », Philosophie antique, 10, 2010, p. 105. http://journals.openedition.org/philosant/2120
[4] KNORR, Richard Wilbur, *The Evolution of the Euclidean Elements: a Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht-Boston, 1975, p. 179-180.

est plus proche de la science grecque. Supposons qu'il existe un triangle rectangle isocèle de côté de l'angle droit N et d'hypoténuse M, avec N et M entiers. Nous avons $M^2 = 2\ N^2$ donc M^2 est pair et M est également pair (car le carré d'un nombre impair est impair). En remplaçant M par $2\ M'$, nous obtenons $2\ M'^2 = N^2$ donc N est aussi un nombre pair. En divisant en deux les trois côtés du triangle (c'est-à-dire par dichotomie), nous pouvons construire un nouveau triangle rectangle isocèle dont les côtés sont des nombres entiers, pairs nécessairement, et donc recommencer la division sans fin. Mais cela est impossible puisque des entiers ne peuvent être infiniment divisés par deux. Nous avons ici un usage d'un procédé présent dans la proposition 31 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide pour montrer que tout nombre composé est toujours divisible par un nombre premier, procédé appelé « descente infinie » par Pierre de Fermat au XVIIe siècle.

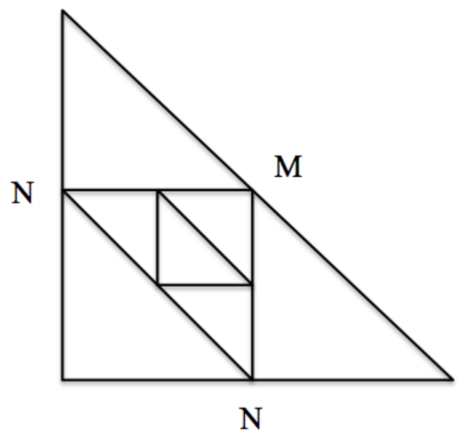

Figure 1. Irrationalité et dichotomie