Chapitre 6. Une introduction de la fonction inverse par un problème de lieu géométrique et une construction à la façon de Descartes.

Rédaction : Frédéric Laurent

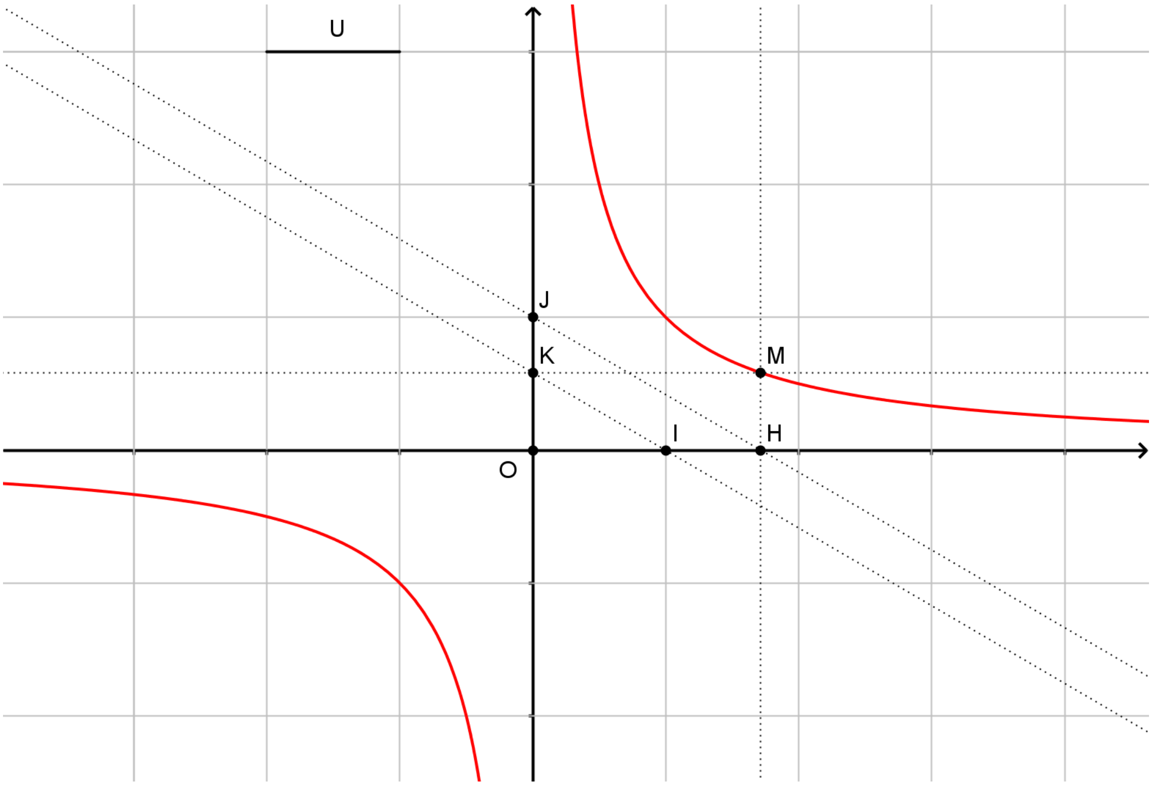
Expérimentation : Jean-Marc Pilandon, Benjamin Rech (Groupe AHMES de l'IREM de Clermont-Ferrand)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 6 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant·e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses auteurs. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

Trace écrite sur le contenu mathématique

Le problème considéré (à la façon de Descartes) porte sur des longueurs, mais son équivalent moderne consiste à déterminer, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que $xy = 1$. Dans ce cas les points appartiennent uniquement aux premier et troisième quadrants (car le produit des coordonnées est positif si et seulement si ces dernières sont de même signe). On obtient la courbe suivante :



Cette courbe est appelée **hyperbole d'équation $xy = 1$**. Elle est constituée de deux branches infinies (mais non reliées). Aucune des branches ne coupe l'un des axes de coordonnées car ni x ni y ne peut être nul.

L'équation de la courbe $xy = 1$ permet de caractériser l'appartenance d'un point à cette courbe. Ainsi le point A(5 ; 0,2) appartient à la courbe car $5 \times 0{,}2 = 1$, mais le point B(3 ; 0,3) n'appartient pas à la courbe car $3 \times 0{,}3 = 0{,}9 \neq 1$. Un point appartient la courbe si et seulement son ordonnée et son abscisse sont inverses l'une de l'autre.

Comme chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en au plus un point, cette courbe est la courbe représentative d'une fonction. Elle est la **courbe représentative de la fonction inverse**, c'est-à-dire de la fonction f qui à chaque nombre réel non nul associe son inverse. Ainsi, l'expression algébrique de la fonction f est $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel x non nul.

On remarque aussi que l'hyperbole d'équation $xy = 1$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. Cette symétrie provient de la symétrie qui existe entre les deux coordonnées dans l'équation de la courbe : si $\mathrm{M}(x;y)$ appartient à la courbe alors $\mathrm{M'}(-x;-y)$ appartient également à la courbe puisque $(-x)(-y) = xy = 1$. Au niveau fonctionnel, on dit que **la fonction inverse est impaire** car, pour tout réel x non nul, l'image de l'opposé de x est l'opposé de son image, ce qui se traduit algébriquement par l'égalité $f(-x) = -f(x)$.

Plus x devient grand, plus son inverse y devient petit et inversement. Ce phénomène se traduit par le fait que les branches de l'hyperbole se rapprochent infiniment des axes. On dit alors que les axes sont asymptotes à la courbe.