Chapitre 8. Une entrée géométrique vers la dérivation : la sous-tangente de la Grèce antique au marquis de l'Hospital.

Rédaction : Carène Guillet

Expérimentation : Évelyne Barbin, Anne Boyé, Annabelle Burot, Carène Guillet, Marie-Line Moureau, Catherine Nizan-Picard, Isabelle Voillequin (Groupe Histoire et Enseignement des Mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 8 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant·e pourra pleinement se l'approprier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses autrices. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

Correction de l’activité élève

1G_Mathématiques_Approche historique de la notion de tangente : éléments de correction

3) Le XVII$^{\text{ème}}$ siècle :

- **Le Marquis de l’Hospital** (1661 – 1704) est l’auteur de *L'analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* en 1696. Ce texte s'appuie sur les leçons que lui a données Jean Bernoulli, pendant l'hiver 1691-1692, sur le calcul différentiel inventé par Leibniz en 1684. C’est le premier livre en français portant sur cette méthode de calcul.

« *Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.*

DEFINITION.

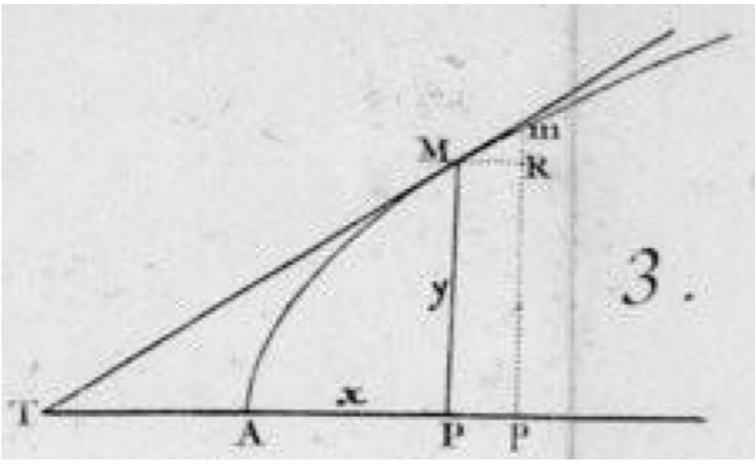
Si l’on prolonge un des petits côtés *Mm* du polygone qui compose une ligne courbe, ce petit côté ainsi prolongé sera appelé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*.

PROPOSITION I.

Problème.

9. *Soit une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l’appliquée* PM*, soit exprimée par une équation quelconque, et qu’il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l’appliquée MP, et supposé que la droite *MT* qui rencontre le diamètre au point *T*, soit la tangente cherchée, on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la première, avec une petite droite *MR* parallèle à *AP*. Et en nommant les données *AP*, *x*, *PM*, *y* (donc *Pp* ou *MR* = *dx*, et *Rm* = *dy*) les triangles semblables *mRM* et *MPT* donneront *mR* (*dy*).*RM*(*dx*) ::*MP*(*y*).$PT = \frac{y\,dx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l’équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui seront tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* et divisée par *dy*, donnera une valeur de la sous-tangente *PT* en termes entièrement connus et délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée *MT.* »



Question :

1) Justifier avec des calculs effectués en notation actuelle la relation : $PT = \frac{y\,dx}{dy}$.

Les triangles *MRm* et *MPT* sont semblables, car ils ont chacun un angle droit, respectivement en *R* et en *P*, et que leurs angles respectifs en *M* et en *T* sont égaux (angles correspondants), donc on a l’égalité des rapports suivante :

$$\frac{MR}{PT} = \frac{Rm}{MP}.$$

Avec $MR = dx$, $Rm = dy$ et $MP = y$, on obtient :

$$\frac{dx}{PT} = \frac{dy}{y}.$$

De cette égalité, on déduit que :

$$PT = \frac{y\,dx}{dy}.$$

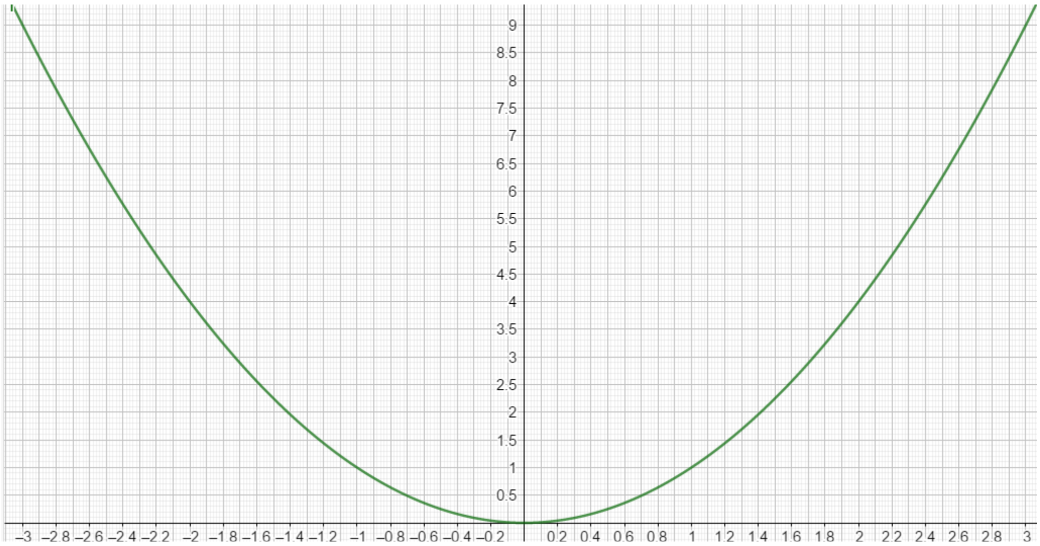
2) Résumer la méthode permettant de tracer la tangente (*MT*).

En connaissant la relation qui lie x et y et en lui appliquant le calcul des différences, on détermine dy/dx ou encore dx/dy. On peut alors calculer la sous-tangente *PT*.

A partir du point *P* (connu) sur l'axe des abscisses, on peut reporter la valeur de la sous-tangente *PT* obtenue et ainsi construire le point *T*, à partir duquel on pourra mener la tangente (*MT*) recherchée.

Application :

On considère la courbe ci-dessous, représentative de la fonction « carrée ».



1. Sur cette courbe représentative, placer le point A, origine du repère, le point M de la courbe d'abscisse 2 et le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
   Voir la figure GeoGebra présentée à la fin de l'activité.

2. Dans les cas décrits dans chacune des colonnes du tableau suivant, construire le point m de la courbe tel que $MR = dx$, compléter les lignes suivantes, et tracer le point T et la droite (*MT*) dans le repère (on prendra soin de tracer d'une couleur différente chacune des cinq droites obtenues) :

dx	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$dy\ (= Rm)$	**5 (= $3^2 - 2^2$)**	**2,25 (= $2{,}5^2 - 2^2$)**	**0,41 (= $2{,}1^2 - 2^2$)**	**0,0401 (= $2{,}01^2 - 2^2$)**	**0,004001 (= $2{,}001^2 - 2^2$)**
$PT\ \left(= y\frac{dx}{dy}\right)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{400}{401}$	$\frac{4000}{4001}$
$\frac{dy}{dx}$	**5**	**4,5**	**4,1**	**4,01**	**4,001**

Voir les tracés sur la figure GeoGebra présentée à la fin de l'activité.

3. Si l'on choisit de prendre le point m de plus en plus proche de *M*, que se passe-t-il « à la limite » pour :
   a) La valeur de dx ? b) La position de *T* ? c) La valeur de $\frac{dy}{dx}$?
   Lorsque *m* est de plus en plus proche de *M*, la valeur de *dx* est de plus en plus proche de 0 (on dit qu'elle « tend » vers 0), la longueur *PT* est de plus en plus proche de 1, donc la position de *T* est de plus en plus proche du point d'abscisse 1 sur l'axe des abscisses. La valeur de $\frac{dy}{dx}$ est de plus en proche de (ou « tend vers ») 4.

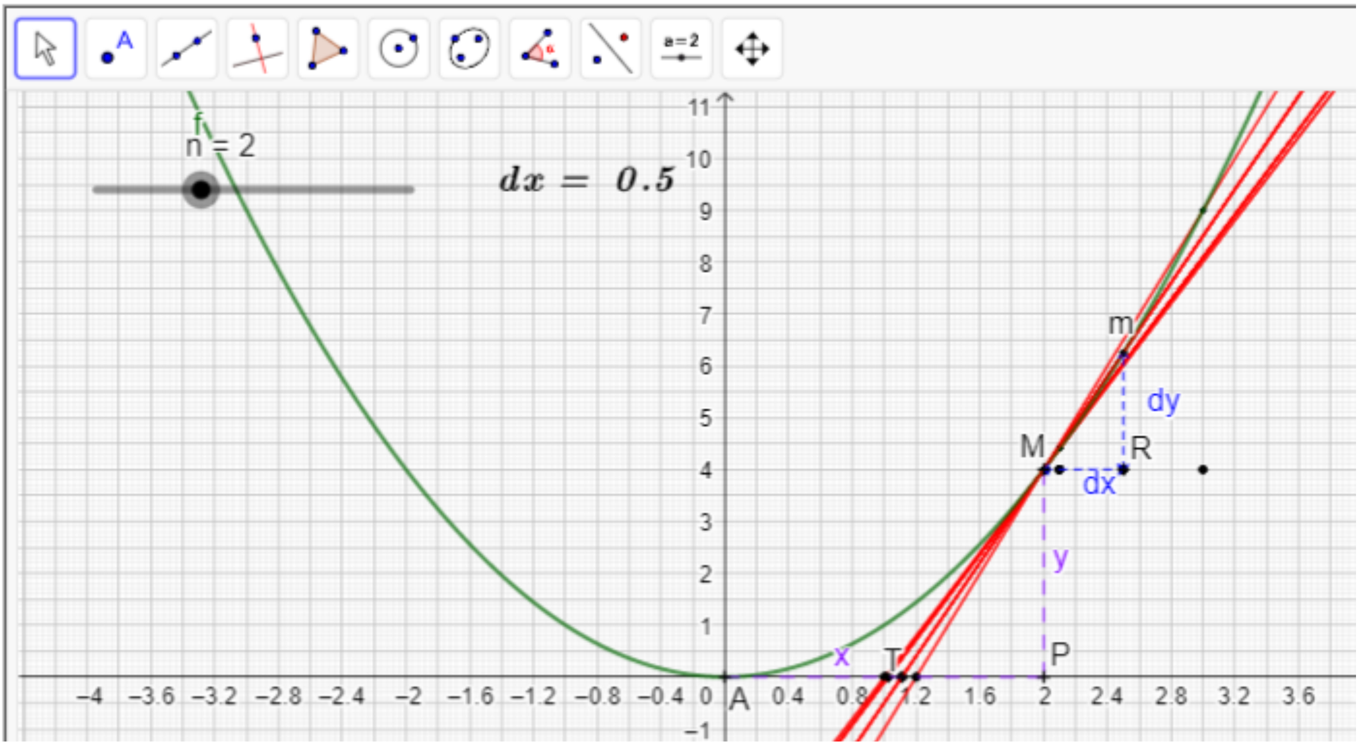
4. Quel lien peut-on faire entre la droite (*MT*) et le nombre $\frac{dy}{dx}$?
   Le nombre $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient directeur de la droite (*MT*).

5. Refaire le même tableau et les mêmes constructions en choisissant désormais pour point M le point de la courbe d'abscisse -3.
   Peut-on observer le même lien entre (*MT*) et $\frac{dy}{dx}$ que dans la question précédente ?

dx	1	0,5	0,1	0,01	0,001

$dy\ (= Rm)$	4 (= (-3)² – (-2)²)	2,75 (= (-3)² – (-2,5)²)	0,59 (= (-3)² – (-2,9)²)	0,0599 (= (-3)² – (-2,99)²)	0,005999 (= (-3)²–(-2,999)²)
$PT\ \left(= y\dfrac{dx}{dy}\right)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{90}{59}$	$\frac{900}{599}$	$\frac{9000}{5999}$
$\dfrac{dy}{dx}$	4	5,5	5,9	5,99	5,999

Dans ce cas, la distance *PT* tend vers 9/6, soit 1,5. Le point *T* tend donc vers le point d'abscisse -1,5 sur l'axe des abscisses et $\frac{dy}{dx}$ tend vers 6.
Dans ce cas, le lien entre (*MT*) et $\frac{dy}{dx}$ est le même, mais AU SIGNE PRES. En effet, le raisonnement du marquis est géométrique donc ne prend pas en compte les valeurs négatives. Or, le coefficient directeur de (*MT*) est -6.



La correction des constructions peut être faite à l'aide du fichier GeoGebra ci-dessus, qui permet de visualiser la trace des points *m*, *R*, *T* et de la droite (*MT*) quand *dx* varie.

Bilan et proposition de trace écrite

Bilan :

Cette activité offre, à travers le texte du marquis de l'Hospital, une première méthode permettant de construire des tangentes à une courbe et de déterminer des nombres dérivés (leurs coefficients directeurs) sans aucune connaissance de calcul différentiel. Les constructions sont géométriques, parfois complétées par des calculs numériques élémentaires quand l'échelle devient trop petite pour réaliser des constructions précises.

Trace écrite possible (en plus des éléments de correction présentés ci-dessus) :

- La droite (MT) construite par cette méthode est la **tangente** à la courbe au point M.
- Elle est la **position limite** de la **sécante** (mM) lorsque m et M deviennent infiniment proches.
- Son **coefficient directeur** est, au signe près, $\frac{dy}{dx}$.
- Dans le langage mathématique d'aujourd'hui, il est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a (a étant l'abscisse du point M), et noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

Dans la suite du cours, les notations du texte du marquis seront remplacées par les notations modernes suivantes :

Notations du marquis	Notations actuelles
Point M de coordonnées x et y	$M(a\,;f(a))$
$MR = dx$	$MR = h$
Point m de coordonnées $x + dx$ et $y + dy$	$m(a+h\,;f(a+h))$
$mR = dy$	$mR = f(a+h) - f(a)$
Coefficient directeur de (MT) : $\frac{dy}{dx}$	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Valeur « limite » de $\frac{dy}{dx}$ lorsque dx devient infiniment petit	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ (nombre dérivé de f en a)