8ème Journée Itinérante des IREM – 24 Janvier 2020 - Brest

Mathématiques dans le nouveau lycée : défis et perspectives

Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Marie-Line Gardes

CRNL, Université Lyon 1, Inserm, CNRS

Inspé de Lyon

marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Viviane Durand-Guerrier

IMAG, Université de Montpellier

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Introduction

Programme et documents ressources

Ce rapport [Villani-Torossian] réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et recommande de redonner une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.

Introduction

Programme et documents ressources

Démonstration – Raisonnement par l'absurde

Démonstration « culturelle »

Démonstration - illustration

24 démonstrations

Démonstration - Méthode

Démonstration – Raisonnement direct

Démonstration – Calcul

Démonstration – Exemple générique

Introduction

Programme et documents ressources

- Quelle distinction entre preuve et démonstration ? Entre raisonnement et preuve ? Entre processus de preuve et écriture d'une démonstration ?

- Comment travailler ces démonstrations « exemplaires » qui sont de nature différente ? Avec quels scénarios ?

- Pourquoi ? Avec quels objectifs d'apprentissage ?

Introduction

Nos hypothèses didactiques

- Le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans le processus de conceptualisation en mathématiques.

- Les preuves sont importantes dans le processus de conceptualisation car elles permettent, entre-autres, ce travail sur les objets.

- Proposer des situations où l'élève peut travailler sur les objets en jeu, entrer dans un processus de preuve.

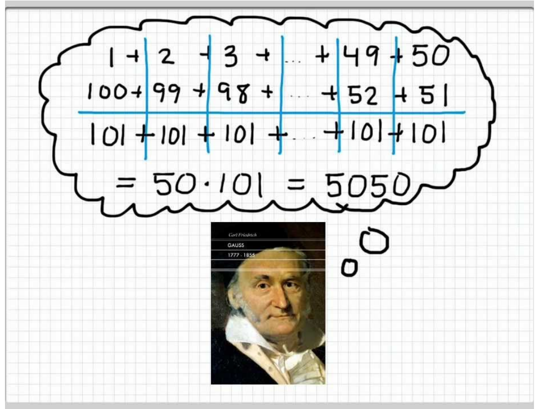
Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Raisonner, prouver, démontrer

1

2 Exemple 1

3 Exemple 2



4 Conclusion

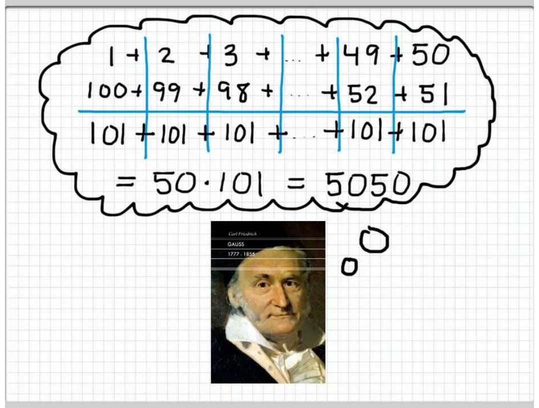
Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Raisonner, prouver, démontrer

1

2 Exemple 1

3 Exemple 2



4 Conclusion

Raisonner

Processus de pensée qui permet de générer des conclusions à partir de perceptions, pensées ou déclarations.

Johnson-Laird (1999)

Le raisonnement déductif

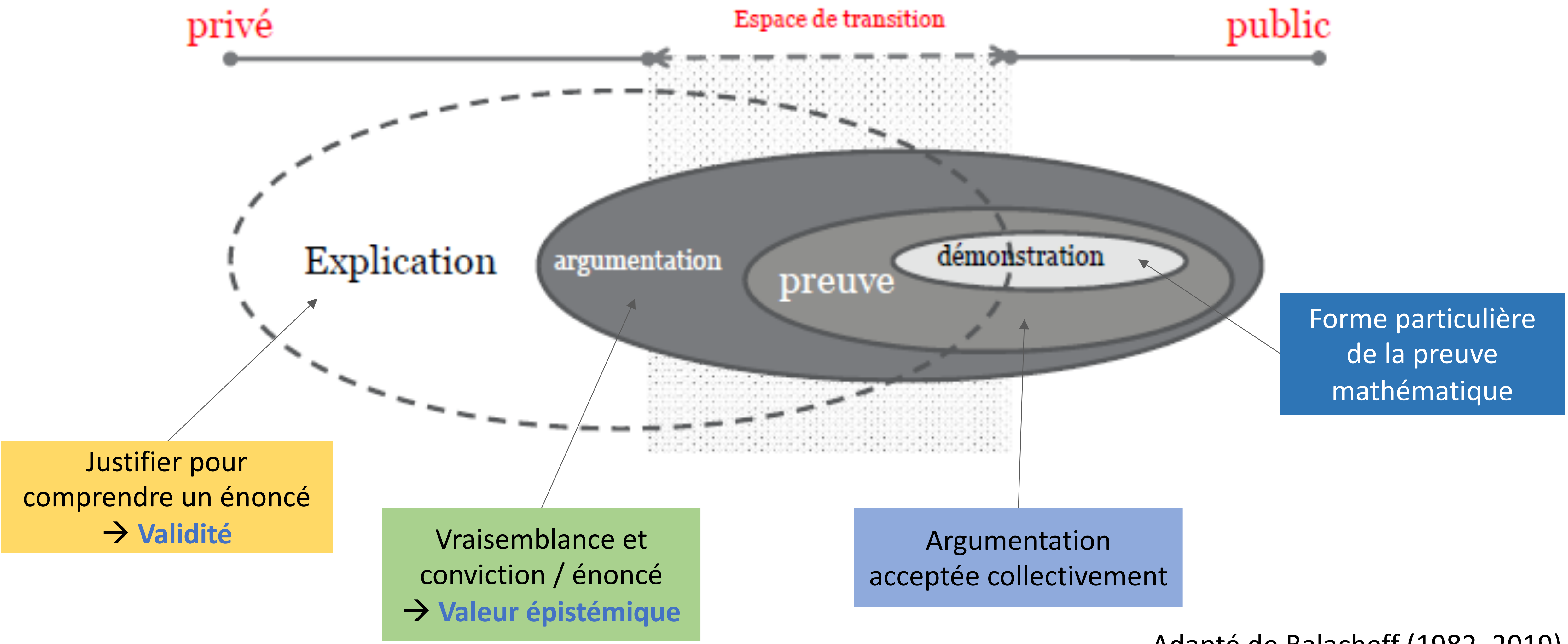
- Raisonnement dont la **validité** peut être contrôlée.
- La déduction est constituée d'un enchaînement de propositions, d'axiomes ou d'inférences (pas déductif) qui respectent des règles définies (celles de la logique formelle).

Démontrer

- Tout raisonnement *valide* permettant d’établir la valeur de vérité d’une proposition.
- Elle a la structure plus rigide d'un ***calcul***, dont l'organisation consiste en un enchaînement de *pas de déduction* ou *d’inférences*.
- Le statut de chaque proposition est **indépendant de son contenu**, puisqu'une proposition peut changer de statut à l'intérieur d'une même démonstration.

Démontrer : produire des arguments pour conclure à la *validité* des assertions. C’est un cas particulier d’argumenter.

Explication, argumentation, preuve, démonstration



Adapté de Balacheff (1982, 2019)

Zoom sur *Prouver*

- **Processus de preuve - *Proving*** : recouvre les différents gestes, attitudes, intentions, opérations mentales, afférents à l'action de prouver dans le cadre de la rationalité mathématique, dont certains sont plus ou moins visibles de l'extérieur suivant que cette action a lieu au sein d'un groupe ou dans le domaine privé de la personne.

- **Produit de la preuve – *Proof*** : écrit qui résulte du processus et qui, lui, est destiné à être communiqué à l'extérieur.

(Gandit, 2004 ; Hanna & de Villers, 2012)

Zoom sur *Prouver*

Un obstacle didactique…

- La preuve ne vit dans l'enseignement, surtout au collège, que par un contrat didactique relatif à la forme / en géométrie (Gandit , 2004).

- Etablir des normes de production de texte de démonstration de façon prématurée peut créer un obstacle à l'élaboration de la signification même de la démonstration et au développement de compétences essentielles à l'activité de démontrer (Douek, 2010).

Des pistes didactiques assez unanimes…

- Nécessité de distinguer l'apprentissage du raisonnement et l'écriture d'un texte de démonstration

- Initiation au raisonnement déductif comme préparation à l'apprentissage de la démonstration

- Pour développer les activités diverses qu'engage une démonstration : **activité de résolution de problème**

Résolution de problème et processus de preuves

- Résolution d'un problème : situations d'action, communication, validation

- Incertitude quant à la validité de conjecture produite

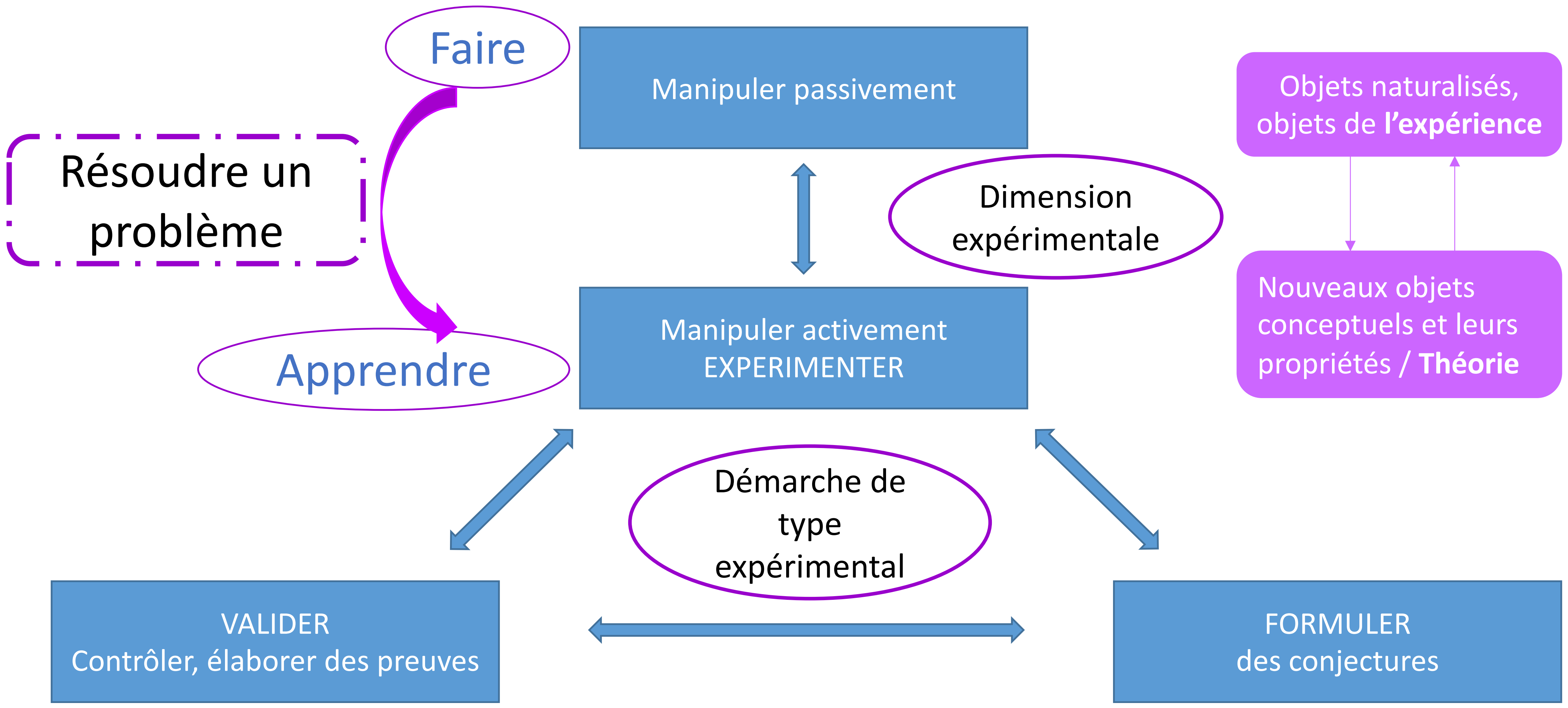
…mais cela ne suffit pas !

- Enjeu qui incite à lever l'incertitude.

  → Un enjeu à la contradiction.

Démarche de type expérimental

Résolution de problèmes et processus de preuves



(Dias, 2008), (Gardes, 2018), (Croset & Gardes, 2019)

…avec des traces dans les documents institutionnels !


éduSCOL
Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

VOIE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE

2DE | 1RE | TLE

Mathématiques — ENSEIGNEMENT COMMUN

RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION

Mots clés
Raisonnement – Démonstration, preuve – Compétences : raisonner, chercher, communiquer – Différenciation – Trace écrite

Intentions majeures

Au-delà de son intérêt majeur dans la formation des futurs scientifiques, le raisonnement mathématique est un axe important de la formation du citoyen. Il permet de comprendre ce qu'est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique, de développer l'esprit critique, de former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l'information.

Selon le rapport Villani-Torossian[1] :

« Il est important qu'un citoyen soit capable d'opérer une écoute active et critique face à un discours qui lui est tenu, que ce soit dans un cadre professionnel, politique, ou autre. Ainsi, se familiariser avec la démarche de la preuve mathématique est un moyen d'apprendre à décomposer un raisonnement en arguments, à déceler d'éventuelles failles ou erreurs, à ne pas confondre l'hypothèse et ses conséquences ou l'ordre logique qui s'y réfère, voire à déceler la substitution d'une causalité à une corrélation pour justifier un argument peu étayé scientifiquement. »

Ce rapport réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et recommande de redonner une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Le programme de mathématiques de la seconde générale et technologique[2] prend en compte cette recommandation :

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

1 https://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf
2 https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

eduscol.education.fr/ - Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse - Août 2019 1

Il est notamment intéressant de reprendre la distinction qu'on y trouve entre raisonnement et démonstration : le raisonnement est une forme de cheminement plus ou moins complexe pouvant comprendre recherche, découverte, conjecture, production d'une preuve peut-être partielle ; la démonstration est une forme de communication d'une preuve aboutie, qui repose sur des résultats acquis antérieurement et sur les règles de la logique.

…avec des traces dans les documents institutionnels !


éduscol

VOIE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE

2DE 1RE TLE

Mathématiques

ENSEIGNEMENT COMMUN

RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION

Mots clés
Raisonnement – Démonstration, preuve – Compétences : raisonner, chercher, communiquer – Différenciation – Trace écrite

Intentions majeures

Au-delà de son intérêt majeur dans la formation des futurs scientifiques, le raisonnement mathématique est un axe important de la formation du citoyen. Il permet de comprendre ce qu'est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique, de développer l'esprit critique, de former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l'information.

Selon le rapport Villani-Torossian[1] :

« Il est important qu'un citoyen soit capable d'opérer une écoute active et critique face à un discours qui lui est tenu, que ce soit dans un cadre professionnel, politique, ou autre. Ainsi, se familiariser avec la démarche de la preuve mathématique est un moyen d'apprendre à décomposer un raisonnement en arguments, à déceler d'éventuelles failles ou erreurs, à ne pas confondre l'hypothèse et ses conséquences ou l'ordre logique qui s'y réfère, voire à déceler la substitution d'une causalité à une corrélation pour justifier un argument peu étayé scientifiquement. »

Ce rapport réaffirme l'importance de la notion de preuve dans l'activité mathématique et recommande de redonner une place significative à la présentation de démonstrations de résultats du cours.

Le programme de mathématiques de la seconde générale et technologique[2] prend en compte cette recommandation :

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

[1] https://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf
[2] https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

eduscol.education.fr/ - Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse - Août 2019 1

En premier lieu, il est nécessaire de préparer le terrain avant d'aborder certaines démonstrations du programme. Cela demande d'abord de s'appuyer sur des approches heuristiques, de manipuler et de verbaliser avant d'abstraire, comme il est décliné dans le rapport Villani-Torossian. Cela requiert ensuite de susciter chez les élèves une motivation pour la preuve mathématique […] :

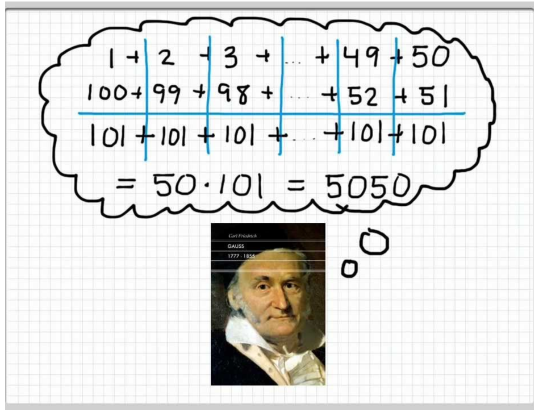
- trouver une accroche en posant un problème que les élèves ne savent pas résoudre avec les outils connus ;
- poser des questions ouvertes, engendrer le doute et débattre autour de controverses ; […]

Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

1 Raisonner, prouver, démontrer

2 Exemple 1

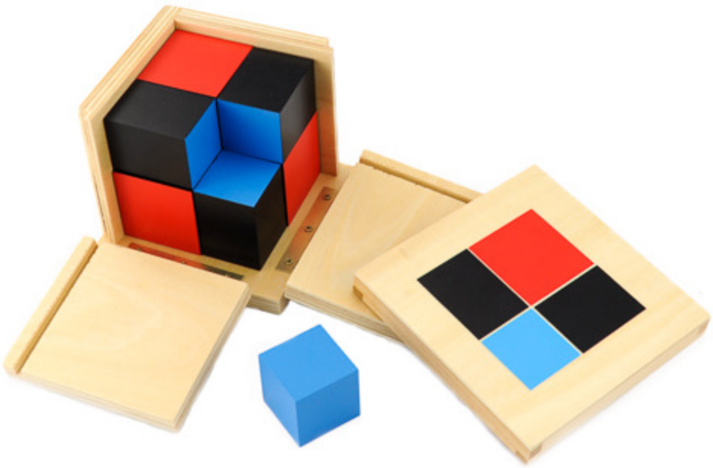
3 Exemple 2

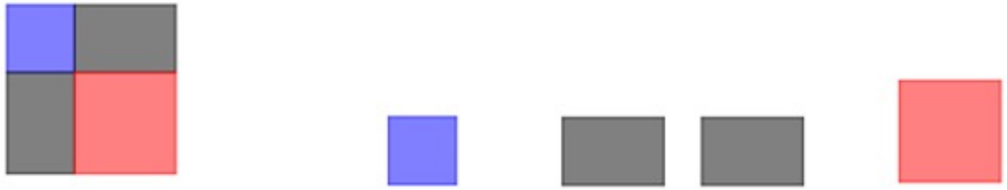


4 Conclusion

Exemple 1

Illustration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$





$$(a+b)^2 = a^2 \;+\; 2ab \;+\; b^2$$

Démonstrations

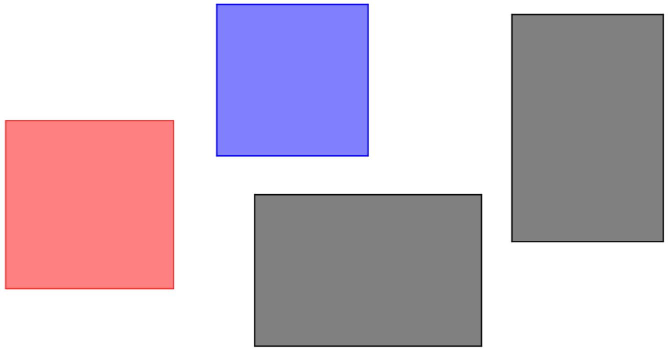
- Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

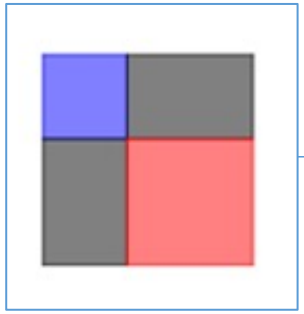
Exemple 1

Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Un constat : difficulté, pour les élèves, à « retenir » l'identité remarquable – *liée a priori à la syntaxe, écriture algébrique*

Une proposition : donner du sens à cette identité grâce à l'illustration géométrique – *articuler la syntaxe avec la sémantique, retour aux objets*





Aspect **sémantique**
Aires de quadrilatères

$$(a+b)^2 = a^2 \ + \ 2ab \ + \ b^2$$

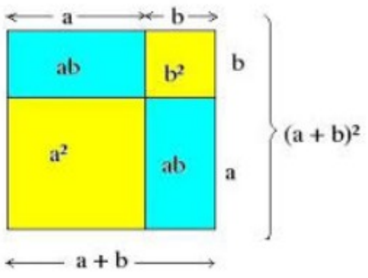
Aspect **syntaxique**
Expressions algébriques

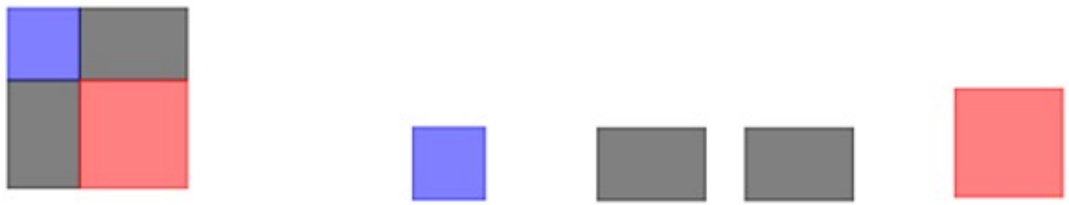
Exemple 1

Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

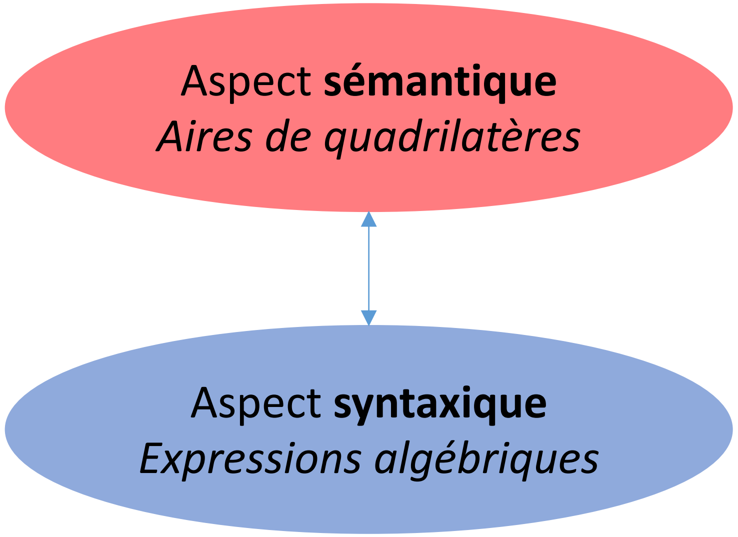
Un constat : difficulté, pour les élèves, à « retenir » l'identité remarquable – *liée a priori à la syntaxe, écriture algébrique*

Une proposition : donner du sens à cette identité grâce à l'illustration géométrique – *articuler la syntaxe avec la sémantique, retour aux objets*





$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

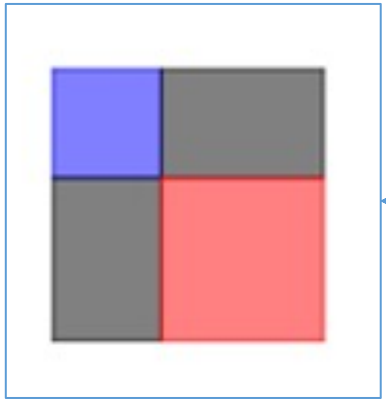


Exemple 1

Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Des questions…

- Comment construire une situation qui permettra aux élèves de donner du sens à $(a+b)^2$ grâce à l'illustration géométrique ? *i.e. d'articuler les aspects syntaxiques et sémantiques ?*
- Comment passer de la manipulation (du « puzzle ») à l'écriture de l'identité ?



?

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Énoncé 1 – *en Tro*

Phase 1 – en individuel

Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

Trouvez plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale formée par ces quatre quadrilatères.

Expliquez chaque méthode par un schéma, un texte ou un collage.

Phase 2 – en groupe

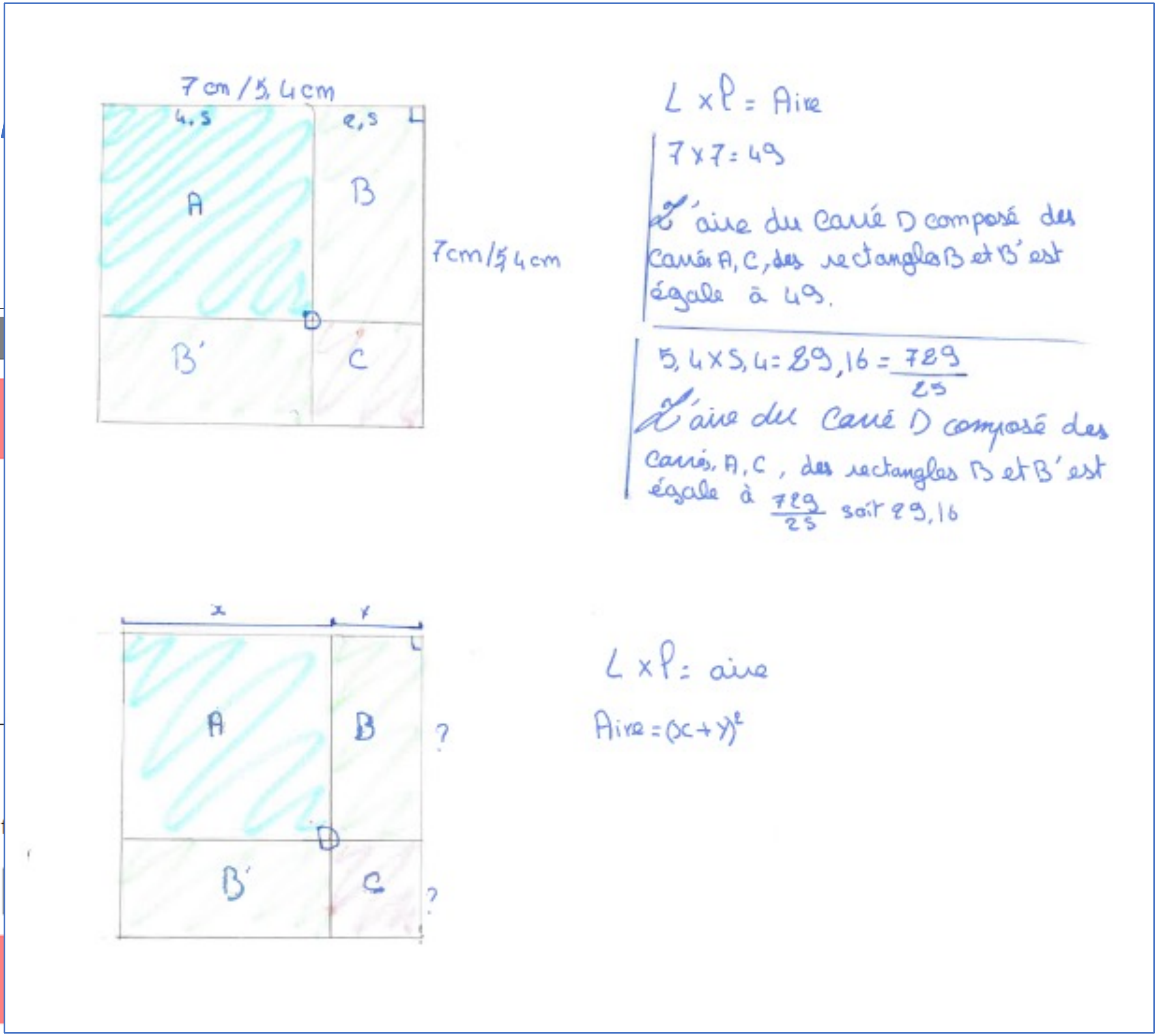
Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

Vous avez trouvé plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale

quadrilatères.

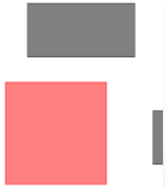
Comparez les expressions obtenues : sont-elles équivalentes ? justifiez



Énoncé 1 – *en Troisiè*

Phase 1 – en individuel

Voici quatre quadrilatères.



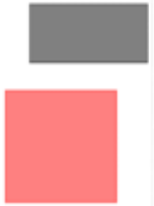
Consigne :

Trouvez plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale formée par ces quatre quadrilatères.

Expliquez chaque méthode par un schéma, un texte ou un collage.

Phase 2 – en groupe

Voici quatre quadrilatères.



Consigne :

Vous avez trouvé plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale formée pa

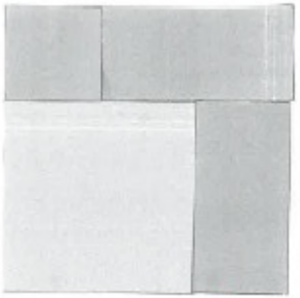
quadrilatères.

Comparez les expressions obtenues : sont-elles équivalentes ? justifiez

Vos réponses :

Méthode n°1 (facile et efficace)

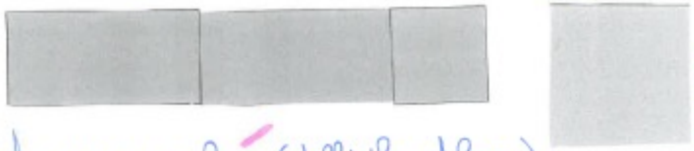
Pour calculer l'aire totale des 4 quadrilatères, il faut les assembler pour former un carré comme ceci :



puis utiliser la formule pour calculer l'aire d'un carré : c×c

Méthode number°2

Pour calculer l'aire totale des 4 quadrilatères il faut les assembler pour former un rectangle et un carré comme ceci :



puis utiliser la formule pour calculer l'aire d'un rectangle : L×l
Et calculer l'aire du carré : c×c

Méthode numero 3 (difficile et longue)

On calcule chaque quadrilatères séparément comme ceci :

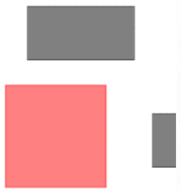
Exemple : rectangle 1 : L×l
rectangle 2 : L×l
carré 1 : c×c
carré 2 : c×c

puis on additionne le résultat de chaque calculs: R(1)+R(2)+C(1)+C(2) = Aire totale

Énoncé 1 – *en Troisiè*

Phase 1 – en individuel

Voici quatre quadrilatères.



Consigne :

Trouvez plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale formée par ces quatre quadrilatères.

Expliquez chaque méthode par un schéma, un texte ou un collage.

Phase 2 – en groupe

Voici quatre quadrilatères.

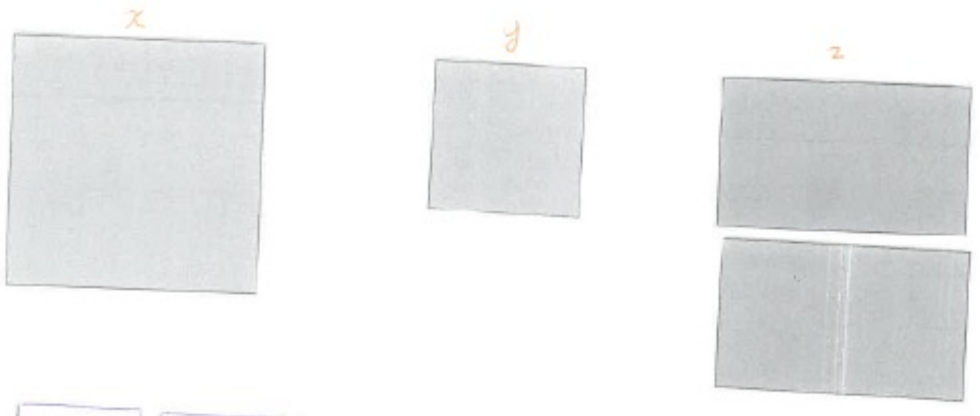
Consigne :

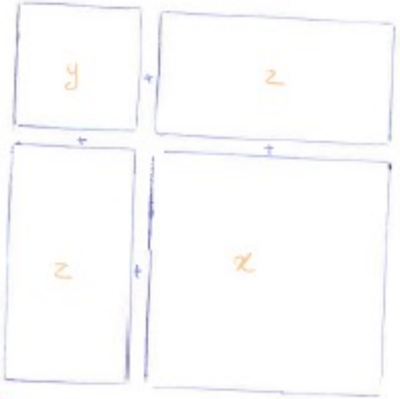
Vous avez trouvé plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale formée par quadrilatères.

Comparez les expressions obtenues : sont-elles équivalentes ? justifiez

Vos réponses :

① On donne une lettre au grand carré, au petit carré et une lettre commune aux deux rectangles.

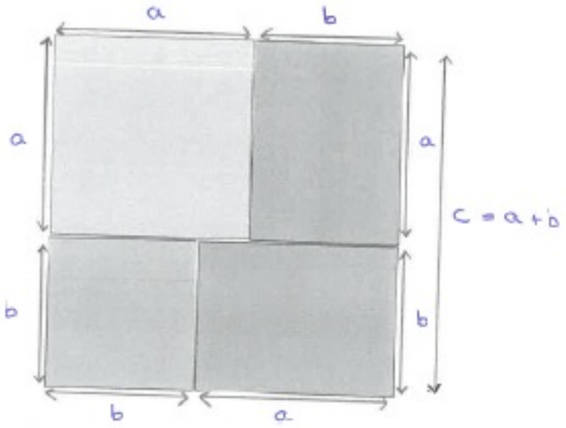




Pour trouver l'aire totale, on ajoute l'aire de x, l'aire de y et deux fois l'aire de z, $x + y + 2z$.

② Pour trouver l'aire totale, on ajoute chaque quadrilatère entre eux pour former un carré. Puis on calcule le carré du côté du carré obtenu.

$A = c^2$



Énoncé 1 – *en T*

Phase 1 – en individuel

Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

Trouvez plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surface totale

formée par ces quatre quadrilatères.

Expliquez chaque méthode par un schéma, un texte ou un collage.

Phase 2 – en groupe

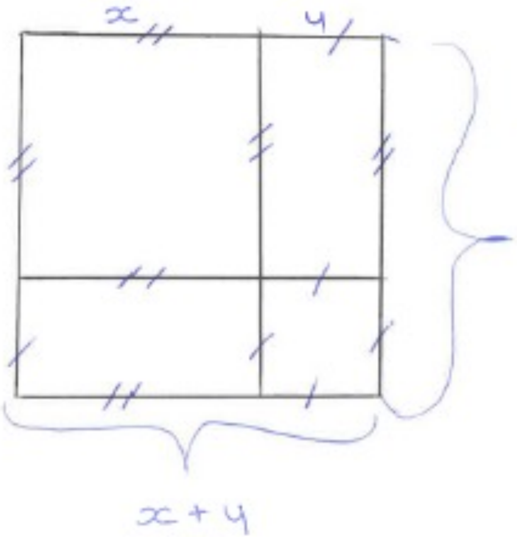
Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

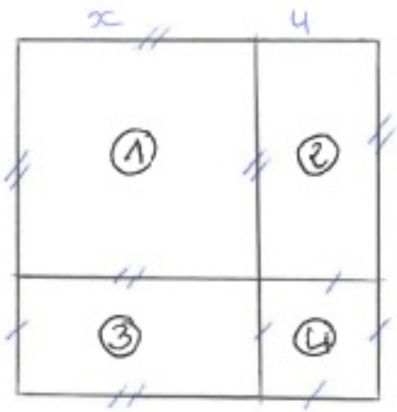
Vous avez trouvé plusieurs méthodes pour calculer l'aire de la surfac

quadrilatères.

Comparez les expressions obtenues : sont-elles équivalentes ? justifi



$$\Longrightarrow S_1 = (x+y)(x+y)$$
$$= (x+y)^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$



$\boxed{1} = x^2$ $\boxed{2} = \boxed{3} = xy$

$\boxed{4} = y^2$

$$S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 = x \times x + x \times y + x \times y + y \times y$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$

On remarque : $S_1 = S_2$

Énoncé 1 – *en Troisième*

Phase 1 – en individuel

Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

Trouvez plusieurs méthodes pour calculer l’aire de la surface totale formée par ces quatre quadrilatères.

Expliquez chaque méthode par un schéma, un texte ou un collage.

Phase 2 – en groupe

Voici quatre quadrilatères.

Consigne :

Vous avez trouvé plusieurs méthodes pour calculer l’aire de la surface totale formée par ces quatre quadrilatères.

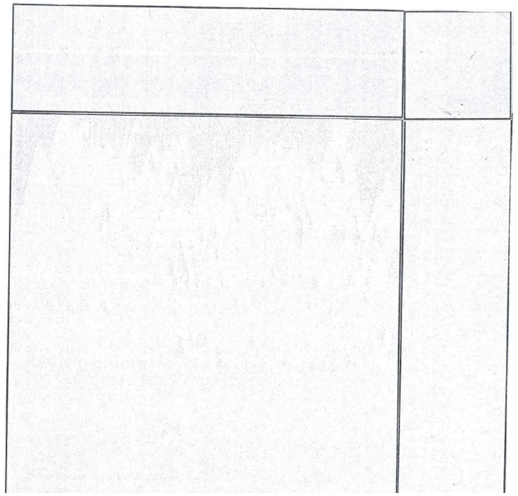
Comparez les expressions obtenues : sont-elles équivalentes ? justifiez

Conclusion

- Essais d’articulation sémantique/syntaxe
- Difficulté à passer aux expressions algébriques
- Quelques éléments de preuves

→ Énoncé ne l’encourage pas

Enoncé 2 – en Seconde



En binôme

Histoires de carrés e

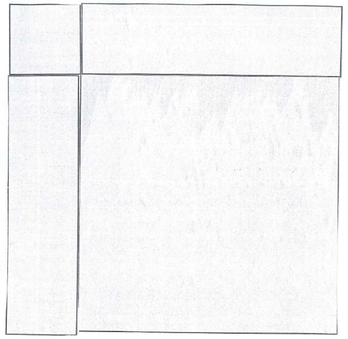
1. Avec le matériel proposé, construire quatre g
composé de deux carrés et de deux rectangle
Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on appelle
carrés et b la longueur du côté de l'autre carr
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces e
   b. Exprimer de deux manières différentes l
   c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

A) L'air du grand carré est de $a \times a = a^2$
L'air du petit carré est de $b \times b = b^2$
L'air du rectangle $a \times b = ab^2$

B) L'air du grand carré est de $a+b \times a+b$
L'air du grand carré est de $a^2 \times b^2$

Enoncé 2 – en Secor



En binôme

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques).
Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on appelle a la longueur du côté d'un des deux carrés et b la longueur du côté de l'autre carré.
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces en fonction de a et b.
   b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré.
   c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

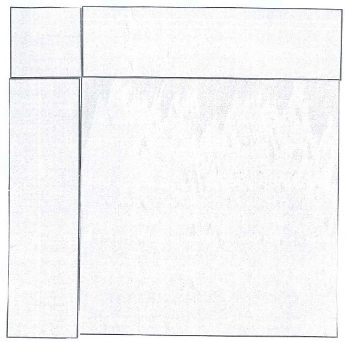
2a)
carréa : $a \times a$
↳ coté x coté
carré b : $b \times b$
rectangle : $a \times b$

2b) $(a \times b) + (a \times b)$

2c) $(a \times b) + (a \times b) = (a+b)^2$

$(a \times a) + (b \times b) + ((a \times b) \times 2)$

Enoncé 2 – en Seconde



En binôme

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques). Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on appelle a la longueur du côté d'un des deux carrés et b la longueur du côté de l'autre carré.
   - **a.** Exprimer l'aire de chacune des pièces en fonction de a et b.
   - **b.** Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré.
   - **c.** Quelle égalité algébrique obtient-on ?

a) $a \times a$; $b \times a$; $b \times b$; $a \times b$

b) 1. $(a+b) \times (a+b)$

2. $a \times a + b \times a + b \times b + a \times b$

c) $(a+b) \times (a+b) = a \times a + a^2 \times b^2 + b \times b$

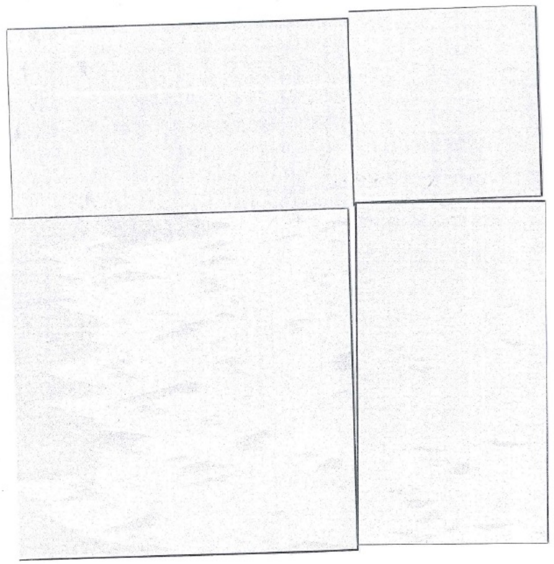
Enoncé 2 – en Seconde

En binôme

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques). Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on appelle a la longueur du côté d'un des deux carrés et b la longueur du côté de l'autre carré.
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces en fonction de a et b.
   b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré.
   c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?



2 a - carré a = $a \times a$
carré b = $b \times b$
rectangle = $a \times b$

b) $(a+b) \times (a+b)$ = côté x côté du grand carré
$a \times a + b \times b + a \times b + a \times b$ = aire de chaque carré et de chaque rectangle

c) $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$
$= (a \times a) + (b \times b) + (a \times b) + (a \times b)$

Enoncé 2 – en Seconde

En binôme

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques).
Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on appelle a la longueur du côté d'un des deux carrés et b la longueur du côté de l'autre carré.
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces en fonction de a et b.
   b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré.
   c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

Conclusion

- L'énoncé incite d'abord à un travail sémantique puis à un travail syntaxique
- Peu d'articulation sémantique/syntaxique chez les élèves
- Manipulation puis formulation, sans lien
- Des difficultés à lier expressions algébriques et représentations géométriques

Enoncé 3 – en Seconde

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques).
   Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on note A, B, C et D les quatre pièces où A et B sont les deux carrés. On appelle x la longueur du côté du premier des deux carrés et y la longueur du côté de l'autre carré.

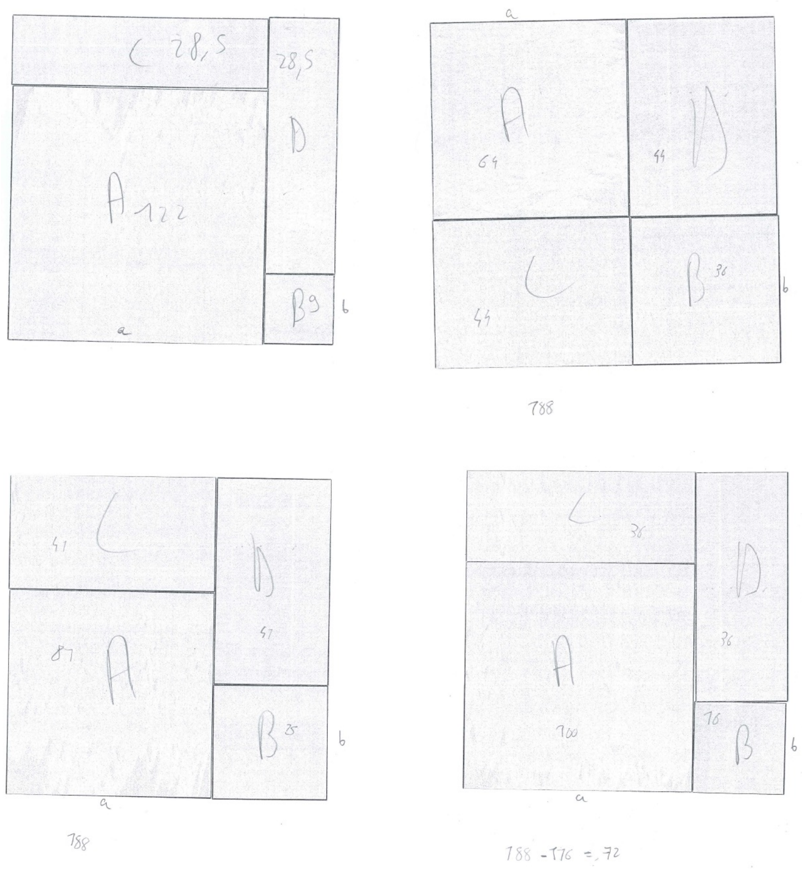
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de x et y en complétant les phrases ci-dessous :
   L'aire de la pièce A est égale à : ....
   L'aire de la pièce B est égale à : ....
   L'aire de la pièce C est égale à : ....
   L'aire de la pièce D est égale à : ....

   b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré (celui composé de quatre pièces).
   <u>Première manière</u> :
   Aire obtenue :
   Explication :

   <u>Deuxième manière</u> :
   Aire obtenue :
   Explication :

   c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

Enoncé 3 – en Seconde



a.

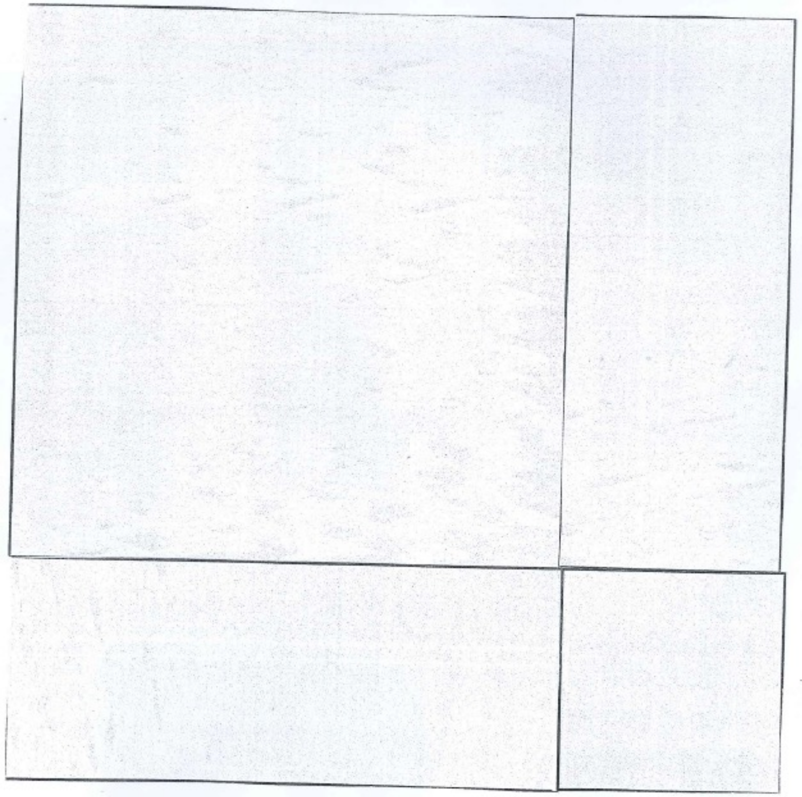
grand carré 1 :
L'aire de la pièce A est égale à : 122
L'aire de la pièce B est égale à : 9
* C * : 28,5
* D * : 28,5

grand carré 2 :
L'aire de la pièce A est égale à : 64
* B * : 36
* C * : 44
* D * : 44

grand carré 3 :
L'aire de la pièce A est égale à : 81
* B * : 25
* C * : 41
* D * : 41

a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de a et b en complétant les phrases ci-dessous :
L'aire de la pièce A est égale à : a x a
L'aire de la pièce B est égale à : b x b
L'aire de la pièce C est égale à : a x b
L'aire de la pièce D est égale à : a x b

Enoncé 3 – en Sec



a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de x et y en complétant les phrases ci-dessous :

L'aire de la pièce A est égale à : x^2

L'aire de la pièce B est égale à : y^2

L'aire de la pièce C est égale à : $x \times y$

L'aire de la pièce D est égale à : $x \times y$

b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré (celui composé de quatre pièces).

Première manière :

Aire obtenue : $x^2 \times y^2$

Explication :

$A = x \times y + x \times y = x^2 \times y^2$

Deuxième manière :

Aire obtenue : $x^2 \times y^2$

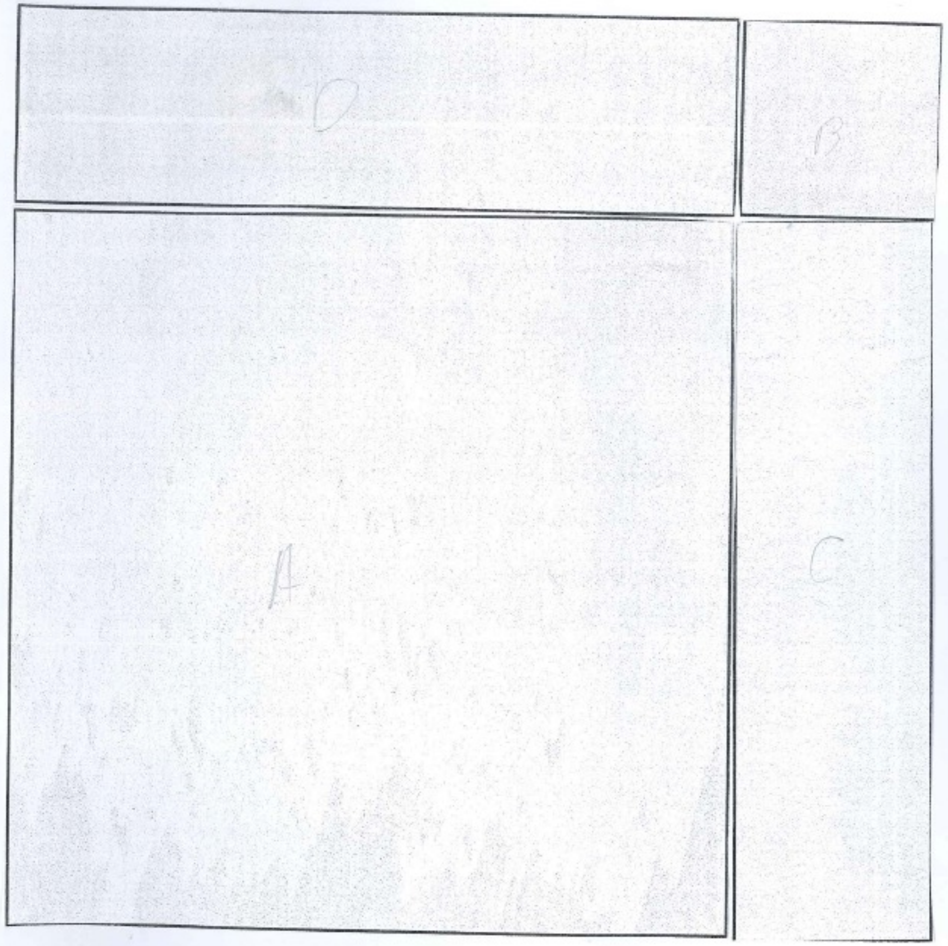
Explication :

Aire pièce A + Aire pièce B + Aire pièce C + Aire pièce D $= x^2 + y^2 + x \times y + x \times y$

c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

$= x^2 + y^2 + x \times y + x \times y$

Enoncé 3 – en Secon



a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de x et y en complétant les phrases ci-dessous :

L'aire de la pièce A est égale à : $x \times x$

L'aire de la pièce B est égale à : $y \times y$

L'aire de la pièce C est égale à : $x \times y$

L'aire de la pièce D est égale à : $y \times x$

b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré (celui composé de quatre pièces).

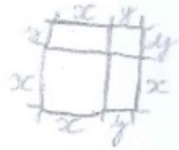
<u>Première manière</u> : la première manière est je calculer simplement

Aire obtenue : $x + y \times y + x$

Explication :

$x + y \times y + x$ = l'aire

côté carré A côté carré B côté carré B côté carré A



<u>Deuxième manière</u> : la 2ème maniere reviendrait a additionné chaque aire

Aire obtenue : $x^2 + y^2 + y \times x + y \times x$

Explication :

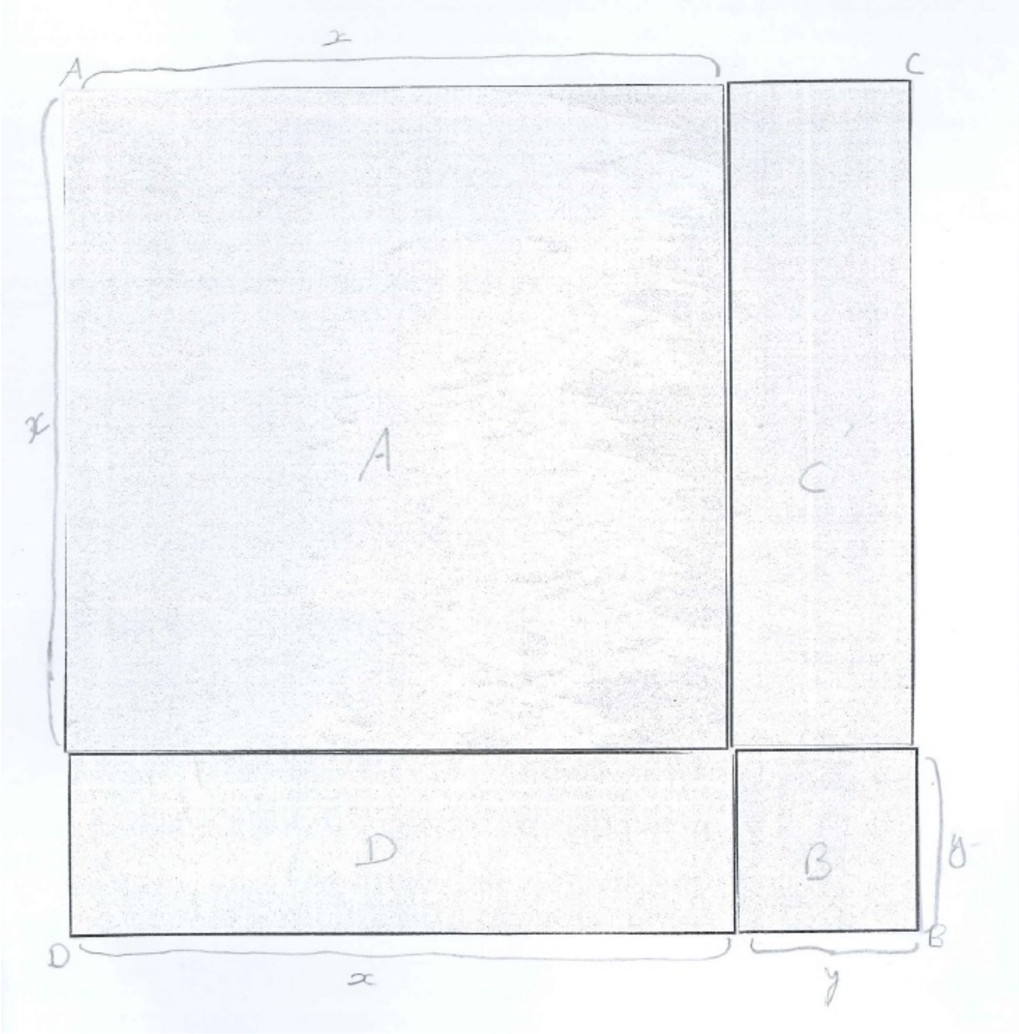
$x^2 + y^2 + y \times x + y \times x$

air carré A · air carré B · largeur de D · longueur de D · largeur de C · longueur de C

c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

$x + y \times y + x = x^2 + y^2 + y^2 \times x^2$

Enoncé 3 – en Seco



a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de x et y en complétant les phrases ci-dessous :

L'aire de la pièce A est égale à : x^2

L'aire de la pièce B est égale à : y^2

L'aire de la pièce C est égale à : $y \times x$

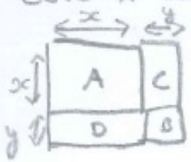
L'aire de la pièce D est égale à : $y \times x$

b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré (celui composé de quatre pièces).

Première manière : $(x+y)^2$

Aire obtenue : aire du grand carré soit $(x+y)^2$

Explication : côté × côté



Deuxième manière : Addition de toutes les aires qui composent le grand carré

Aire obtenue :

Explication :

Aire pièce A + Aire pièce B + Aire pièce C + Aire pièce D

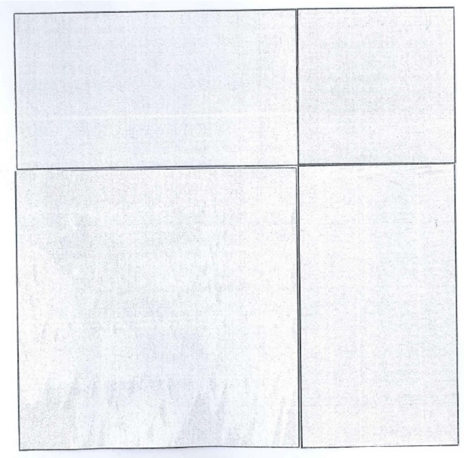
$(x \times x)$
$(y \times y)$ aire des carrés A et B

$2(y \times x)$ ← parce qu'il y a 2 rectangles

c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Enoncé 3 – en Seconde



a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de a et b en complétant les phrases ci-dessous :
L'aire de la pièce A est égale à : a^2
L'aire de la pièce B est égale à : b^2
L'aire de la pièce C est égale à : $a \times b$
L'aire de la pièce D est égale à : $a \times b$

b. Exprimer de deux manières différentes l'aire du grand carré.

c. Quelle égalité algébrique obtient-on ?

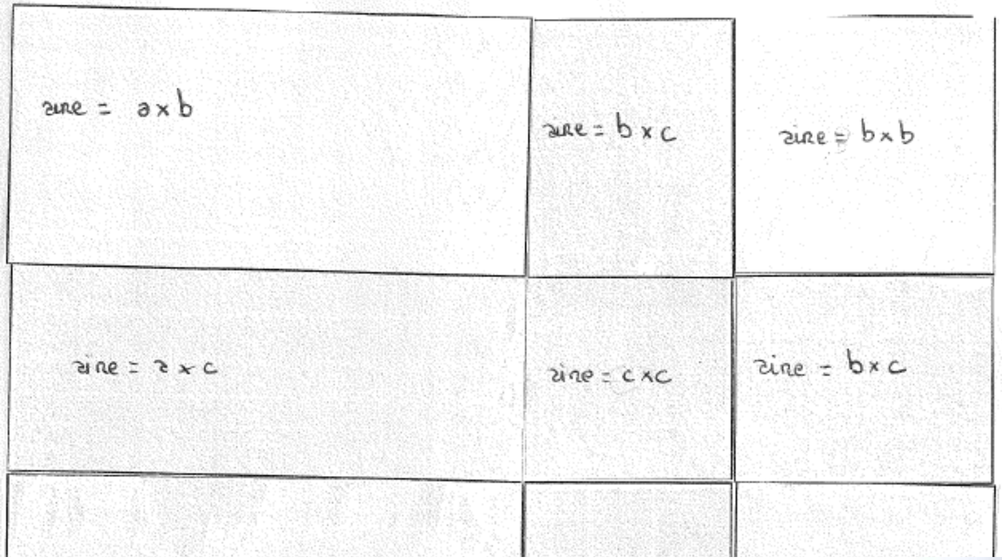
b. $a^2 + b^2 + a\times b + a\times b$
$(a+b)\times(a+b)$

c. $(a+b)\times(a+b) = a^2+b^2+a\times b + a\times b$
$= a^2+b^2+2(a\times b)$

3. De la même manière avec le matériel proposé, construire un carré à l'aide des neuf pièces notées A, B, C, D, E, F, G, H et I où A, B et C sont les trois carrés.
On appelle a, b et c la longueur du côté de chaque carré.
Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C, D, E, F, G, H et I en fonction de a, b et c
En déduire le développement de $(a+b+c)^2$.

$(a+b+c)^2$ est l'aire du grand carré, on en déduit que c'est la somme de toutes les pièces qui constituent le grand carré.

$(a+b+c)^2 = (a\times b) + (b\times c) + (b+b) + (a\times c) + (c\times c) + (b\times c) + (a\times a) + (a\times c) + (a\times b)$



$(a+b)^3 = (b\times b\times b) + (a\times b\times b) + (a\times b\times b) + (a\times b\times a) + (a\times b\times a) + (a\times a\times a) + (a\times b\times b) + (a\times b\times a)$

$= b^3 + (a\times b^2) + (a\times b^2) + (a^2\times b) + (a^2\times b) + a^3 + (a\times b^2) + (a^2 \times$

$= b^3 + 3(a\times b^2) + a^3 + 3(a^2\times b)$

$= a^3 + 3(a\times b^2) + 3(a^2\times b) + b^3$

Enoncé 3 – en Seconde

Histoires de carrés et de rectangles

1. Avec le matériel proposé, construire quatre grands carrés. Chaque grand carré est composé de deux carrés et de deux rectangles superposables (identiques).
Les coller sur la feuille réponse.

2. Pour chaque grand carré obtenu, on note A, B, C et D les quatre pièces où A et B sont les deux carrés. On appelle x la longueur du côté du premier des deux carrés et y la longueur du côté de l'autre carré.
   a. Exprimer l'aire de chacune des pièces A, B, C et D en fonction de x et y en complétant les phrases ci-dessous :
   L'aire de la pièce A est égale à : ....
   L'aire de la pièce B est égale à : ....
   L'aire de la pièce C est égale à : ....
   L'aire de la pièce D est égale à : ....

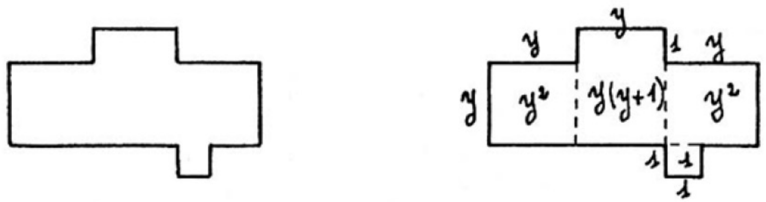
Conclusion

- Articulation sémantique/syntaxe plus explicite dans l'énoncé
- Plus présente dans les travaux des élèves
- Des difficultés à lier expressions algébriques et représentations géométriques

Enoncé 3 – en Seconde

Exercice 5

L'aire de cette figure peut être exprimée à l'aide de différentes formules.



Par exemple, ce découpage permet de trouver que l'aire est égale à : $y^2 + y^2 + y(y+1) + 1$.
Les quatre formules qui suivent correspondent à quatre façons différentes de calculer l'aire de la figure. Trouver ces façons.

1. $2y^2 + y + 1 + y^2$
2. $y^2 + (y+1)2y + 1 - y$
3. $3y^2 + y + 1$
4. $3y(y+2) - (y + y + 2y + y - 1)$

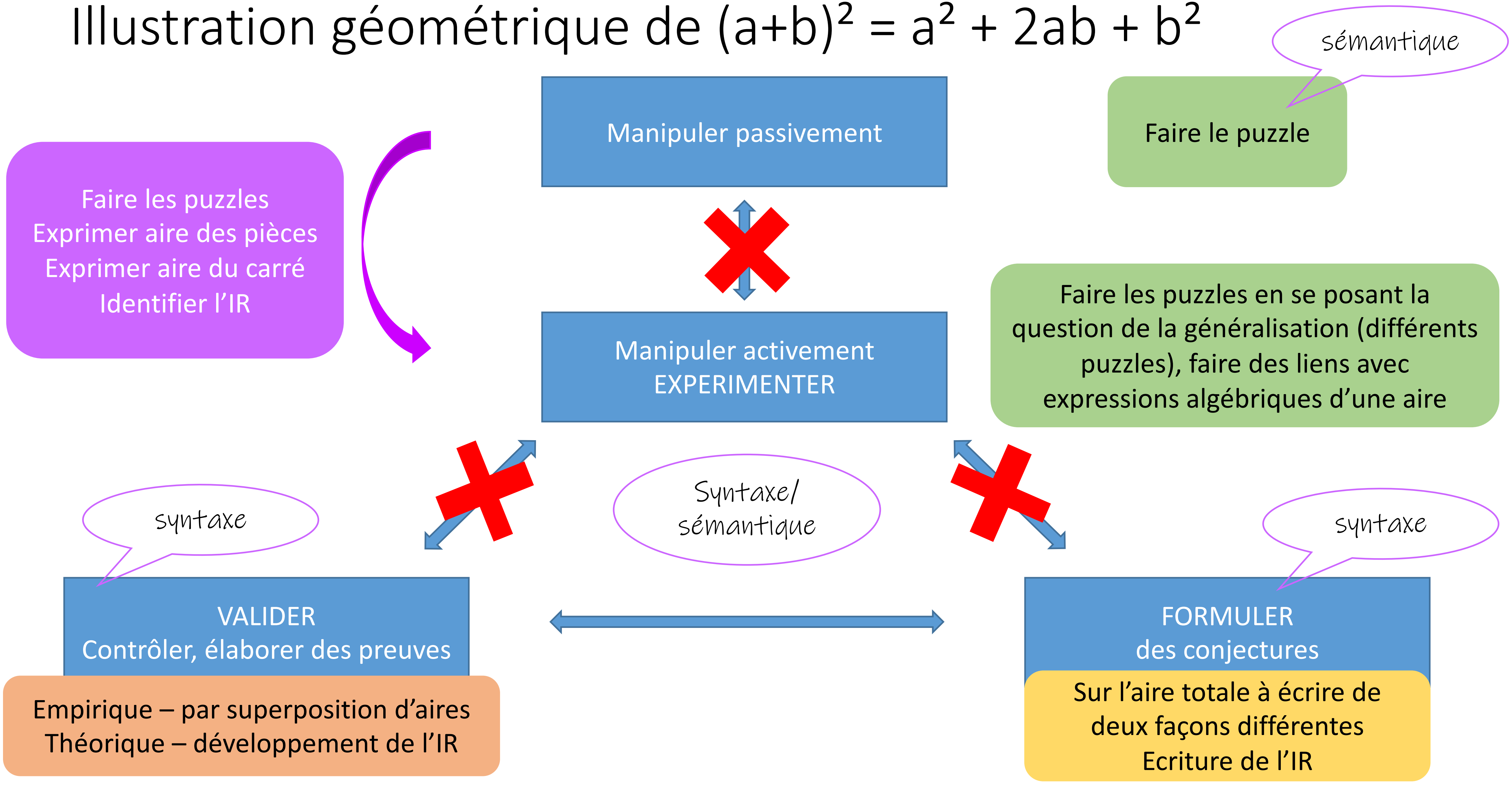
Montrer à l'aide de calculs que ces quatre écritures représentent le même nombre.

Conclusion

- Articulation sémantique/syntaxe plus explicite dans l'énoncé
- Plus présente dans les travaux des élèves
- Des difficultés à lier expressions algébriques et représentations géométriques

Exemple 1

Illustration géométrique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Exemple 1

Conclusion

- Importance du milieu qui va permettre aux élèves se s'engager dans la situation, dans un travail sur les objets et dans un processus de preuve.

- Des difficultés qu'on a tendance à sous-estimer, liées à l'articulation syntaxe/sémantique.

- Une activité qui permet aux élèves de construire une démonstration du programme.

Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Raisonner, prouver, démontrer

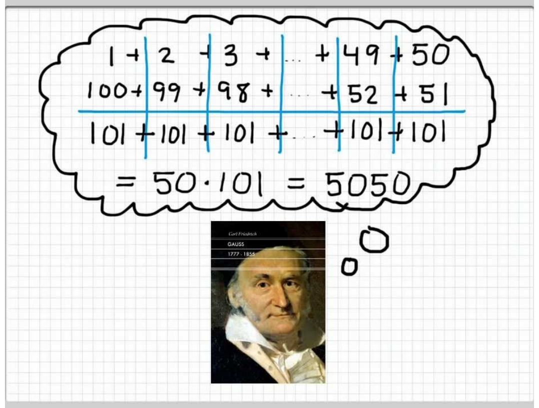
1

2

Exemple 1

3

Exemple 2



4

Conclusion

Exemple 2

Trouver le plus rapidement possible la somme de p nombres entiers naturels consécutifs commençant à n.

(D'après Barallobres et Giroux, 2006)

Jeu n°1

Trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres consécutifs.

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 3 : 84

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 4 : 649

Des procédures possibles
et
ce que l'on peut en retirer

Faire des regroupements en utilisant les compléments à 10

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

16+24 = 40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

il reste 15 et 20 ; **4×40 + (20 + 15) = 160 + 35**

16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

16 + 24 =40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

il reste 20 et 25 ; **4×40 + (20 + 25) = 160 + 45**

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

21 + 29 = 50 ; 22 + 28 = 50 ; 23 + 27 = 50 ; 24 + 26 = 50

il reste 25 et 30 ; **4×50 + (25 + 30) = 200+ 55**

Peut favoriser le repérage de ce que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série ; peut être un obstacle pour reconnaître le rôle particulier de 45.

Utiliser la décomposition décimale

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

10 +7,10+ 8,10+9, 20, 20+1, 20 + 2, 20 + 3, 20+4, 20 +5, 20 + 6

$3\times10 + 7\times20 + (7 + 8 + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 170 + 45$

Ceci met en évidence le rôle particulier de 45 et fait apparaître la forme générale « multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45 ».

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29

20, 20+1, 20+2, 20+3, 20+4, 20+5, 20+6, 20+7, 20+8, 20+9

$10\times20 + (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 10\times20 + 45$

Commencer par une dizaine entière peut favoriser l'apparition de cette procédure

Décomposer les nombres
à partir du premier nombre de la série

<u>17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26</u>

17, 17+1, 17+2 ; 17+3 ; 17+4 ; 17+5 ; 17 +6 ; 17 +8 ; 17+9

17 $\times$10 + (1+2+3+4+5+6+7+ 8+9) = 170 + 45

C'est ce qui conduit le plus naturellement à la forme générale

Multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45

Les séries commençant par un multiple de 10 peuvent favoriser dans ce cas l'apparition de l'utilisation de la décomposition à partir du premier nombre.

Regrouper les nombres par paires de sommes égales

<u>17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26</u>

$17 + 26 = 18 + 25 = 19 + 24 = 20 + 23 = 21 + 22 = 43$

$5 \times 43 = 215$

Ou encore, à la manière du jeune Gauss

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

____

4 3, 43, 43,43, 43, 43, 43, 43, 43, 43

$10 \times 43 = 430$; $430 : 2 = 215$

Deux méthodes très rapides

1. Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

17- 18 - 19 - 20 - 21 - **21,5** - 22 - 23 - 24 - 25 - 26

$21,5 \times 10 = 215$

2. Prendre le cinquième nombre de la liste et ajouter 5 à droite

215

Une preuve inattendue

- Un élève de 13 ans qui a proposé la méthode la plus rapide est capable très rapidement de faire le lien entre sa méthode et la méthode la plus générale sur la série qui commence par *15* (résultat *195*)

- « E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « *4* » ajouté, parce que la première méthode est « fois *10* » et après plus *45*.

- Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler : le premier nombre $\times 10 + 45$, dans notre exemple : $15 \times 10 + 45$

- E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».

- Manifestement, les autres élèves ne comprennent pas.

Poser l'addition en colonne (physiquement ou mentalement): une procédure qui peut conduire vers une méthode rapide

- Si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul **montre** que :
- *Le résultat se termine toujours par 5,*
- *On a toujours une retenue de 4,*
- *La somme des chiffres des dizaines est égale au premier nombre de la liste,*
- *Le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre*.

Ceci ne signifie évidemment pas que tout élève qui choisit cette méthode va dégager ces régularités.

Observer des régularités en travaillant sur des cas particuliers afin d'en dégager une forme générale est une compétence heuristique très importante en mathématiques, qui conduit en particulier au langage de l'algèbre. En retour, une fois les formes identifiées, la reconnaissance de forme constitue a son tour un moteur important de l'heuristique, et un outil central dans le travail algébrique.

Quelques caractéristiques de cette situation

La situation a été proposé au collège, (élèves de 12-13 ans).

L'objectif des professeurs (et des chercheurs) est de motiver l'introduction d'une formule pour décrire un programme de calcul.

Il s'agit de permettre aux élèves de donner du sens à l'utilisation des lettres, en amont du travail sur les transformations d'écritures qui sera développé ultérieurement.

Dans la mise en œuvre avec les élèves de telles situations de recherche, il faut considérer des phases

d'**action** (*le jeu*) ;

de **formulation** (*l'explicitation des procédures*);

de **débat** et de **validation** (*justification des procédures*)

avec des allers et retours entre les trois, avant une phase

d' **institutionnalisation** (*ce que l'on a établi, ce que l'on a appris, éventuellement ce qui reste en suspens*)

Le jeu (défi) de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier.

Ceci est un moyen de permettre **la dévolution**

Le fait que certains élèves produisent des réponses rapidement, et que cela se répète (ce n'est pas dû au hasard) favorise la recherche de méthodes.

La **formulation explicite** des méthodes est nécessaire pour un conduire un **débat** sur la **validation** des méthodes.

Ici, il n'est pas question de fournir une preuve algébrique de la validité des méthodes.

La validité des méthodes s'appuie d'une part sur la confiance qu'ont les élèves dans leur procédures de calcul, et d'autre part dans la possibilité de mettre à jour des éléments technologiques (au sens de Chevallard) pour justifier les techniques.

Deux théories sous-jacentes sont mobilisées :

Le système d'écriture des nombres : la numération décimale de position

La construction des entiers via la notion de successeur, addition comme itération du successeur

On peut proposer cette situation à des élèves dès le cycle 3 de l'école primaire ou au tout début du collège.

Soit dans le cadre du calcul réfléchi

Soit sous la forme d'un problème de recherche pour dégager des règles générales, l'objectif n'étant pas d'introduire des lettres.

La validation s'appuie sur les résultats de calcul normalement stabilisés à ce niveau.

On peut utiliser la calculatrice comme moyen de contrôle ; cela permet de voir que c'est beaucoup moins rapide.

Elle peut également être proposée au lycée, où l'outil algébrique est déjà disponible, pour réactiver la relation entre écritures algébriques et programmes de calcul et pour fonder sémantiquement les formules de sommations des entiers dont la preuve est au programme.

On peut encore l'utiliser en début d'université, ainsi qu'en formation des enseignants du primaire et du secondaire.

Vers une généralisation

Déterminer le plus rapidement possible la somme de 8 nombres consécutifs

Série 1 : 25

Série 2 : 41

Série 3 : 50

Déterminer le plus rapidement possible la somme de 11 nombres consécutifs

Série 1 : 14

Série 2 : 23

Série 3 : 40

Déterminer le plus rapidement la somme de 36 nombres consécutifs commençant à 125

$(125 + 160) \times 18 = 285 \times 18 = 5130$

$(125 + 17{,}5) \times 36 = 142{,}5 \times 36$

125×36 + somme des entiers de 1 à 35

Somme des entiers de 1 à 35 : 630

$(10 + 20) \times 10 + 30\times6 + 45\times3 + (1+2+3+4+5)$

$= 300 + 180 + 135 + 15$

$35\times 36/2$ (Gauss) ; 18×35 (valeur médiane)

Une variable didactique qui joue sur les théories sous-jacentes

Dans le cas de 10 nombres consécutifs, les points de vue « décomposition décimale » et « successeur » conduisent au même résultat car toutes les unités de 1 à 9 apparaissent.

Ce n'est plus le cas avec 8, 11, ou 36

C'est à nouveau le cas avec 20, 30 ou 40

Le choix d'une dizaine entière ou non est donc une variable didactique. Qui joue sur les théories sous-jacentes aux méthodes.

La méthode la plus rapide pour 10 nombres consécutifs, prendre le cinquième nombre et mettre 5 à droite ne se généralise pas.

Elle est liée de manière intrinsèque à la signification des chiffres dans l'écriture décimale

La méthode des écarts (médiane) se généralise en prenant en compte la parité. Elle mobilise le point de vue successeur (et prédécesseur).

C'est une méthode générale que l'on utilise par exemple pour montrer que la somme de 3 nombres consécutifs est toujours un multiple de 3, et plus généralement que la somme de *p* nombres consécutifs avec *p* impair est toujours un multiple de *p,* tandis que la somme de p nombre consécutifs avec p pair n'est jamais un multiple de p. C'est un multiple de p/2.

Cette situation met en lumière une distinction importante dans le travail numérique entre des résultats et des méthodes qui sont dépendantes d'un système de numération donnée (par exemple : les critères de divisibilité) et les résultats qui sont liés de manière intrinsèque aux nombres, indépendamment du système d'écriture (être divisible par 3, être un nombre premier)

Vers une formule littérale

Décrire une méthode

permettant de déterminer très rapidement

la somme de *p* nombres consécutifs

commençant à *n.*

Vous appuierez vos justifications sur les méthodes gé

nérales que vous avez identifiés lors des phases de jeu.   .

Soit n et p deux entiers

Notons $S(n, p)$ la somme de p nombres consécutifs commençant à n

1. $S(n, p) = [n + (n+p-1)] \times p/2$ (méthodes des paires (avec p pair), ou Gauss)
2. $S(n, p) = [n+(p-1)/2] \times p$ (médiane)
3. $S(n, p) = n \times p + S(0, p)$ (successeur)

   $S(0, p) = (p-1) \times p/2$

   $S(n, p) = n \times p + (p-1) \times p/2$

Remarque 1: l'un des entiers p ou p-*1* est pair

Remarque 2 : $S(1, p) = p\ (p+1)/2$

Dans de nombreux problèmes, l'utilisation des lettres représente une économie, mais n'est pas indispensable.

Les méthodes de types numériques sont souvent très performantes, comme on l'a vu avec le cas $p = 10$.

Ce sont celles que l'on peut attendre des élèves de l'école primaire.

Au collège, il faut éviter de « forcer » les élèves à utiliser des lettres lorsqu'ils résolvent les problèmes par des méthodes arithmétiques. Sinon, l'usage des lettres s'installe comme un effet du contrat didactique, et la rencontre avec la connaissance ne se fait pas. Cette situation, avec le jeu sur la variable didactique « nombre de termes » vise à permettre cette rencontre (une première rencontre qui devra être suivi d'autres, et de retour au fur et à mesure que les techniques de calcul algébrique se développent.

Sur l'utilisation des lettres

L'utilisation des lettres permet ici :

1. D'exprimer les méthodes générales en traduisant les actions par des opérations mêlant le numérique et le littéral ; les lettres sont des marques places.
2. De montrer que deux formules différentes peuvent correspondre à deux programmes de calculs valides, donc conduisant toujours aux même résultats.
3. De permettre de créer une situation de référence pour mettre en relation l'équivalence de deux expressions littérales via les règles de transformations des écritures (aspect syntaxiques) et l'équivalence des programmes de calcul associés (aspect sémantique). Notons que cette situation ne suffit pas pour établir la généralité de cette mise en relation.

Relecture à la lumière de la typologie de Preuves de Balachef (1988)

Balacheff (1988) propose une classification en « niveaux et types de preuves » ayant une place privilégiée dans la genèse cognitive de la démonstration. Cette classification permet d’analyser les productions d’élèves écrites ou orales.

Balachef, N. (1988) Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Thèse de l’université Grenoble

- ***Empirisme naïf*** (vérification sur quelques cas),
- ***Expérience cruciale*** (mise à l'épreuve sur un exemple pour lequel on ne se fait pas de cadeau),
- ***Exemple générique*** (explicitation des raisons de la validité sur un objet présent non pour lui-même, mais comme représentant d'une classe)
- ***Expérience mentale*** (invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un cas particulier)

- L’auteur classe les trois premier types dans les preuves pragmatiques, la quatrième marquant l’entrée dans les preuves intellectuelles, dont la démonstration est en quelque sorte la forme achevée.
- L’auteur introduit la notion de *Calcul sur les énoncés* pour désigner des preuves d’élèves qui vont au-delà de l’expérience mentale mais ne peuvent pas être reconnues comme des démonstrations.
- Les preuves du type « exemple générique » permettent de justifier de la généralité d’une assertion sur un cas particulier. Elles sont à l’interface entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles.

- Dans les phases de jeu, des régularités (des invariants) apparaissent. Lorsqu’elles sont reconnues, elles permettent de développer des méthodes pour faire très rapidement les calculs. Il s’agit de méthodes empiriques engagées dans l’action du jeu.
- La demande d’explicitation et de justification des méthodes permet d’identifier des propriétés des listes d’entiers consécutifs qui vont pouvoir être engagées dans des preuves de types exemples génériques.

EA2311 : attends … (il fait le calcul et compare avec le résultat déjà connu)
Oui! Ça marche ! On a une formule!
(Le contrôle est encore empirique. L’élève EA2311 a besoin de faire les calculs pour vérifier la validité de la formule)
EA2315 : voilà la stratégie :

x10=

+45

(Le groupe prouve avec quelques exemples en notant le temps que cela leur prend pour faire les calculs : 7 secs, 8 secs, etc.)

Extrait thèse Barallobres

EA2311 : 45 est la différence additionnée entre le premier nombre et les autres…je ne sais pas comment le dire … Mettons un exemple …

25 26 27 28 29 30 31 32 33 34

EA2312 : entre le 25 et le 26 il y a 1 de différence, donc, on va mettre le 1 au-dessous du 26

EA2311 : met une flèche

EA2312 écrit :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1\,+ & 2\,+ & 3\,+ & 4\,+ & 5\,+ & 6\,+ & 7\,+ & 8\,+ & 9=45
\end{array}
$$

(les différences entre le premier et les autres nombres)

EA2311 montre le texte au professeur qui l'approuve

Extrait Thèse Barallobres

Exemple 2

Somme de *p* entiers consécutifs commençant à *n*

Trouver le plus rapidement possible la somme de p entiers consécutifs commençant à n

Manipuler passivement

Faire la somme

Manipuler activement
EXPERIMENTER

Faire la somme en cherchant une méthode de calcul très rapide, faire des liens avec des propriétés des nombres entiers

VALIDER
Contrôler, élaborer des preuves

Empirique – par vérification sur des exemples
Théorique – en appui sur théories liées au nombre

FORMULER
des conjectures

Formuler sa/ses méthode(s)

Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Raisonner, prouver, démontrer

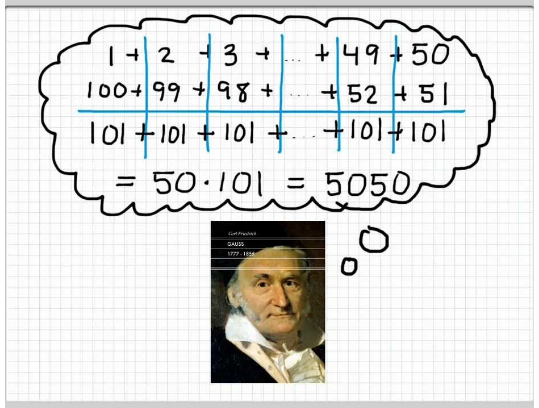
1

2

Exemple 1

3

Exemple 2



4

Conclusion

8ème Journée Itinérante des IREM – 24 Janvier 2020 - Brest

Mathématiques dans le nouveau lycée : défis et perspectives

Démonstrations dans les programmes du lycée : une opportunité pour approfondir les notions en jeu

Merci pour votre attention !

Marie-Line GARDES & Viviane Durand-Guerrier

marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr