LE CHEMIN DU RANDONNEUR

Jacques NAVEZ
Professeur à l'Université du Burundi
IREM de Liège

1. Introduction

Un randonneur parcourt le Parc Naturel des Volcans en Auvergne. La végétation est plutôt rase, il y a quelques arbres, pas d'obstacles importants et pas trop de panneaux d'interdiction de circuler. Il peut donc tracer son propre chemin en tenant compte de ses paramètres personnels, de sa condition physique, du désir de faire des sommets mais aussi de sa prudence qui lui recommande par exemple de ne pas dévaler des pentes trop accentuées.

Notre randonneur a de bonnes notions de géométrie qu'il a acquises durant ses études secondaires et qu'il a complétées par des lectures appropriées. Il a aussi un bon équipement, une carte qui montre les lignes de niveau, une boussole, un GPS, un altimètre, un téléphone portable. On pourrait encore ajouter l'ordinateur portable avec connexion Internet et le téléphone satellite mais nous ne sommes quand même pas dans l'Himalaya.

La théorie des courbes tracées sur une surface peut lui fournir un tas de renseignements utiles qui pourront aider le randonneur à trouver la voie la plus agréable pour lui.

Au-delà des belles performances mathématiques que cette théorie a déjà produites, on s'en sert notamment pour des besoins topographiques. Il n'est pas possible de construire raisonnablement une route de montagne ou à fortiori un chemin de fer de montagne si on n'a pas de connaissances sur ce sujet.

C'est donc naturellement au cours du 19^{e} siècle, siècle qui a vu l'essor des constructions routières et ferroviaires, que cette théorie a été la plus développée. Elle a fait l'objet de très nombreuses communications et par exemple si on prend les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, il n'y a pas un seul tome des années 1830-1900 qui ne traite de ce sujet.

Au point de vue théorie mathématique, nous allons partir de la courbure d'un arc de courbe plane pour arriver aux courbures principales d'une surface. Nous serons alors à même de définir les différentes courbes (ou lignes) tracées sur une surface.

Nous allons beaucoup parler de pentes aussi, c'est normal car nous considérons un randonneur et pas un alpiniste ; ce n'est pas la même chose de s'élever de 100m en altitude avec une pente de 5% ou à la verticale. Même si le travail mécanique est égal dans les deux cas ! Ce travail est loin d'être négligeable, ainsi si nous prenons

un randonneur de 80kg qui s'élève de 100m, il doit fournir un travail de :
$W = 80x9{,}81x100 = 78.480J = 328{,}58Kcal = 0{,}0218Kwh$ ce qui n'est pas peu.
Le travail W est donné par la différence d'énergie potentielle, il vaut $mg\Delta h$ où m est la masse exprimée en kg, g est l'accélération de la pesanteur exprimée en m/sec² et Δh la différence d'altitude en m, le travail étant exprimé en Joules ou en Kilocalories ou en Kilowattheures.

Fig. 1 Paysage du Cantal

2. **La courbure d'un arc de courbe plane**

Considérons un arc de cercle, on dit que le rayon de cet arc est le rayon de courbure ; le centre de cet arc est dit centre de courbure et enfin l'inverse du rayon de courbure s'appelle **courbure** de l'arc. On voit que plus un arc de cercle a un grand rayon, plus sa courbure diminue et à la limite on dit que la courbure d'un segment de droite est nulle.

Si on a un arc de cercle et que l'on souhaite connaître son centre, il y a plusieurs possibilités qui existent. Par exemple, on peut rechercher l'intersection des médiatrices de deux cordes ou l'intersection de deux normales à l'arc de cercle.

On peut généraliser ces notions à une courbe plane quelconque à condition que son expression analytique soit suffisamment agréable (c'est-à-dire suffisamment dérivable et les dérivées suffisamment continues…).

Considérons un arc de courbe plane (Fig. 2) donné par l'équation y = f(x) où f est suffisamment continûment dérivable. Nous allons construire les deux normales (i.e. les perpendiculaires aux tangentes) aux points $P_o(x_o, f(x_o))$ et $P(x_o+h, f(x_o+h))$, ensuite nous traçons un cercle dont le centre C est l'intersection des deux normales et dont le rayon est CP_o. Si on fait tendre le point P vers le point P_o, le cercle limite obtenu s'appelle **cercle osculateur** (du latin osculator « celui qui embrasse ») relatif au point P_o de l'arc de courbe. Le rayon de ce cercle limite s'appelle **rayon de courbure** en P_o, son centre s'appelle **centre de courbure** relatif au point P_o et l'inverse du rayon de courbure s'appelle **courbure** au point P_o. On peut dire que le cercle osculateur est le cercle qui « épouse » le mieux la courbe au point P_o.

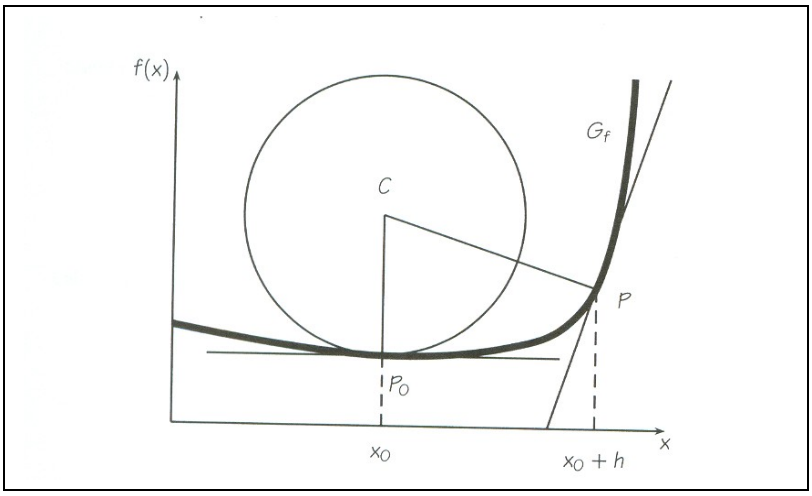

Fig. 2 Cercle osculateur et rayon de courbure

Equation de la tangente en P_o :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Equation de la normale en P_o :

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Equation de la tangente en P :

$$y - f(x_0 + h) = f'(x_0 + h)(x - x_0 - h)$$

Equation de la normale en P :

$$y - f(x_0 + h) = \frac{-1}{f'(x_0 + h)}(x - x_0 - h)$$

Abscisse de l'intersection :

$$(x - x_0)\left(\frac{\dfrac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}}{f'(x_0)f'(x_0 + h)}\right) = \frac{1}{f'(x_0 + h)} + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On passe à la limite pour h tendant vers 0 :

$f(x_0 + h) \to f(x_0)$ par continuité de f,

$f'(x_0 + h) \to f'(x_0)$ par continuité de f',

$\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$ par existence de f',

$\dfrac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \to f''(x_0)$ par existence de f ''.

On obtient :

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)(1 + f''(x_0))}{f'^2(x_0)}$$

$$y = f(x_0) - \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - f(x_0))^2}$$

$$R = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}$$

Fig. 3 Le pays des Ducs de Bourbon

3. **Les courbures principales d'une surface**

Considérons maintenant une surface, en un point de celle-ci, le **plan tangent** est le plan qui contient toutes les tangentes aux courbes tracées sur la surface et passant par ce point (il faut bien sûr démontrer que les tangentes sont coplanaires). La **normale** en un point d'une surface est la perpendiculaire au plan tangent passant par ce point. On utilise en géométrie analytique, le **vecteur normal** en un point d'une surface, on le note $\vec{N}$. Ce vecteur est un vecteur unitaire porté par la normale et dont il faut définir le sens ; les mécaniciens parlent souvent de vecteur normal « extérieur » ce qui est en général assez facile à imaginer bien qu'il y ait de drôles de surfaces qui n'ont qu'un seul côté et un seul bord (le ruban de MÖBIUS). Comme les surfaces que nous allons envisager sont celles constituées par notre planète, nous allons considérer que le vecteur normal est dirigé vers l'air libre (disons vers l'extérieur de la terre).
En un point de la surface, imaginons les différents plans qui passent par la normale (on dit qu'ils forment un faisceau de plans), ils sont appelés les **plans normaux** à la surface.
Les sections de la surface par les plans normaux sont des courbes planes que l'on appelle **sections normales** de la surface.

Contrairement aux courbes planes dont la courbure est toujours positive, on affecte un signe aux courbures des sections normales : si la concavité de la section normale est dirigée vers le haut (dans le sens du vecteur normal), on affecte la courbure du

signe positif et si la concavité de la section normale est dirigée vers le bas, on l'affecte du signe négatif.
Les sections normales en un point d'une surface ont des courbures différentes selon le plan normal considéré ; les courbures extrémales s'appellent les **courbures principales**.

On distingue certains points singuliers que l'on appelle les **ombilics**, ce sont les points d'une surface où toutes les courbures sont égales (par exemple un point d'une sphère), et en particulier, un **méplat** est un point d'une surface où toutes les courbures sont nulles (par exemple, un point d'un plan).

Les points d'une surface qui ne sont pas des ombilics se répartissent en trois catégories :

- les points **elliptiques** où les courbures principales sont de même signe,
- les points **hyperboliques** où les courbures principales sont de signes contraires,
- les points **paraboliques** où une courbure principale est nulle.

Dans la nature, nous rencontrons les points elliptiques sur une butte bien arrondie (qui a la forme d'un ellipsoïde), des points paraboliques sur des versants qui sont en forme de cône ou de cylindre et des points hyperboliques dans les cols (forme en selle de cheval).

Fig. 4 Puy de Côme

4. <u>**Les lignes tracées sur une surface**</u>

<u>Les lignes géométriques</u>

1. Les **lignes de courbure** : ce sont des courbes tracées sur la surface qui sont tangentes en chaque point à l'une des directions principales (c'est-à-dire à l'une des directions où la courbure est extrémale).
   Par tout point qui n'est ni un ombilic ni un méplat, passent deux lignes de courbure orthogonales.

   Ces lignes ne sont guère intéressantes pour le randonneur, leur courbure extrémale n'augure rien de bon pour lui : ou bien elles sont trop accidentées ou bien elles ne sont pas efficaces pour la montée. Ainsi si l'on prend un versant cylindrique ou conique, les lignes de courbures sont formées des génératrices et de leurs trajectoires orthogonales.

2. Les **lignes asymptotiques** : ce sont des lignes tracées sur la surface qui sont tangentes en chaque point à l'une des directions asymptotiques (c'est-à-dire l'une des directions où la courbure est nulle).
   Les lignes asymptotiques ne passent que par des points hyperboliques (par lesquels il en passe deux) ou paraboliques (par lesquels il n'en passe qu'une).

   Ces lignes sont intéressantes car elles sont des chemins « faciles » : leur courbure normale (c'est-à-dire la courbure de la section normale faite par le plan contenant la tangente à la courbe) est nulle, un mobile qui se déplace sur une telle courbe possède son vecteur accélération dans le plan tangent à la surface. Mais il y a deux problèmes : ces lignes n'existent pas en des points elliptiques et dans les versants cylindriques ou coniques des montagnes, ces lignes sont confondues avec les génératrices rectilignes qui ont naturellement une pente importante. Par contre la reconnaissance de ces lignes au voisinage d'un col permet de le franchir plus aisément.

3. Les **lignes géodésiques** : ce sont les trajectoires d'un point matériel soumis à la seule réaction normale (on peut les réaliser en faisant rouler des petites billes sur la surface en état d'apesanteur – sinon ce sera une ligne d'écoulement) ; ce sont aussi les figures d'équilibre d'un fil pesant et homogène placé sur la surface en état d'apesanteur (sinon c'est une chaînette). On montre qu'entre deux points donnés, tout arc de longueur extrémale est un morceau de géodésique.
   Ex. : les géodésiques d'un plan sont les droites, les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles.

   Bien sûr les géodésiques peuvent nous faire découvrir des raccourcis mais ce n'est généralement pas le chemin le plus facile. Leur reconnaissance est aussi très compliquée à part une petite exception : si on considère une colline bien arrondie ayant l'aspect d'une surface de révolution, les géodésiques sont les méridiennes.

<u>Les lignes topographiques</u>

1. Les **courbes de niveau** : une direction verticale étant choisie, les lignes ou courbes de niveau sont les sections de la surface par les plans horizontaux (c'est-à-dire perpendiculaires à la direction verticale). Dans les applications cartographiques, la direction verticale choisie est bien sûr celle du fil à plomb.

   Avec une bonne carte et un altimètre, les lignes de niveau ne sont pas trop difficiles à repérer, elles constituent un passage agréable pour le promeneur qui est en translation entre deux massifs par exemple et qui veut ménager ses efforts avant la prochaine grimpée.

2. Les **lignes de plus grande pente** : une direction verticale étant choisie, les lignes de plus grande pente sont les courbes tracées sur la surface qui sont orthogonales aux courbes de niveau.
   Un mobile soumis à la seule force d'un champ de pesanteur vertical et posé sans vitesse initiale en un point M d'une surface suit une trajectoire tangente à la ligne de pente en M.

   On peut aussi les repérer assez facilement puisqu'elles sont orthogonales au lignes de niveau. Pour sa sécurité, il vaut mieux que le randonneur les évite.

3. Les **hélices** ou **lignes isoclines** : ce sont des courbes dont les tangentes font un angle constant avec un plan fixe (ou ce qui revient au même avec une direction fixe orthogonale au plan donné). En cartographie on choisit naturellement comme plan, le plan horizontal perpendiculaire à la direction du fil à plomb. Les hélices sont donc des « routes » de **pente constante** tracées sur la surface.

   Ces courbes sont les plus recherchées lors de la construction des routes et des chemins de fer de montagne car elles peuvent tenir compte de l'impératif de la pente maximale admissible. Elles ne sont pas forcément les plus agréables pour notre randonneur car la machine humaine est compliquée : une pente constante lui apparaît comme rébarbative.

4. Les **lignes de crête et de talweg** sont les lignes de (plus petite ou plus grande) pentes passant par les points singuliers (cols ou extremums d'altitude) de la surface (définition de JORDAN).
   Les points de la surface sont dits convexes quand la section de la surface par un plan vertical tangent à la ligne de niveau, tourne sa concavité vers le bas et concave quand la concavité est tournée vers le haut. Lorsque les lignes ci-dessus traversent des régions convexes, ce sont des lignes de crête et lorsqu'elles traversent des régions concaves, ce sont des talwegs. Au point de vue topographique, on peut imaginer la surface comme une série de versants dont les parties hautes convergent vers une ligne de crête et dont les parties basses convergent vers un talweg.

   Ces lignes sont toujours très intéressantes pour le randonneur sauf aux abords du point singulier (col ou sommet) et elles ne sont pas très difficiles à repérer aussi bien sur la carte (lignes de niveau en U ou en ∩) que dans la nature.

<u>Les lignes gravitationnelles</u>

Elles tiennent compte du champ de la pesanteur.

1. Les **lignes d'écoulement** : les lignes d'écoulement d'une surface sont les trajectoires des points matériels liés à la surface et soumis à un champ de pesanteur vertical (on les réalise physiquement en faisant rouler une bille sur la surface).

   On peut bien sûr aisément les repérer, parfois intéressantes, elles offrent cependant le danger de pouvoir présenter une difficulté inattendue (ex. : chute d'eau).

2. Les **chaînettes** : sont les lignes d'équilibre d'un fil pesant, homogène, infiniment mince, flexible et inextensible, posé sur la surface et soumis au

champ de la pesanteur.

A réserver aux mécaniciens et aux installateurs de stations de montagnes.

3. Les **lignes brachistochrones** : sont les lignes sur lesquelles doit glisser sans frottement un point matériel pesant, infiniment mince flexible et inextensible, placé dans un champ de pesanteur uniforme de telle sorte que le temps de parcours soit minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés.

A priori très intéressantes mais comment les trouver ? Je ne crois pas que les sentiers qui se sont formés empiriquement au cours des siècles aient eu comme première contrainte le temps de parcours.

Fig. 5 Livadrois-Forez

Références historiques

MONGE Gaspard, Comte de Péluse, né à Beaune en 1746 et décédé à Paris en 1818, créateur de la géométrie descriptive et un des fondateurs de l'Ecole Polytechnique. Ses cendres ont été transférées au Panthéon en 1989.

GAUSS Carl Friedrich, né à Brunswick en 1777 et décédé à Göttingen en 1855, il est l'auteur d'importants travaux en mécanique céleste, en géodésie, en électromagnétisme, en optique, en théorie des nombres et en géométrie.

DUPIN Charles, Baron, né à Varzy en 1784 et décédé à Paris en 1873, il étudia la courbure des surfaces et contribua par ailleurs à la création des services statistiques français.

DARBOUX Gaston, né à Nîmes en 1842 et décédé à Paris en 1917, il consacra son œuvre à la géométrie infinitésimale.

Références bibliographiques

MONGE G. Géométrie descriptive, Paris, Baudouin, an VII (1798), réédité Gabray, 1989.

MONGE G. Applications de l'analyse à la géométrie, Paris, 1807, réédité Ellipses 1994.

EISENHART L.P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, 1909, réédité Dover, 1960.

DARBOUX G. Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 tomes, Gauthier-Villars, Paris, 1914, réédité Gabray 1993.

JULIA G. Cours de Géométrie infinitésimale, 5e fascicule, théorie des surfaces, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

LELONG-FERRAND J. Géométrie différentielle, Masson, Paris, 1963.

Références WEB

Site très complet sur le sujet : www.mathcurve.com
Images sur www.auvergne-tourisme.info

Fig. 6 Livradois - Forez