Chapitre 5. D'un problème de vitesse à une représentation médiévale d'une relation fonctionnelle.

Rédaction : Frédéric Laurent

Expérimentation : Florian Job, Jean-Marc Pilandon, Benjamin Rech, Frédéric Laurent
(Groupe AHMES de l'IREM de Clermont-Ferrand)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 5 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant·e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses auteurs. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

Trace écrite sur le contenu mathématique

1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne V sur un trajet s'exprime comme le quotient de la distance parcourue d par la durée du trajet T (dans un système d'unités adapté). Ainsi $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{T}}$. Ainsi, la vitesse moyenne ne varie pas au cours du temps.
Graphiquement elle est représentée par une portion de droite parallèle à l'axe des abscisses :

Au niveau mathématique, la fonction v associant, à chaque instant t (exprimé en seconde) de l'intervalle $[0\,;\mathrm{T}]$, la vitesse moyenne du TGV (exprimée en m/s) a pour expression algébrique : $v(t) = 90$. C'est une fonction constante du temps.

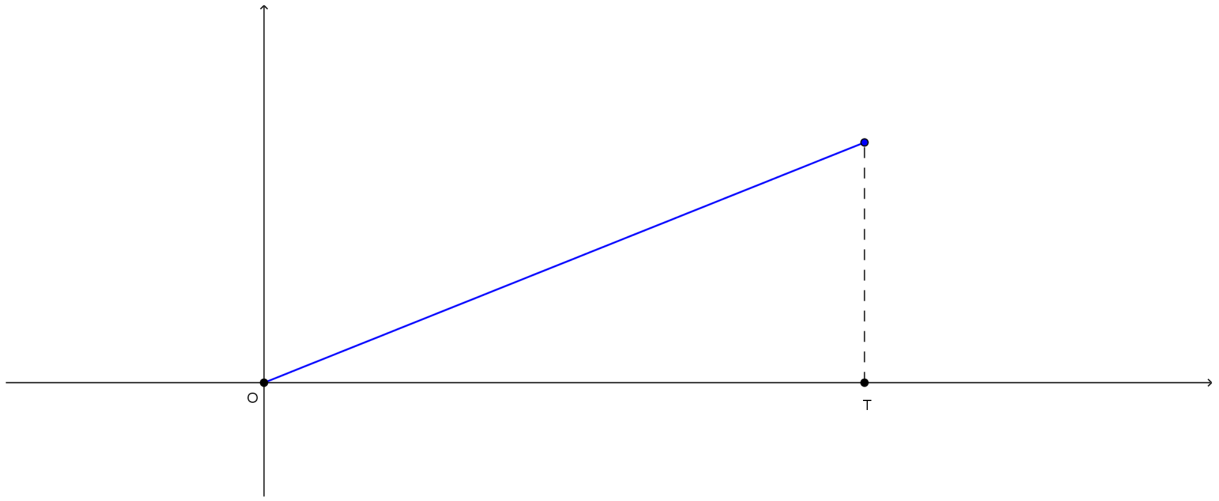
Remarque : sur ce graphique la distance parcourue n'apparaît pas directement. Cependant, comme $\mathrm{d} = \mathrm{V} \times \mathrm{T}$, la distance parcourue correspond à l'aire du rectangle déterminé sous la portion de droite.

2. Vitesse instantanée

Dans le problème du TGV, la vitesse n'augmente pas par « sauts » puisque qu'elle augmente tout au long de chaque intervalle de temps : il faut donc envisager le temps comme une variable continue. La vitesse instantanée v est une fonction de la variable temps t, non nécessairement constante, car elle peut varier à chaque instant.

Au niveau mathématique, l'hypothèse que « chaque seconde la vitesse augmente de 0,25 m/s » est une information traduisant que les accroissements de vitesse sont proportionnels aux accroissements du temps (en deux secondes, la vitesse augmente de 0,5 m/s, etc.). C'est la caractéristique d'une fonction affine.
La fonction v associant, à chaque instant t (exprimé en seconde) de l'intervalle $[0\,;\mathrm{T}]$, la vitesse instantanée du TGV (exprimée en m/s) a pour expression algébrique : $v(t) = 0{,}25t$.

Graphiquement, la fonction v est donc représentée par une portion de droite de coefficient directeur 0,25 et passant par l'origine du repère (puisque la vitesse est nulle au temps $t=0$). La fonction affine v est donc, plus particulièrement, une fonction linéaire.
Le coefficient directeur de la droite se lit graphiquement à l'aide du « triangle des accroissements », à savoir quand une seconde s'écoule, la vitesse augmente de 0,25 m/s (à illustrer sur le graphique).



Remarque : sur ce graphique, la distance parcourue n'apparaît pas directement. Cependant, comme dans le cas de la vitesse constante, on admet que l'aire « sous la courbe » représente la distance parcourue durant le trajet, ici l'aire d'un triangle. Ce résultat, non trivial, pourra être démontré avec de nouveaux outils en classe de terminale.