CII université
12 décembre 2015

Logique à l’entrée de l’université entre consensus et compromis.

Gwenola Madec
Université Paris 13

Eppur si muove !
Institut Galilée

2013 : Bachelier nouvelle version

Automne 2012.

adaptations des licences pour la rentrée 2013.
Obligation de faire coïncider nombre d'heures et nombre d'ECTS.

Deux impératifs :

- consolider les compétences en analyse.
- préserver un volume horaire de mathématique.

Une nécessité : développer la capacité de nos étudiants à suivre un enseignement plus formel.

Une nécessité : développer la capacité à suivre un enseignement plus formel.

Entretenir des connaissances existantes:

- Dénombrement lié aux probabilités.
- Raisonnement par récurrence.

Aborder/consolider des connaissances transversales:

- Sur les ensembles.
- Les applications.
- Entiers.
- Relations (dont ordre et équivalence).

Construire une culture générale des futurs mathématiciens :

Se référer à des exemples « emblématiques », à des inégalités connues …

Consolider les compétences en Analyse ?

- Meilleure connaissance des objets.
  Pas « plus d'objets » mais compréhension plus fine des objets présents.

- Développer la capacité à mettre en œuvre des outils de l'Analyse

Consolider les compétences en Analyse ?
- Meilleure connaissance des objets.
- Développer la capacité à mettre en œuvre des outils de l'Analyse

(mais pas que …)

<u>Premier consensus</u>

être capable de comprendre:
- ce qui est dit / écrit (et ce qui n'est pas dit) d'un objet
- ce qui est demandé à propos d'un objet

une maitrise du langage mathématique, de la logique
en s'appuyant sur les éléments introduit au lycée.

position réflexive de l'étudiant par rapport à ses productions.

Consolider les compétences en Analyse ?

- Meilleure connaissance des objets.
- Développer la capacités à mettre en œuvre des outils de l'Analyse.

<u>Deuxième consensus</u>

être capable de produire des mathématiques:

- Argumenter
- Reconnaître la validité d'un argument
- Maitriser différents types de raisonnement

Principe de la validation au sein d'une communauté.

BILAN : Le langage et le raisonnement doivent occuper une place importante et explicite tout au long de l'enseignement.

Chapitre 1 du cours « Introduction aux structures mathématiques » ouvert en septembre 2013

Problèmes

1. Méconnaissance de ce qui est disponible/enseigné au lycée

Amplifié par la diversité des enseignants intervenant en licence 1.

2. Diversité des profils des étudiants.

3. Progression en cours-TD : très grande autonomie de chacun.

*Elaboration **commune** des contenus du polycopié de référence ?*

Problème des Moniteurs.

Beaucoup d'implicites dans les façons de dire et d'écrire des mathématiques, beaucoup d'activités naturalisées dont l'enseignant n'a pas la trace.

Nécessité de baliser les chapitres, d'expliciter les difficultés, de préciser les attendus (et de fournir des corrigés).

Rôle clé du polycopié commun.

Terminologie neutre pour la communauté :

Exemple de consensus sur une terminologie après débats

« **expression** mathématique » = agencement de mots et symboles mathématiques respectant une syntaxe et une sémantique.

- ***Énoncé***
- ***Proposition***
- ***Assertion***

« **proposition** » expression qui affirme un fait concernant un objet mathématique. Elle est susceptible d'être vraie ou fausse.

« **nom** » = expression qui désigne un objet.

Dans la pratique, les collègues reviennent aux expressions qui leur sont naturelles.

Pas de consensus sur la ***nécessité d'un travail spécifique sur les variables***

alors que cela semble nécessaire pour les étudiants et certains collègues :

(a) Ecrire en langage mathématique la proposition P suivante, où x est un réel : si x est strictement négatif, alors x^2 est supérieur ou égal à 1.

(d) Prouver que P est une proposition fausse.

« Telle que je la lis il n'y a pas de quantificateur dans P,
donc il est maladroit de discuter de sa valeur de vérité. »

Pourtant, une fois le statut des variables éclairci, certaines difficultés tombent d’elles-mêmes.

Exemple :

Analyse chap.3

exercice 5.6 p.70

Rédaction de L. :

[Etude de la fonction $f(x) = (x+4)\,e^{\frac{x-1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$]

On leur fait trouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = 1^+$

(c) En deduire la droite assymptote à la courbe de f en $+\infty$ et leur position relative.

[Léo] $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x^2}} - 1\right) = 0^+$

donc $(x+4) \lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{\frac{x-1}{x^2}} - 1\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - (x+4)\right) = 0$

la droite d'équation $y = x+4$ est assymptote à la courbe!

Erreur rectifiée en deux minutes après discutions sur le statut des différentes variables de l’écrit.

Mais aussi en intégration, pour le calcul de primitives, ou les changement de variables.

Pas de consensus sur la nécessité d'un travail sur la reformulation.

On retrouve dans les reformulations des étudiants le même « mot à mot » des thèmes ou versions des cours de langue.

Exemples

[1] (a) Ecrire en langage mathématique : il existe deux nombres irrationnels tels que leur produit est un nombre rationnel.

$$\exists x \notin Q, \exists y \notin Q, x \times y \in Q$$

$$\exists \ x \in \cancel{Q} \quad \exists y \in \cancel{Q} \quad xy \in Q$$

$$\exists \ (a,b) \in \frac{\mathbb{R}}{Q} \times \frac{\mathbb{R}}{Q} \ , ab \in Q$$

[2] Ecrire en langage naturel la proposition P suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, x = y^2) \Rightarrow x \geq 0.$$

« Pour tout réel x, il existe un réel y , si x est égal au carré de y alors x est positif ou nul. »

Nécessité de travailler spécifiquement sur la reformulation.

L'usage du « donc » et du « alors » n'est pas identifié et encore moins travaillé spontanément.

La diversité des langues maternelles des étudiants et des enseignants n'aide pas.

Proposer une version corrigée de certains exercices ?

Exemple :

(a) Pour que A il faut que B.

(b) A est une condition nécessaire pour B.

(c) Si A alors B.

(d) A seulement si B.

(e) A dès que B.

(f) Toujours A quand B.

(g) Pour que A il suffit B.

Souhaitable pour les exercices où une pratique est naturalisée et souvent liée à une branche des mathématiques.

Certains usages ont besoin d'être revisités pour expliciter leurs fonctions.

Quand utilise-t-on un exemple ? Un contre-exemple ?

Pourquoi cela s'appelle-t-il un contre-exemple ?

Suivant la nature de l'énoncé (universel, existentiel), l'exemple permet de comprendre ce qui se passe ou prouver que l'énoncé est vrai,

le "contre exemple" permet de montrer que l'énoncé est faux ou éclairer sur les limites de l'énoncé.

C'est la multiplicité des situations où ces spécificités sont mises en scène qui permet de fournir des outils d'appropriation et de réguler certaines erreurs de démonstration.

Exemple de production d'étudiant :

Pour montrer que:

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}^+ , x - y < 0$

Cette proposition a pour négation

$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}^+ \ x - y \geqslant 0$

or $x = 3$ et $y = 5$ vérifient $3 - 5 < 0$

donc la négation est fausse et

donc la proposition est vraie

Un usage répété de la contraposée “naturalise” ce raisonnement et “libère” du sens.

L’exemple de l’injection.

En utilisant la définition “première” de l’injection (des points différents ont des images différents), on caractérise injection et surjection par les ensembles de départ et d’arrivée.

La pratique répétée de la contraposée la banalise et en permet l’usage pour l’injection.

Pour finir,

Enseignement « fourre-tout »

Tributaire des enseignants qui en sont à l'origine.

Mais qui s'enrichi des regards et contributions des nouveaux arrivants.

Qui nécessitent beaucoup d'intervenants et donne une « culture commune » aux étudiants et aux enseignants qui y participent.