Chapitre 3. L’irrationalité de $\sqrt{2}$ en classe de seconde : du doute à la démonstration.

Rédaction : Évelyne Barbin, GRHM[1] de l’IREM des Pays de la Loire.

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 3 de l’ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n’a ni valeur de modèle, ni de recette. L’enseignant·e pourra pleinement se l’approprier et l’adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l’ouvrage susdit.

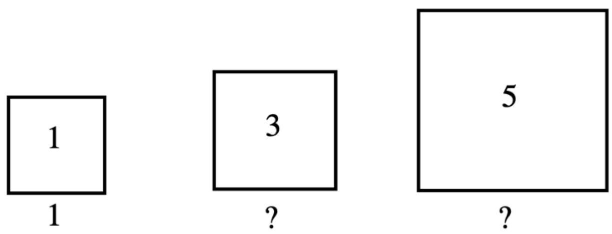
[1] Groupe de Recherche sur l’Histoire des Mathématiques.

La question de l'irrationalité dans le dialogue du Théétète de Platon

Le dialogue du *Théétète* de Platon (environ 428-348 av. J.-C.) nous apprend qu'au IVe siècle avant J.-C., les Grecs savaient qu'il existait plusieurs cas d'irrationalité. Précisément, ils savaient que les carrés de surfaces 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc., jusqu'à 15 ont des côtés incommensurables avec le côté du carré de l'unité. Dans ce dialogue, Socrate, le maître de Platon, pose la question de définir la science ou encore une notion générale, autrement qu'en listant des cas particuliers de cette notion. Le dialogue permet de comprendre comment les Grecs ont pu appréhender la question générale de l'irrationalité. L'extrait ci-dessous oppose Socrate et Théétète. Nous avons adopté la traduction d'Émile Chambry car elle se trouve sur le site de Gallica (Platon, 1991)[2].

« Théétète

Théodore que voici nous avait tracé quelques figures à propos de racines et nous avait montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point pour la longueur commensurable avec celle d'un pied, et, les prenant ainsi, l'une après l'autre, il était allé jusqu'à celle de dix-sept pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là. Il nous vint alors à l'esprit, en considérant que les racines sont en nombre infini, d'essayer de les rassembler sous un terme unique, qui nous servirait à nommer toutes ces racines.



Socrate

Et ce terme, l'avez-vous trouvé ?

Théétète

Je le crois : juges-en toi-même.

Socrate

Voyons.

Théétète

[2] Platon, *Théétète – Parménide*, traduction, notes et notices par Émile Chambry, Paris, Garnier Flammarion, 1991, p. 66-67. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3797x?rk=64378;0

Nous avons divisé tous les nombres en deux classes : les uns, les nombres qui peuvent être formés par la multiplication de facteurs égaux, nous les avons représentés sous la figure du carré et les avons appelés carrés et équilatères.

Socrate

Fort bien.

Théétète

Pour les nombres placés entre les premiers, comme le trois, le cinq et tous les nombres qui ne peuvent être formés en multipliant des facteurs égaux, mais seulement en multipliant un plus grand par un plus petit ou un plus petit par un plus grand et qui s'expriment toujours par une figure aux côtés inégaux, nous les avons représentés sous la figure d'un rectangle et les avons nommés rectangulaires.

Socrate

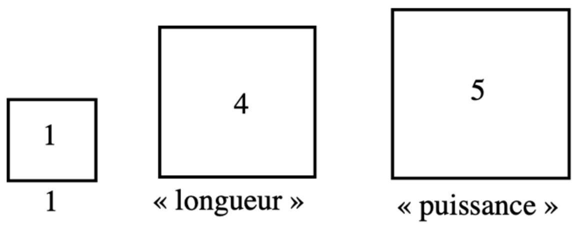
C'est parfait. Et qu'avez-vous fait après cela ?

Théétète

Toutes les lignes dont le carré forme un nombre plan équilatère, nous les avons définies longueurs, et toutes celles dont le carré forme un nombre aux facteurs inégaux, nous les avons définies racines, parce qu'elles ne sont pas commensurables avec les autres pour la longueur, mais seulement pour les aires qu'elles ont le pouvoir de former. Et nous avons opéré de même pour les solides.

Socrate

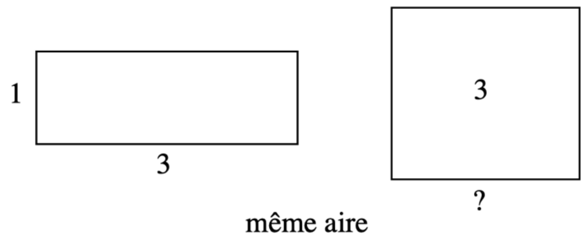
C'est parfait, mes enfants. Aussi je ne crois pas qu'on accusera Théodore de faux témoignage. »



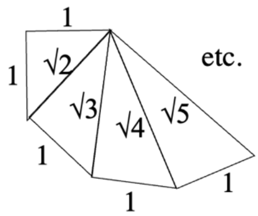
Théétète fait ici référence au mathématicien Théodore de Cyrène (environ 465-398 av. J.-C.). Théodore ayant montré que les côtés des carrés d'aires 3, 5, …15, sont incommensurables avec le côté d'un carré unité, il s'agissait de rassembler tous ces cas en une notion générale qui rende compte de la situation, et qui, d'une certaine façon, désigne l'irrationalité.

Théétète explique que les nombres ont été classés en deux sortes : les nombres équilatères (c'est-à-dire carrés) et les nombres rectangulaires. Ce classement fait écho à la représentation figurée pythagoricienne des nombres. À partir de là, les lignes (segments) sont classées en deux sortes : une ligne est dite « longueur » si elle est le côté d'un carré dont l'aire est un nombre carré, comme 4, 9, 16, etc., et une ligne est dite « racine » si elle est le côté d'un carré dont l'aire est un nombre rectangulaire, comme 3, 5, 7, etc. Ainsi, une ligne « racine » est irrationnelle, mais le carré construit sur cette ligne est d'aire rationnelle : elle est rationnelle en puissance. Plusieurs traducteurs écrivent d'ailleurs « puissance » au lieu du terme moderne de « racine ».

Le dialogue indique que Théodore a construit les carrés d'aire 3, 5, 6, 7, etc. Selon les conceptions géométriques grecques, qui se retrouvent dans les *Éléments* d'Euclide (autour du IIIe siècle av. J.-C.), la construction devait être obtenue par intersection de droites et de cercles (ou encore en termes modernes à l'aide d'une construction à la règle et au compas). Dans chaque cas, il faut donc obtenir la quadrature d'un rectangle, c'est-à-dire la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné. Cette quadrature est donnée dans le Livre II d'Euclide. Soit un rectangle de côtés *BH* et *HC*, il faut, avec la règle et le compas, mettre bout à bout ces deux segments, construire le milieu du segment ainsi formé, tracer avec ce point pour centre un demi-cercle de diamètre *BC*, puis la perpendiculaire menée de *H* à *BC*. Cette perpendiculaire coupe le demi-cercle en un point *A*. Le triangle obtenu en joignant *AB* et *AC* est rectangle. Euclide justifie cette construction en appliquant le théorème de Pythagore, démontré à la fin du Livre I.



La construction des carrés d'aire 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, etc. s'obtient aussi dans la construction dite « en escargot » ci-dessous. Le fait que l'escargot se recouvre quand on arrive à 17 a pu plaider en faveur de cette construction.



Mais une raison beaucoup plus profonde peut expliquer que Théodore se limite aux carrés jusqu'à 15. En effet, dans le dialogue, Théétète indique que celui-ci a montré les incommensurabilités des côtés des carrés d'aire 3, …15. Or, bien que nous n'ayons pas de trace historique de telles preuves, nous pouvons généraliser[3] la preuve par le pair et l'impair pour montrer ceci. Le lecteur pourra examiner les cas où l'aire est le double d'un nombre impair, puis une puissance impaire de 2 et enfin un nombre impair jusqu'à 15. Dans ce dernier cas, il faut utiliser le résultat suivant : le carré d'un nombre impair est l'octuple d'un nombre triangulaire plus une unité. Il est intéressant de remarquer que ce résultat et les preuves sont tout à fait dans l'esprit des nombres figurés de l'école pythagoricienne. Il ne semble pas possible, dans le cas du nombre impair 17, de conclure par le même type de procédure.

Nous ne possédons pas de textes de l'époque de Pythagore. En revanche, les idées ayant perduré, nous trouvons un témoignage de la théorie pythagoricienne dans *l'Introduction*

---

[3] voir Jean Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, Paris, 1961 et Maurice Caveing, *La constitution du type mathématique d'idéalité dans la pensée grecque*, tome III, Université de Lille III, 1982, pp.1296-1302.

arithmétique de Nicomaque de Gérase (environ 60-120)[4]. Les nombres y sont classés selon les formes géométriques grâce auxquelles on peut les agencer. Il y a ainsi des nombres triangles, parce que leurs unités peuvent être disposées selon un triangle équilatéral : 1, 3, 6, 10, etc. :

a
a a
a a a
a a a a
a a a a a

a a
a a

a a a
a a a
a a a

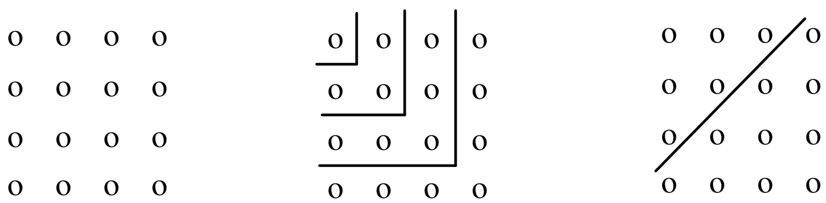
a a a a
a a a a
a a a a
a a a a

a a a a a
a a a a a
a a a a a
a a a a a
a a a a a

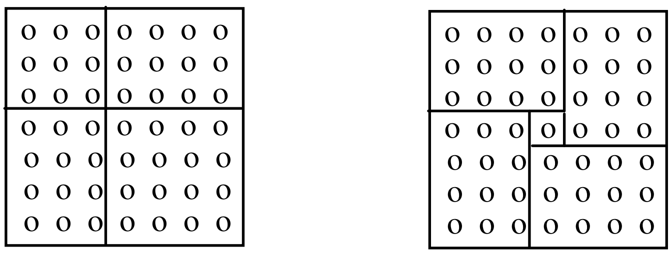
Les nombres carrés sont disposés en figures de carrés, ce sont 1, 4, 9, 16, etc.

Il y a de même des nombres pentagones, disposés selon la forme d'un pentagone régulier, comme 1, 5, 12, 22, 35, 51, etc.

La représentation géométrique des nombres permet de trouver des propriétés des nombres. Par exemple, en délimitant des gnomons emboîtés dans un nombre carré, on voit que la somme des nombres impairs à partir de l'unité est un nombre carré, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 4 = 16, etc. Par exemple, en séparant un nombre carré par une transversale, on voit que la somme de deux nombres triangles successifs est un nombre carré, 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, etc. les figures ci-dessous montrent (font voir) ces propriétés :



Nous pouvons aussi montrer que le double d'un nombre triangulaire de côté n est (en termes modernes) un nombre rectangulaire de côtés n et $n + 1$. Beaucoup de propriétés sur les nombres et sur leurs opérations peuvent aussi se montrer grâce aux représentations géométriques. Par exemple, la figure à gauche ci-dessous montre que le carré construit sur la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés plus deux fois leur produit, et la figure de droite que l'octuple d'un nombre triangulaire plus l'unité est le carré d'un nombre impair.



[4] Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique*, trad. Bertier, Paris, Vrin, 1978.