

Chapitre 7. Un support géométrique pour aborder le nombre dérivé : la tangente à un cercle d'Euclide à Descartes.

Rédaction : Marie-Line Moureau

Expérimentation : Évelyne Barbin, Anne Boyé, Annabelle Burot, Carène Guillet, Marie-Line Moureau, Catherine Nizan-Picard, Isabelle Voillequin (Groupe Histoire et Enseignement des Mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 7 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant-e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

Calculs de nombres dérivés des fonctions usuelles par la méthode du point double.

On se donne un point A d'abscisse a sur la courbe représentative d'une fonction f et on cherche le coefficient directeur (aussi appelé pente) de la tangente à la courbe en ce point. Ce coefficient directeur est le **nombre dérivé de la fonction en a et il est noté $f'(a)$** .

Le point A a pour coordonnées $(a, f(a))$

Une droite, non verticale, et ayant m pour coefficient directeur passe par A si et seulement si son équation réduite est de la forme $y = mx + f(a) - ma$.

La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que :

$$y = f(x) \text{ et } y = mx + f(a) - ma.$$

Cas de la fonction carré

La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que $y = x^2$ et $y = mx + a^2 - ma$.

Or $x^2 = mx + a^2 - ma$ équivaut à $x^2 - a^2 = m(x - a)$ ou encore à $(x - a)(x + a) = m(x - a)$

et finalement à $(x - a)(x + a - m) = 0$.

Cette équation a deux solutions $x = a$ et $x = m - a$

La première est l'abscisse du point A, et selon la méthode de Descartes, cette abscisse a doit aussi être solution de $(x + a - m) = 0$. Pour cela il faut et il suffit de prendre $m = 2a$.

Conclusion : la droite passant par A et de coefficient directeur $2a$ est la tangente à la courbe au point A.

Cas de la fonction cube

La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que $y = x^3$ et $y = mx + a^3 - ma$

Donc $x^3 = mx + a^3 - ma$ ce qui équivaut à $x^3 - a^3 = m(x - a)$,

ou encore à $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = m(x - a)$ et finalement à $(x - a)(x^2 + ax + a^2 - m) = 0$.

Cette équation a pour solution $x = a$ et les solutions éventuelles de $x^2 + ax + a^2 - m = 0$.

La première correspond au point A, et selon la méthode de Descartes, a doit encore être solution de

$x^2 + ax + a^2 - m = 0$. Pour cela il faut et il suffit de prendre $m = 3a^2$.

Conclusion : la droite passant par A et de coefficient directeur $3a^2$ est la tangente à la courbe au point A.

Cas de la fonction inverse

La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que $y = \frac{1}{x}$ et $y = mx + \frac{1}{a} - ma$.

Donc $\frac{1}{x} = mx + \frac{1}{a} - ma$ ce qui équivaut à $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = m(x - a)$.

Ou encore $\frac{a-x}{ax} = m(x - a)$ et finalement $(x - a)\left(m + \frac{1}{ax}\right) = 0$.

Cette équation a pour solution $x = a$ et la solution de $m + \frac{1}{ax} = 0$.

La première correspond au point A, et selon la méthode de Descartes, a doit encore être solution de $m + \frac{1}{ax} = 0$.

Pour cela il faut et il suffit de prendre $m = -\frac{1}{a^2}$

Conclusion : la droite passant par A et de coefficient directeur $-\frac{1}{a^2}$ est la tangente à la courbe au point A.

Cas de la fonction « racine carrée »

La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que $y = \sqrt{x}$ et $y = mx + \sqrt{a} - ma$

Donc $\sqrt{x} = mx + \sqrt{a} - ma$ ce qui équivaut à $\sqrt{x} - \sqrt{a} = m(x - a)$.

Or x et a sont positifs donc $x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$.

On a donc $\sqrt{x} - \sqrt{a} = m(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ et finalement $(\sqrt{x} - \sqrt{a})(1 - m(\sqrt{x} + \sqrt{a})) = 0$.

Cette équation a pour solution $x = a$ et la solution de $(1 - m(\sqrt{x} + \sqrt{a})) = 0$

La première correspond au point A, et selon la méthode de Descartes, a doit encore est solution de

$$(1 - m(\sqrt{x} + \sqrt{a})) = 0$$

Si $a \neq 0$, il faut et il suffit que $m = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Si $a = 0$, alors l'équation devient $1 - m\sqrt{x} = 0$. Il est impossible de trouver une valeur pour m telle que cette équation ait a , c'est-à-dire 0, comme solution.

Conclusion

En tout point de la courbe autre que l'origine, le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A est $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

A l'origine, aucune droite non verticale n'est tangente à la courbe. On admet que la tangente à la courbe est verticale.

Cas d'une fonction affine

Posons que $f(x) = \alpha x + \beta$. La droite et la courbe se coupent en tout point de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$y = \alpha x + \beta \text{ et } y = mx + a\alpha + \beta - ma$$

Donc $\alpha x + \beta = mx + a\alpha + \beta - ma$, ce qui équivaut à $\alpha(x - a) = m(x - a)$ ou encore $(x - a)(m - \alpha) = 0$.

On retrouve a comme solution ce qui correspond au point A.

Si l'on prend $m \neq \alpha$, A est le seul point d'intersection entre la sécante et la courbe et cette intersection est simple et non double.

Si on prend $m = \alpha$ les deux droites sont confondues.

Conclusion : *Ou bien la droite passant par A ne coupe la droite représentant la fonction affine qu'en A de façon simple et non double), ce n'est donc pas une tangente, ou bien la droite passant par A est confondue avec la droite représentative de la fonction affine ; dans ce cas ce n'est pas non plus une tangente puisqu'elle a une infinité de points en commun.*