Intégration

cours problématisé et analyse numérique

1. Une situation concrète précise...

Vous avez dû remarquer que sur les périphériques ou autoroutes, certains panneaux (et/ou la radio) indiquent le temps de parcours prévisible pour arriver à telle ou telle destination. Vous êtes-vous jamais demandé comment ce temps de parcours était calculé, sa précision, sa fiabilité ? Examinons ensemble la chose...

Peut-on simplement prendre une voiture et voir le temps qu'elle met pour parcourir le parcours concerné ? Non, pas adéquat, car les durées estimées auraient toujours un temps de retard, ce serait en fait « une voiture a mis tant de temps pour aller de ... à ... » et « non le temps que vous devriez mettre est de ... ». De plus ce serait bien difficilement réalisable en pratique.

Mais non, on dispose, le long du parcours, de caméras qui mesurent la vitesse des véhicules juste devant la caméra. Comment évaluer le temps nécessaire ? Une première approche consiste à dire que la vitesse des véhicules entre deux caméras est constante. Dans un premier temps, on considèrera que les caméras sont équiréparties le long du parcours (distance h).

Quel temps faut-il pour parcourir la distance dans un intervalle entre deux caméras si la vitesse des véhicules est constante et égale à v entre ces deux caméras ? Quel temps total faut-il si la vitesse mesurée par la i-ème caméra est v_i ?

2. Formalisation et définition de l'intégrale

Bon, ce n'est pas le tout, mais formalisons un peu l'ensemble. Appelez x la distance parcourue, x_i la position de la i-ème caméra, et $f_h(x)$ l'inverse de la vitesse estimée au point x, avec les caméras espacées de h. Exprimez maintenant le temps total. Faites une figure. Interprétez le temps en termes de surface de rectangles. Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 (c'est à dire si des caméras sont de plus en plus proches les unes des autres ?). Exprimez les choses sur le plan graphique, et en termes d'équation.

On appellera intégrale de f de a à b , et on notera $\int_a^b f(x)\,dx$ la limite du temps obtenu lorsque h tends vers 0. On écrira donc (en notant $h = \frac{b-a}{n}$)) :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\,\tfrac{b-a}{n})}$$

Exprimez en termes de surface la signification graphique de l'intégrale de a à b de f.

On peut dire, de façon générale :
$\int_a^b f(x)dx$ **est aussi l'aire sous la courbe représentative de f, entre $x = a$ et $x = b$.**

3. Approchons (majorons) l'écart entre la valeur limite et la valeur calculée ?

Revenons à la situation d'un nombre fini de caméras. Vous devez maintenant majorer la différence entre cette situation et la limite. Vous pouvez pour cela (d'abord graphiquement, puis par une mise en équation) utiliser le maximum de $|f'(x)|$ dans $[a..b]$; éventuellement vous affinerez en travaillant intervalle par intervalle.

Toujours en ayant n caméras, peut-on mieux approcher la vraie vitesse et obtenir ainsi une meilleure approximation de la limite ? Pour cela essayez de mieux approcher l'inverse de la vitesse réelle entre deux caméras (cherchez une fonction simple, mais continue), et revenez ensuite avec le même genre de raisonnement à la limite lorsque h tend vers 0. Bien sûr faites d'abord une illustration graphique. Pensez surface de trapèze. Par ailleurs, sauriez-vous majorer l'écart avec la « vraie » valeur (pensez à notre ami Taylor, avec reste en c) ?

Soyons maintenant un peu plus réaliste et considérons que les caméras ne sont pas équidistantes. Modélisez les choses proprement et exprimez une valeur approchée de l'intégrale, d'abord à l'aide de « rectangles », puis à l'aide de trapèzes...

4. Quelques propriétés fondamentales

Travaillons maintenant sur un plan plus abstrait. Soit f et g deux fonctions « intégrables », que penser de l'intégrale de $f+g$? Que peut-on dire de $\int_a^b \alpha f(x)\,dx$ pour un réel α fixé et constant ? Au passage, on dira, dans le langage de l'algèbre, que l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle fermé donné possède une structure d'espace vectoriel, et que l'intégrale agit comme une application linéaire sur cet espace. Peut-on dire de même pour l'intégrale de $f * g$? Démontrez que $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

Revenons à notre histoire de voiture, et changeons de point de vue : mettons-nous à la place de l'automobiliste qui, connaissant son profil probable de vitesse en fonction du temps (c'est-à-dire $v(t)$ pour tout temps t), désire savoir la distance parcourue au temps t, connaître sa vitesse moyenne... ceci pour tout temps t de 0 (temps de départ !) à t_{max} (temps d'arrivée !). Justement ce que font certains ordinateurs de bord des voitures récentes.

Considérez d'abord que la vitesse est constante par morceaux (morceaux de longueur uniforme en t), et donnez alors l'expression, en l'extrémité d'un morceau quelconque, de la distance parcourue et de la vitesse moyenne depuis le départ ; à vous de choisir les noms... je vous suggère cependant de prendre, par exemple, des morceaux de longueur δ_t, des extrémités de morceaux $t_i = i\,\delta_t$). Passez maintenant à la limite lorsque δ_t tend vers 0, et démontrer que l'on a, si $\ell(T)$ est la distance parcourue au temps T, $\ell(T) = \int_0^T \ell'(t)dt$. Attention ! Quelle hypothèse sur la fonction ℓ' avez-vous, implicitement ou explicitement, utilisée pour démontrer ce résultat ?

Pour toute fonction f intégrable de a à b, on appelle primitive de f (et on note souvent F), toute fonction F telle que $F' = f$.

Remarquez que si F est une primitive de f, pour toute constante α la fonction G définie par $\forall x \in [a..b]\ ,\ \ G(x) = F(x) + \alpha$ est aussi une primitive de f ; réciproquement, démontrez que si F et H sont deux primitives d'une même fonction f, il existe une constante α telle que on a $H = F + \alpha$. **On dira que les primitives de f sont définies à une constante près**.

Démontrez maintenant le résultat fondamental suivant :

> **Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a..b]$, soit c un point de $[a..b]$, et soit la fonction F de $[a..b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [a..b]\ ,\ \ F(x) = \int_c^x f(t)dt$.**
> **Alors** $F' = f$ (c'est-à-dire : $\forall x \in [a..b]\ ,\ \ F'(x) = f(x)$).
> **De plus** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Remarquez l'importance et l'intérêt de ce théorème : en cherchant une primitive de f (pas toujours facile, mais tout de même possible pour un nombre non négligeable de fonctions f), on dispose facilement de la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ pour tout a et b.

5. Dernier retour sur notre histoire de voiture Imaginons qu'il y ait un petit problème sur l'ordinateur de bord : il dispose bien de la vitesse, mais pas de la distance parcourue (il dispose aussi du temps). Peu vraisemblable, cette histoire, me direz-vous... mais dans plusieurs cas réels, on a une situation qui correspond à cela. Ecrivez la formule mathématique permettant d'avoir d'une part la distance parcourue au temps t, d'autre part la vitesse moyenne en tout temps t. Dites comment vous feriez pour avoir une (bonne) approximation numérique de ces quantités.

Reprenons maintenant la préoccupation de notre automobiliste désireux de connaître, d'abord à l'arrivée au temps T, puis en tout point t, sa vitesse moyenne depuis le départ. Faites un graphe et visualisez que la vitesse moyenne est précisément telle que l'aire du rectangle de largeur T et de hauteur la vitesse moyenne est la même que l'aire de la surface sous la courbe représentative de la vitesse. Soit maintenant $v_{moy}(t)$ la vitesse moyenne depuis le départ. Exprimez la propriété précédente en tout point t. Enfin, donnez deux façons différentes que vous pourriez utiliser pour calculer la vitesse moyenne en tout temps t si vous deviez programmer l'ordinateur de bord.

6. Exercices

1. Calculez ainsi $\int_0^2 x\,dx$. Vérifiez que vous avez bien ainsi l'aire sous la courbe $y = x$ entre $x = 0$ et $x = 2$, qu'ici vous pouvez calculer directement (c'est l'aire d'un triangle ! !).

2. Calculez $\int_0^2 3\,x^2 dx$. Quelle est la longueur d'un coté du carré qui a la même aire que celle de la surface sous la courbe de la parabole $y = 3\,x^2$ pour x compris entre 0 et 2 ?

Donnez l'interprétation graphique du résultat (donnez, sur le graphique, plusieurs surfaces qui ont la même aire).

Deux autres propriétés importantes :

On admettra les deux théorèmes importants suivants :
1. **Toute fonction intégrable sur un intervalle** $[a..b]$ **est bornée.**
2. **Toute fonction continue sur un intervalle** $[a..b]$ **est intégrable.**

Petites réflexions :
a. le premier théorème est plutôt une mauvaise nouvelle (dites pourquoi !), alors que le second théorème est vraiment une bonne nouvelle (dites encore pourquoi !).
b. Que pensez vous de cette affirmation « Toute fonction continue est intégrable, toute fonction intégrable est bornée ; donc toute fonction continue est bornée » ?

Analyse numérique : Méthodes d'intégration numérique

Expérimentation, majorations d'erreurs et vitesses de convergence

1. Position du problème

Dans certaines situations, on a besoin de calculer la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ pour une fonction f connue. Cependant, on sait calculer $f(x)$ pour tout x dans $[a\,..\,b]$) mais on ne sait pas calculer une forme analytique d'une primitive de f.

Comme pour la dérivée, nous devons donc trouver une méthode qui donne une valeur approchée de l'intégrale, et donner une majoration de l' "erreur", c'est à dire $\left|I - \int_a^b f(x)\,dx\right|$ où I est la valeur approchée calculée.

Pour un entier n fixé, on notera par la suite $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i\,h$.

2. Méthode des rectangles

Il nous faut donc d'abord trouver une formule donnant une valeur approchée de l'intégrale. Pour cela, comme pour la dérivée (et comme souvent pour trouver une valeur approchée), utilisons la définition de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\,\tfrac{b-a}{n})$$

ceci nous pousse à penser que, pour n fixé, la quantité $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\,\frac{b-a}{n})$ est une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$; de plus cette approximation devrait être d'autant plus précise que n est grand.

2.1 Faites un graphe qui vous permette de comparer qualitativement la différence entre la valeur exacte de l'intégrale et la valeur calculée. Cette méthode est-elle exacte pour une fonction constante ($\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f(x) = \alpha$) ? Pour une fonction affine ($\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f(x) = \alpha\,x + \beta$). Que pensez-vous, a priori, de l'ordre de la méthode ?

2.2 Prenez maintenant une fonction f particulière, dont vous connaissez une primitive (vous pouvez prendre par exemple $\int_0^{\pi/2} \sin x\ dx$... mais prenez aussi au moins une autre fonction !), et intégrez-la analytiquement, puis numériquement pour différentes valeurs de n. Faites ces calculs sur Excel, seulement, disons, pour $n = 9$, $n = 27$, $n = 81$ et $n = 243$, puis faites-les sur matlab (vous êtes alors moins limité en valeur de $n!$).

Tracez l'évolution de l'erreur en fonction de n (à vous maintenant de choisir la gamme de variation de n, le type d'échelle...). Quelle est (expérimentalement !) l'ordre de la méthode pour cette fonction ?

Changez de fonction (ou d'intervalle d'intégration), en prenant maintenant une fonction croissante puis décroissante. Que constatez-vous concernant l'ordre de la méthode ? Cela est-il surprenant (interprétation graphique) ?

2.3 Après cette phase expérimentale, majorons l'erreur d'intégration. Faites donc un dévelop-pement limité (reste de Taylor) à l'ordre 1, de f en $a+ih$, et déduisez-en une majoration de $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f(x_i)\right|$ (utilisez M_1, majorant de la valeur absolue de la dérivée de f sur $[a\,..\,b]$). Majorez maintenant l'erreur de méthode $\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\,\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\,h)\right|$.

Est-ce cohérent avec l'approche expérimentale ci-dessus ?

3. Méthode des rectangles centrés

3.1 Essayons d'améliorer la méthode précédente. Comme en 2.3, examinons ce qui se passe dans l'intervalle $[x_i\,..\,x_{i+1}]$, et comme en 2.1 faisons un graphe pour chercher un formule simple qui approche mieux $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$. Au lieu d'approcher f sur $[x_i\,..\,x_{i+1}]$ par $f(x_i)$, pensez-vous qu'il serait plus astucieux d'approcher f sur $[x_i\,..\,x_{i+1}]$ par $f(x_i + \frac{h}{2})$? Cette méthode est-t-elle exacte sur les constantes ? Sur les polynômes de degré 1 ? Que pensez-vous, a priori, de l'ordre de cette méthode ?

3.2 Donnez la formule d'intégration correspondante. Pour majorer l'erreur de méthode, faites maintenant le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $x_i + h$, et et déduisez-en une majoration de $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\,f(x_i + \frac{h}{2})\right|$ (utilisez M_2, majorant de la valeur absolue de la dérivée seconde de f sur $[a\,..\,b]$).

Majorez maintenant l'erreur de méthode $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n})\right|$. Est-ce cohérent avec ce que vous aviez prévu en 3.1 ? Remarquez que cette méthode ne demande pas plus de calculs que la première méthode : en réfléchisssant un peu, on y gagne en précision, sans même le "payer" en temps de calcul !

3.3 Comparez par un graphique sous matlab l'évolution des erreurs par les deux méthodes ci-dessus, et dites si l'ordre expérimental des méthodes correspond à celui que vous avez trouvé théoriquement.

Vous ferez cela d'une part avec des réels "longs" (inutile de le préciser à Matlab, c'est le choix par défaut), puis avec des réels "courts" (instruction `short` suivie des variables que vous voulez stocker sous moins de chiffres significatifs).

4. Méthode des trapèzes

4.1 Une autre façon d'améliorer la précision de la formule d'intégration numérique est d'approcher f, dans l'intervalle $[x_i\,..\,x_{i+1}]$ non plus par une constante mais par le segment passant par $(x_i\,, f(x_i))$ et $(x_{i+1}\,, f(x_{i+1}))$. Faites un graphique permettant de visualiser ce qui se passe, et dites ce que vous en pensez ("trapèzes" au lieu de "rectangles", exact sur les polynômes de degré 1 ? sur les polynômes de degré 2 ?, ordre de convergence ?).

4.2 En utilisant la formule de la surface d'un trapèze, ou bien en déterminant (expression locale autour de x_i) l'équation de la droite passant par $(x_i\,, f(x_i))$ $(x_{i+1}\,, f(x_{i+1}))$, puis en l'intégrant entre x_i et x_{i+1}, donnez maintenant une nouvelle formule d'intégration approchée pour $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ puis pour $\int_a^b f(x)\,dx$. N'oubliez pas de rapprocher les deux éléments en $f(x_i)$... si besoin, commencez par écrire la formule de façon extensive (avec $f(x_1)$, $f(x_2$, $f(x_3)$, ... $f(x_n)$, et voyez que la plupart des termes sont présents deux fois et peuvent être regropupés.

4.3 Calcul d'erreur : Le calcul d'erreur est maintenant un peu plus délicat puisqu'il faut d'abord approcher f sur $[x_i\,..\,x_{i+1}]$ par le segment passant par $(x_i\,, f(x_i))$ et $(x_{i+1}\,, f(x_{i+1}))$. Pour cela, écrivez d'abord le développement de Taylor de $f(x)$, au voisinage de x_i et à l'ordre 2. Comme celui-ci dépend explicitement de $f'(x_i)$, il faut remplacer $f'(x_i)$ par une approximation ne dépendant que de $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$... Cela ne vous rappelle rien ? Ecrivez donc le développement de Taylor de $f(x_{i+1})$, à l'ordre

2 et au voisinage de x_i, et déduisez-en l'approximation cherchée de $f'(x_i)$, et reportez-la dans r. Vous devez maintenant avoir une formule de Taylor modifiée du type
$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} + \frac{(x-x_i)^2}{2} f''(c_1) - \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} f''(c_2)$ où c_1 est compris entre x_i et x, c_2 entre x_i et x_{i+1}. Déduisez-en maintenant la majoration d'erreur suivante : $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right| \leq \frac{2M_2}{3}h^3$, puis la majoration suivante
$\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\,\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\,h)\right)\right| \leq \frac{2M_2}{3}\,(b-a)\,h^2$.

4.4 Vérification numérique

Ajoutez au graphe obtenu en 3. l'évolution de l'erreur par la méthode des trapèzes. Commentez le graphe ainsi obtenu ? La majoration d'erreur obtenue en 4.3 se révèle-t-elle exacte ?

A noter la majration d'erreur suivante peut être obtenue, moyennant un calcul un peu plus délicat : $\left|\int_a^b f(x)\,dx - h\,\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\,h)\right)\right| \leq \frac{M_2}{12}\,(b-a)\,h^2$.

Est-elle plus fine ou non que la majoration que vous avez obtenue ? Son ordre est-il le même ? Votre expérimentation satisfait-elle cette nouvelle majoration d'erreur ?

Là encore, faites les calculs en precision longue et en précision courte, et comparez.

5. Autres méthodes

Au lieu d'approcher f sur $[x_i \mathinner{..} x_{i+1}]$ par un segment de droite, on peut approcher f sur $[x_i \mathinner{..} x_{i+2}]$ par un polynôme de degré 2, intégrer ce polynôme entre x_i et x_{i+1}, et obtenir ainsi une formule d'intégration entre x_i et x_{i+1} approchée, puis en sommant une formule d'intégration entre a et b approchée ("formule de Simpson"). Comme polynôme approchant f sur $[x_i \mathinner{..} x_{i+2}]$, on prend souvent le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 interpolant les trois points $(x_i\,, f(x_i))$, $(x_{i+1}\,, f(x_{i+1}))$ et $(x_{i+2}\,, f(x_{i+2}))$. Qu'en pensez-vous (exact sur quels polynômes, ordre de convergence ?...). Auriez-vous une autre idée de polynôme approchant f sur $[x_i \mathinner{..} x_{i+2}]$? Que pensez-vous de l'approximation alors obtenue ?

On peut encore faire plus, en prenant, un polynôme de degré 4 approchant f sur $[x_i \mathinner{..} x_{i+4}]$ ("formule de Villarceau"), voire même de degré 6 ("formule de Hardy") , ou même de degré $2n$ ("formules de Newton-Cotes") sur les intervalles appropriés. En vous servant des coefficients présentés sur le polycopiés (ou que vous pouvez trouver sur internet !), programmez les formules correspondantes (Villarceau et Hardy), joignez les courbes d'erreurs ainsi obtenues aux graphes précédents, et interprétez l'évolution des erreurs, les ordres des méthodes...

6. Quelques commentaires

Ce que vous avez fait ici est significatif de plusieurs démarches et phénomènes classiques :

- Pour calculer quelquechose que l'on ne sait calculer exactement, on en calcule une valeur approchée. Pour cela on approche le problème par un problème plus simple, dont la solution "devrait" être proche de la solution exacte. Ceci n'est aps seulement vrai en "analyse numérique", mais à peu près dans tous les domaines de l'ingénieur.
- Il y a presque toujours plusieurs façons d'approcher la solution, et les résultats obtenus ne sont pas équivalents. Il ne faut dons pas s'arrêter à la première méthode envisagée. On peut souvent "affiner" l'approximation pour obtenir des résultats meilleurs.
- Pour approcher un phénomène physique, pensez d'abord au problème lui-même, et voyez s'il n'existe pas des modèles plus simples, s'il n'y a pas des moyens d'approcher le phénomène localement, qui à faire plusieurs approximations locales (comme nous avons fait, pour l'intégration, une approximation locale de f par un segment, puis cette même approximation locale en différents points.
- Pour approcher une fonction localement, il est souvent pratique d'utiliser les polynômes (ils s'additionnent, se soustraient, s'intègrent, se dérivent... bien). En général (mais ce n'est pas toujours vrai), plus le degré est élevé, meilleure sera l'approximation.
- Pour majorer l'erreur de méthode, on utilise souvent le développement de Taylor de la fonction...
- ... Nous verrons lors des prochaines séances une autre méthode, très importante aussi, pour approcher la solution d'un problème. Cela consistera à faire des "itérations"... Patience, on y est presque !

7. A l'issue de ce travail, vous devez...

Avoir pris un peu de recul par rapport à la notion d'intégration vue l'an dernier.

Savoir parfaitement interpréter des courbes en coordonnées logarithmiques ou semi-logarithmiques.

Avoir parfaitement assimilé la notion de méthode approchée, d'erreur de méthode, d'erreur d'arrondi et leurs variations respectives.

Avoir bien intégré que plusieurs méthodes différentes peuvent permettre de résoudre un même problème... et qu'elles ne sont souvent pas équivalentes, qu'elles peuvent donner des résultats différents.

Avoir compris la notion d'ordre d'une erreur,

Savoir utiliser le développement de Taylor pour majorer une erreur de méthode.

...Avoir de "bonnes" réactions face à un problème que vous devez approcher pour trouver une solution approchée, et majorer l'erreur de méthode.

Fin du cours problématisé.

Bien sûr il faut aussi des exercices en tous genres...

Il faut des exercices d'application immédiate du cours, mais aussi des exercices à controverse.

On propose en particulier les exercices à controverses suivant :

Soit $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,dt$. Calculer $F'(x)$.

Soit $F(x) = \int_0^{x} f(x+t)\,dt$. Calculer $F'(x)$.

Différence entre intégrale et primitive :

« *Il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de primitive* » : soit la fonction f définie par $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$. Montrer qu'elle est intégrable sur $[-1..1]$, et qu'elle n'admet pas de primitive sur $[-1..1]$.

« *Il existe des fonctions qui admettent une primitive et qui ne sont pas intégrables* » : Montrez que la fonction F : $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(0) = 0$ et $F(x) = x^2 \sin 1/x^2$ si x est différent de 0. Elle est dérivable, sa dérivée étant la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2\,x\,\sin 1/x^2 - 2/x \cos 1/x^2$ si x est différent de 0.Par construction, f est primitivable sur $\mathbb{R}$. Cependant f n'est intégrable sur aucun intervalle $[a, b]$ avec $a < 0 < b$, car f n'est pas bornée au voisinage de 0 (voir théorème ci-dessus).

Réflexions entre nous : Peut-on aller plus loin dans l'analyse numérique et le calcul numérique de l'intégrale, voire dans la majoration d'erreur ?

Peut-on ensuite compliquer le problème en examinant l'évolution de la vitesse mesurée par une même caméra pour « prédire » la vitesse au droit de cette caméra ?

J'aime bien, par souci de réalisme vis-à-vis de la contextualisation, la question suivante... la met-on quelque part ? *Peut-on aller maintenant vers la notion d'interpolation : une quantité mesurée point par point, et l'on veut retrouver une bonne approximation de la fonction, qui soit une fois, deux fois... dérivable ?*

Quel dommage de ne pas faire en même temps l'analyse et l'analyse numérique ! ici, vraiment, c'est très, très dommage de ne pas faire l'intégration numérique, qui de plus, j'en suis sûr, aiderait vraiment les étudiants à comprendre l'intégration. Il me semble que c'est bien pareil pour plein d'autres domaines. Pourrait-on envisager des programmes qui nous permettent de faire en même temps des choses qui sont proches, de façon à permettre de plus aux étudiants une concrétisation informatique ?

Quoi sur application linéaire, et/ou sur espaces vectoriels ? (en termes de « visuel quotidien », non en termes d'outil pour résoudre un problème mathématique)

Idée de thème appliqué mettant en place un EV de dimension « assez grande » (? ?) :

n articles dans un magasin (chacun repéré par son numéro), prix d'achat a_i, prix de vente v_i, nombre d'exemplaires de l'article i : n_i. Valeur à l'achat du stock, valeur à la vente...

On peut faire une application qui au nombre d'exemplaires de chaque produit associe le prix d'achat total de ce produit, le prix de vente total du produit ; le bénéfice par produit, le bénéfice total. On peut ajouter de la perte (péremption, vol...). On a ainsi des applications et des matrices à n colonnes et quelques lignes... Mais bon, on devrait pouvoir trouver mieux !