# ANALYSE COMBINATOIRE

Denis Gardes IREM de Dijon

Le but de l'analyse combinatoire est de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

## Quelques éléments historiques

Depuis la nuit des temps, les hommes ont voulu compter (leurs objets, leurs animaux, etc...). Les premières traces de dénombrement apparaissent sur un os d'animal (par exemple : os d'Ishango 20 000 ans avant Jésus-Christ) des encoches montrant ainsi que les hommes comptaient.

Cette branche des Mathématiques s'est développée très tôt :

Hipparque, mathématicien et astronome grec ($2^e$ siècle avant JC) a affirmé qu'il y avait 103 049 propositions affirmatives composées à partir de 10 propositions élémentaires. Or ce nombre correspond au nombre de façons d'insérer des parenthèses dans une suite de 10 symboles !

Le mathématicien indien Bhaskara (1115-1185) a déterminé les coefficients binomiaux (nombre de choix de *p* éléments parmi *n*). Gersonide (1288-13344) a écrit le rapport entre le nombre d'arrangements et le nombre de permutations ($A_n^p = p\,!\ C_n^p$).

Cardan (1501-1576) démontre que le nombre de parties d'un ensemble de *n* éléments est $2^n$.

Peu de temps après, Blaise Pascal (1623-1662) et Pierre de Fermat (1601-1665) en fondant le calcul des probabilités clarifient les notions de permutations, arrangements et combinaisons. Pascal détermine, à l'aide de son triangle, les coefficients binomiaux.

Dans son ouvrage posthume Ars Conjectandi (1713) (l'art de conjecturer), le mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705) définit la combinatoire comme *« l'art d'énumérer toutes les possibilités, de combiner, de mélanger entre eux un nombre donné d'objets de sorte qu'aucun groupement formé avec ces objets ne soit omis ».*

## Pourquoi enseigner l'analyse combinatoire ?

Comme on vient de le voir, dénombrer a toujours été un problème important pour les hommes. On peut donc difficilement ne pas l'aborder.

D'autre part, les problèmes de dénombrement se rencontrent dans beaucoup de domaines hors des mathématiques :

- en informatique avec la notion de complexité d'un programme,

- en biologie (génétique, problèmes de diffusion endémique, etc...)
- en chimie (cristallographie, structure des molécules)
- en géographie humaine (dénombrement de populations)
- en théorie des jeux de hasard

En mathématiques, l'analyse combinatoire a des implications dans le domaine des probabilités, de l'arithmétique, de la théorie des graphes , etc….

Grâce à l'analyse combinatoire, on peut comprendre que des phénomènes *a priori* très proches peuvent avoir des comportements asymptotiques très différents.

**Savoirs de base nécessaires**

Très peu de savoirs sont nécessaires pour commencer à résoudre des problèmes de dénombrement.

Dans un premier temps, on peut proposer des problèmes sans connaissances préalables si ce n'est d'avoir une certaine rigueur dans la démarche.

Ensuite, des notions simples de la théorie des ensembles peuvent s'avérer utiles : partie d'un ensemble, union ou intersection de deux ensembles, ensemble produit, cardinal d'un ensemble.

Puis quelques dénombrements classiques permettent de modéliser rapidement des situations : *p*-liste, permutation, combinaison, arrangement.

Enfin, dans ces savoirs de base, nous pouvons nous arrêter aux notions de partition et de combinaisons à répétition.

**Qu'apporte l'enseignement de l'analyse combinatoire ?**

Le dénombrement nécessite d'effectuer une démarche rigoureuse : ne pas compter deux fois des objets et ne pas en oublier. Il impose de déterminer un ou plusieurs paramètres qui guideront cette démarche. Par exemple, dans l'exemple n°4 ci-dessous , repérer que les triangles ont soit « la tête en haut » soit « la tête en bas » et repérer aussi qu'ils sont de taille différente ( de côté une unité à dix unités).

La résolution de nombreux problèmes d'analyse combinatoire peut se faire en présence de très peu de savoirs particuliers. L'exemple précédent illustre bien cette absence de savoirs spécifiques.

L'analyse combinatoire est un champ privilégié pour développer différents types de raisonnement :

- raisonnement par disjonction de cas,

- raisonnement par l’absurde,
- raisonnement par récurrence,
- raisonnement par analyse-synthèse.

Nous les mettrons en évidence dans les différents exemples proposés ci-dessous.

De plus, dans de nombreuses situations, une démarche algorithmique est pertinente.

**Principales démarches de dénombrement**

Elles reposent sur quelques principes ou méthodes :

- principe additif (cardinal d’une union disjointe ou non)
- principe multiplicatif (cardinal d’un ensemble produit)
- principe des tiroirs (ou principe de Dirichlet)
- passage au complémentaire
- par encadrement

Ces principes ou méthodes ne nécessitent pas *a priori* une institutionnalisation initiale. Ils peuvent être utilisés de manière « naturelle » par les élèves.

**Classes de problèmes**

Nous distinguons plusieurs classes de problèmes selon les outils utilisés.

- Classe 1
  Ce sont des problèmes de dénombrement qui ne nécessitent aucun outil particulier ; Ce dénombrement se fait « à la main », sans formule de dénombrement.
- Classe 2
  Ici les situations de dénombrement se modélisent par les outils classiques (combinaisons, arrangements, permutations) et ces derniers se révèlent des outils efficaces de résolution.
- Classe 3
  Les suites permettent de modéliser un grand nombre de situations de dénombrement.
- Classe 4
  De même la théorie des graphes propose des outils pertinents de dénombrement.
  (nous ne donnerons aucun exemple de cette classe, voir l’atelier sur les graphes)

**Conclusion**

Laissons Souleymane Barry conclure cette réflexion sur l’enseignement de la combinatoire. Dans le résumé de sa thèse intitulée « ANALYSE DES RESSOURCES MISES À CONTRIBUTION PAR

ENSEIGNANT ET CHERCHEUR DANS L'ÉLABORATION DE SCÉNARIOS D'ENSEIGNEMENT EN DÉNOMBREMENT VISANT LE DÉVELOPPEMENT DE LA MODÉLISATION EN SECONDAIRE » , il écrit :

« La combinatoire élémentaire ou le dénombrement évoque pour beaucoup d'élèves de nombreuses expériences négatives, lorsqu'elle est un objet explicite d'enseignement, l'accent étant souvent mis dans cet enseignement sur le recours à des formules de dénombrement que les élèves ne peuvent rattacher à des modèles de situations. …. Plusieurs études soulignent d'une part non seulement des caractéristiques intéressantes des problèmes combinatoires, soit le fait qu'ils n'exigent presque aucun prérequis notionnel de la part des élèves et qu'ils sont très peu mathématisés. Elles soulignent également les accomplissements des élèves qui sont capables, lorsque les situations qu'on leur propose sont bien choisies, de développer des heuristiques puissantes, d'inventer des méthodes de justification ou de validation. Les problèmes combinatoires apparaissent ainsi intéressants à travailler à différents niveaux d'enseignement et se prêtent au développement de plusieurs processus mathématiques tels la mathématisation, la preuve, le raisonnement . » (Thèse de doctorat, Montréal, Canada, 2009)

## Classe 1 de problèmes : sans outil particulier.

Exemple 1

*N joueurs de tennis se rencontrent lors d'un tournoi.*
*Le tournoi se déroule de la façon suivante :*
*A chaque match, seul le vainqueur reste dans la compétition.*
*Si à un stade de la compétition, le nombre de compétiteurs est impair, un joueur tiré au sort est directement qualifié au stade suivant, les autres joueurs jouent un match pour se qualifier.*
*Combien de matchs de tennis sont-ils joués ?*

L'intérêt de cet exemple est de montrer qu'il est parfois difficile d'aborder un problème de dénombrement. Il est naturel d'imaginer plusieurs cas selon la parité de $N$, puis de la parité de la partie entière de $N/2$ et ainsi de suite. On se rend vite compte de la complexité de cet axe d'approche. Dès que l'on repère que le nombre de matchs est égal au nombre de joueurs perdants, le problème est terminé.

Exemple 2

*Dans une classe sont étudiées les langues suivantes : anglais, allemand et espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue. On a les informations suivantes :*

- *5 élèves étudient les trois langues ;*
- *7 étudient l'anglais et l'allemand ;*
- *8 étudient l'anglais et l'espagnol ;*
- *9 étudient l'allemand et l'espagnol ;*
- *20 étudient l'anglais ;*
- *15 étudient l'allemand ;*
- *18 étudient l'espagnol.*

*Déterminer l'effectif de la classe.*

Cet exercice est très simple dès lors que l'on représente le problème à l'aide de diagrammes de Venn (« patates »). Cela montre l'importance d'avoir à sa disposition différentes représentations.

Exemple 3

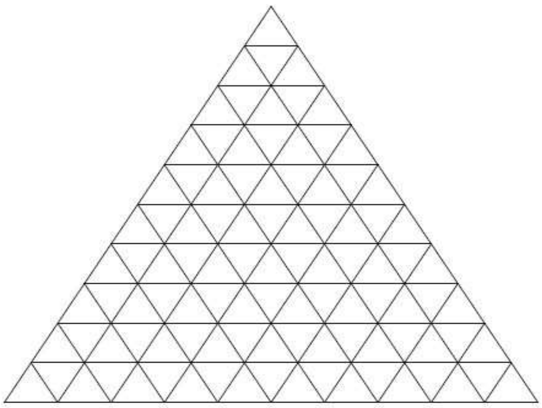
*Avec des pièces de 10, 5, 2 et 1, de combien de façons peut-on payer une somme de 15 ?*

L'outil de l'arbre est ici très pertinent. Il permet de s'assurer que l'on n'oublie aucune possibilité et que l'on ne reproduit jamais deux fois la même répartition de pièces.

Il est assez frappant de voir les élèves s'engager dans cet exercice sans aucune méthode rigoureuse de dénombrement. Là encore grâce à des échanges contradictoires entre élèves, l'outil arbre est retenu car perçu comme outil de validation.

Exemple 4

*Combien de triangles sont-ils dessinés dans la figure ci-dessous ?*



La résolution de cet exemple nécessite une analyse assez fine de la figure. Comme cela a été dit plus haut, il faut remarquer les deux paramètres qui déterminent les triangles (« tête en haut » ou non, taille du triangle). Ensuite un raisonnement par disjonction de cas sur ces deux paramètres permet de répondre.

Les expériences de recherche de ce problème auprès d'élèves de seconde par exemple montrent que les deux paramètres apparaissent assez rapidement mais que la démarche algorithmique rigoureuse de dénombrement (ne pas en compter certains triangles deux fois et ne pas en oublier) est plus difficile à mettre en œuvre. Un temps important de recherche et de débats contradictoires entre pairs est nécessaire pour que celle-ci se construise chez les élèves.

Exemple 5

*Dans un rectangle de 3* x *4, combien peut-on placer au maximum de points dont la distance entre deux quelconques est supérieure à* $\sqrt{5}$ ?

C'est un exercice d'optimisation. Il semble naturel d'effectuer des essais, on se rend compte alors assez rapidement que l'on peut positionner 5 points. Suite à la difficulté de placer 6 points, on est amené à conjecturer que ce maximum est 5 et non 6 comme on peut le penser en premier abord. On va effectuer alors un raisonnement par l'absurde. On suppose que l'on peut en positionner 6 et le principe des tiroirs permet d'aboutir à une contradiction. Il suffit alors de découper le rectangle initial en 5 régions (« tiroirs ») pour lesquels la distance maximale entre deux points est $\sqrt{5}$.

Cet exemple met en évidence le raisonnement par analyse-synthèse : on montre que ce nombre est supérieur ou égal à 5 (puisqu'une telle disposition est possible) et qu'il est strictement inférieur à 6 (puisqu'une telle disposition est impossible).

Exemple 6

*Pour fabriquer un jeu de construction, on dispose de cubes de bois identiques et de trois couleurs. Toutes les faces seront peintes d'une couleur quelconque.*

*Combien de cubes différents peut-on peindre ?*

Cet exemple est du même type que l'exemple 4 mais en étant un petit peu plus complexe. Il faut repérer trois paramètres : les couleurs (au nombre de trois), le nombre de faces de même couleur (de 1 à 6) et enfin la disposition des faces entre elles. C'est ce dernier paramètre qui rend le problème difficile. Comme dans l'exemple 4, un raisonnement par disjonction de cas permet de répondre.

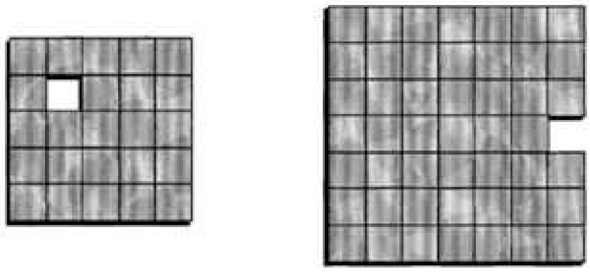
Exemple 7

*Dans une classe de 34 élèves, 22 savent skier, 14 jouent aux échecs et 18 font du roller, mais personne ne pratique les trois activités.*
*Tous ceux qui pratiquent l'une de ces activités ont la moyenne en mathématiques.*
*7 élèves n'ont pas la moyenne en mathématiques.*
*Combien de joueurs d'échecs savent skier ?*

Cet exemple ressemble très fortement à l'exemple 2, mais la représentation à l'aide de de digrammes de Venn ne permet pas de conclure immédiatement. Il peut être alors intéressant de passer dans le registre algébrique. En notant $x$ et $y$ le nombre d'élèves qui pratiquent respectivement une et deux activités, on est ramené à résoudre un système d'équations du premier degré à coefficients entiers naturels.

Exemple 8

*On considère des damiers carrés de taille quelconque avec un seul trou, comme représentés ci-dessous :*



*Déterminer le non* … *es par des dominos (ensemble*

C'est un exercice très riche au niveau des différents raisonnements utilisés. Il est manifeste que le nombre de petits carrés doit être pair, donc que *n* doit être impair. C'est une condition nécessaire mais non suffisante. Pour démontrer qu'elle n'est pas suffisante, on utilise un raisonnement par l'absurde pour montrer que certaines configurations du trou dans un carré de taille 3×3 ne permettent de paver la figure à l'aide de dominos. Ensuite, pour passer d'un rang *n* au rang *n*+2, un raisonnement par récurrence s'avère pertinent.

Pour l'avoir testé dans de nombreuses classes de lycée, nous pouvons affirmer que ces différents raisonnements apparaissent, évidemment après un temps de recherche suffisamment long. Par exemple, le raisonnement par récurrence apparait même s'il n'a pas été encore étudié.

Exemple 9

*Un directeur d'usine envisage de fabriquer deux types d'objets A et B nécessitant tous les deux l'utilisation de deux machines M1 et M2. La machine M1 est disponible 40 heures par mois, la machine M2, 25 heures.*
*Pour fabriquer un objet A, on utilise M1 pendant une heure et M2 pendant deux heures. Pour fabriquer un objet B, on utilise M1 pendant trois heures et M2 pendant une heure. Les bénéfices dégagés par la vente des objets sont respectivement 200 euros pour A et 300 euros pour B.*
*Déterminer toutes les productions possibles et celles permettant d'obtenir le bénéfice mensuel maximum et calculer ce maximum.*

Cet exemple est un exercice classique de programmation linéaire. Le registre graphique permet une résolution rapide puisqu'il suffit de compter le nombre de points à coordonnées entières dans un domaine fini. On peut encore remarquer que le changement de registre est primordial.

<u>Exemple 10</u>

*Vous avez à votre disposition :*

- *un robinet d'eau*
- *deux récipients ayant une capacité 5 l et de 3 l*
- *un grand récipient*

*Vous pouvez effectuer les actions suivantes :*

- *remplir un récipient*
- *vider un récipient intégralement*
- *vider un récipient dans un autre jusqu'à ce que le premier soit vide ou que le second soit plein.*

*Déterminer toutes les capacités que l'on peut verser dans le grand récipient en effectuant les actions ci-dessus.*

C'est un exemple qui peut se résoudre de plusieurs méthodes : graphique, arithmétique et à l'aide de suites. On pourra alors comparer ces différentes solutions.

**Classe 2 de problèmes : à l'aide des outils classiques de dénombrement.**

Nous rappelons que nous ferons appel dans cette série de problèmes aux notions d'arrangements, de combinaisons et de permutations.

<u>Exemple 11</u>
*On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.*
*Combien de tirages différents peut-on obtenir :*
*- sans imposer de contraintes sur les cartes.*
*- contenant 5 carreaux ou 5 piques.*
*- 2 carreaux et 3 piques.*
*- au moins un roi.*
*- au plus un roi.*
*- 2 rois et 3 piques.*

C'est un exercice très classique de dénombrement faisant appel aux combinaisons, arrangements et permutations. Sa résolution nécessite d'utiliser simultanément différents principes évoqués plus haut à savoir les principes additif et multiplicatif et aussi le passage au complémentaire.

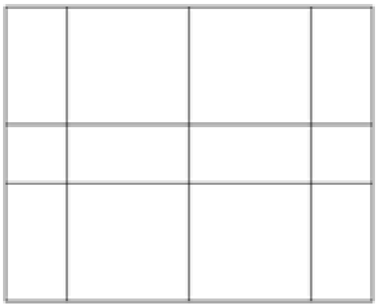
<u>Exemple 12</u>
*Combien y-a-t-il de possibilités pour placer huit tours de telle façon qu'aucune tour ne puisse en prendre une autre ?*

Cet exemple utilise les mêmes outils que l'exemple précédent mais nécessite une analyse plus approfondie de la situation : comment doivent être placées les tours. Il est clair que les tours sont repérées par leur ligne et leur colonne et que l'on peut d'abord choisir soit les lignes, soit les colonnes et que ce choix impose ensuite des contraintes sur le choix de l'autre paramètre (ligne ou colonne selon).

Exemples 13
*Quel est le nombre d'entiers naturels de 6 chiffres dont l'écriture décimale comporte au moins un chiffre pair ?*

Cet exemple est l'illustration parfaite du passage au complémentaire. On est guidé par l'expression « au moins ». Il est important que les élèves repèrent ces expressions « au moins » ou « au plus » et pensent automatiquement au complémentaire même si dans certains cas, cela ne rend pas la résolution plus simple ou plus rapide.

Exemple 14
*Combien de rectangles sont dessinés dans la figure ci-dessous ?*



C'est un exercice très classique d'utilisation des combinaisons et du principe multiplicatif. Cet exercice permet de montrer la puissance du principe multiplicatif. En effet, les élèves essaient de les citer tous avec très souvent des oublis. Quand ils découvrent que pour définir un rectangle il suffit de choisir deux côtés verticaux puis deux côtés horizontaux et que le nombre de rectangles s'en déduit aisément, ils perçoivent l'intérêt et l'utilité de ces outils de dénombrement.

Une autre situation classique d'utilisation des combinaisons est de déterminer dans un quadrillage le nombre de chemins allant d'un point à un autre avec la condition de ne pouvoir se déplacer que sur la droite ou vers le haut. Les élèves sont très souvent médusés par la modélisation proposée et par la simplicité du raisonnement.

Exemple 15
*Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « anagramme ».*

Là encore, c'est un exercice classique de dénombrement. La difficulté provient de la présence de plusieurs lettres *a* et de lettres *m*. Dans un premier temps, on peut distinguer ces trois lettres *a* et les deux lettres *m* pour ensuite diviser par le nombre de permutations obtenues avec les lettres *a* et ensuite par le nombre de permutations obtenues avec les lettres *m*. Cette construction de modélisation est importante et nécessite une bonne compréhension des outils classiques de dénombrements.

Exemple 16

*Au Loto, on dit qu'un tirage est « sans voisin » lorsqu'il ne comporte pas deux numéros consécutifs.*
*Combien y-a-t-il de tirages sans voisins ?*

C'est un exercice difficile car son approche est délicate, on ne voit pas aisément quelle modélisation mettre en place. Repérer que l'on peut mettre en bijection les tirages « sans voisin » et les tirages ordinaires mais avec 6 numéros de moins dans le choix des numéros est difficile à construire.
Même si les élèves n'arrivent pas à cette modélisation, leur montrer est important. Cela leur donne des pistes de démarches de résolution pour des exercices un peu plus complexes et/ou non classiques.

Exemple 17

*Combien y-a-t-il de termes après réduction de* $(x+y+z+t)^{10}$ *?*

C'est un exercice difficile si l'on ne connait pas les combinaisons à répétitions. Ce peut être alors l'occasion de les introduire.
La présentation par l'introduction virtuelle de séparateurs entre les objets permet aisément de comprendre que le nombre de combinaisons à répétition de $p$ objets parmi $n$ est le nombre $n-1$ parmi $n+p-1$

.