LES MATHÉMATIQUES DISCRÈTES, UNE MINE DE SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LE RAISONNEMENT ET LA PREUVE

Denise GRENIER
Institut Fourier Université Grenoble-Alpes

Le savoir se construit par la résolution de problèmes. En mathématiques, cette activité est constituée de tâches et de moments différents tels que s'approprier le problème (étudier des cas particuliers, modéliser, définir,…), conjecturer, raisonner, prouver. L'apprentissage des mathématiques ne se réduit pas à apprendre une liste de définitions et de théorèmes et ne peut pas être réduit à des techniques ou des méthodes. Au-delà des notions enseignées, il s'agit surtout de faire l'apprentissage du raisonnement et de la preuve. Ces savoirs et savoir-faire figurent explicitement parmi les objectifs des programmes de collège et lycée. Ils nécessitent des problèmes spécifiques.
Les Mathématiques Discrètes – qui regroupent en particulier l'arithmétique, la théorie des graphes, la géométrie combinatoire – offrent un grand nombre de problèmes « simples » à énoncer, faciles à expérimenter, permettant aux élèves de conjecturer, mais dont la résolution n'est pas évidente. C'est donc un domaine bien adapté pour l'apprentissage de la démarche mathématique, du raisonnement et de la preuve.
Les objets de la géométrie discrète sont des ensemble de points et de relations entre ces points : on peut représenter par exemple une droite, un cercle, un polygone « discret » sur une grille carrée rectangulaire ; on peut redéfinir les notions de régularité, périmètre et aire pour les figures, de déplacement et système générateur minimal du plan, d'empilement ou recouvrement optimaux. Les modèles de discrétisation sont basés sur des approches par pavages, par points entiers ou par des graphes.
Les applications des mathématiques discrètes sont nombreuses : stockage optimal, synthèse d'images, reconnaissance et reconstruction de formes, arbres de décision, web, codes correcteurs, etc.
Nous proposons ci-après des exemples de « problèmes de recherche » relevant des mathématiques discrètes, tous étudiés et expérimentés à des niveaux différents (collège, lycée, université), et qui ont « fait leur preuve » aussi bien pour l'intérêt qu'ils ont suscités chez les élèves ou les étudiants que pour le travail mathématique qu'ils suscitent. Le lecteur peut lire des nombreux articles, thèses, brochures, donnant des analyses précises de ces problèmes.

1. Objet géométrique discret : la droite (Ouvrier-Buffet 2003)

Sur un écran d'ordinateur, un point est représenté par un pixel lumineux.
Question 1. Définir et tracer une « droite» passant par deux pixels donnés.
Comment choisir parmi les deux tracés qui sont proposés en figures 1a et 1b.

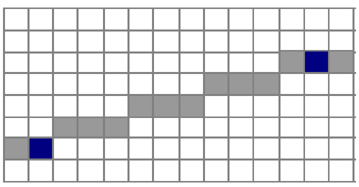


figure 1a

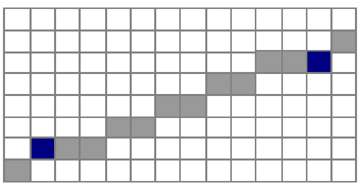


figure 1b

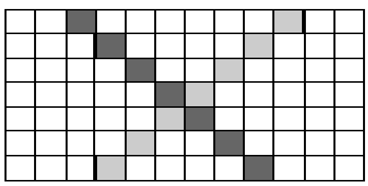


figure 2

Question 2. Quel est le « point » d'intersection des deux droites tracées dans la figure 2 ?

Ces deux questions ne sont pas entièrement résolues dans la littérature experte. Elles conduisent à reconsidérer et à redéfinir les notions de pente d'une droite et de points d'intersection, en les confrontant à celles de la géométrie euclidienne.

2. Déplacements dans le plan discret (Ouvrier-Buffet 2003)

Question 1. À partir d'un point donné sur la grille, où peut-on aller avec des *combinaisons entières positives* des deux déplacements élémentaires d1 : (2D,2H) et d2 : (3D, 1B) ? (D, H, B désignent «respectivement : à droite, en haut, en bas, G désigne à gauche).

Sur la figure 2 ci-contre, on voit bien qu'on peut aller seulement dans un secteur du plan, et pas partout dans ce secteur. Les points entiers qui peuvent être atteints sont semi-équirépartis.

Question 2. Si on rajoute le déplacement d3 : (2D,1H), l'ensemble {d1, d2, d3} permet-il d'aller partout dans le plan ?

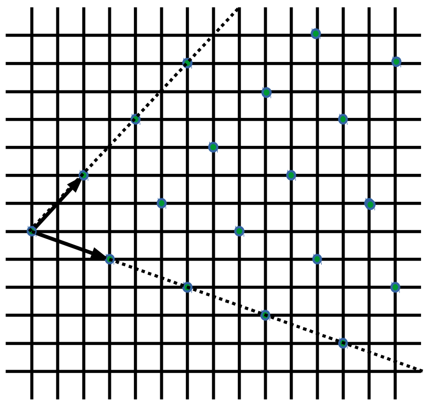


figure 3

La question générale concerne la recherche d'ensembles de déplacements qui soit « générateurs » du plan discret et « minimaux » – si on enlève un élément de l'ensemble, on ne peut plus atteindre tous les points du plan. La réponse est donnée dans le théorème suivant :

Théorème. Quel que soit $k \geq 3$, il existe des ensembles de déplacements élémentaires de cardinalité k, générateurs du plan discret et minimaux.

Une conséquence de ce théorème est qu'on ne peut définir une « dimension » dans le plan discret au sens usuel de $\mathbb{R}^2$. Voici deux exemples de systèmes générateurs minimaux, l'un à trois éléments, l'autre à quatre éléments.

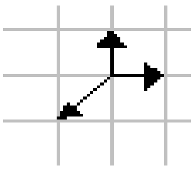


figure 4a

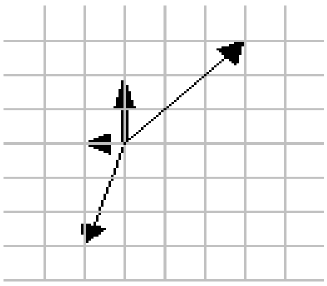


figure 4b

Ce problème peut être proposé à des niveaux de connaissances très différents. Au cycle 3, on peut d'abord faire constater qu'avec un seul déplacement, on ne parcourt qu'une demi-droite du plan discret, puis poser la question 1 avec plusieurs ensembles de deux déplacements, pour montrer que selon les choix faits, les zones et les points atteints dans la zone sont très différents. Les deux questions et le théorème permettent de poursuivre progressivement jusqu'à l'université.

3. Problèmes de pavage

La géométrie combinatoire offre de nombreux problèmes de pavage, accessibles du cycle 3 à l'université. Les raisonnements et types de preuve qu'ils permettent de mettre en œuvre sont accessibles et très divers, ce qui en fait toute leur richesse. En voici trois qui « marchent » vraiment bien. Une analyse très complète de ces trois problèmes de pavage est disponible dans l'ouvrage « situations de recherche pour la classe » édité par l'IREM de Grenoble (Groupe SiRC 2017).

P1. Pavage en *n* carrés

Question

Pour quelles valeurs de n peut-on paver une grille carrée en n carrés ?

En figure 5, voici un exemple pour n=10.

Et pour n=7 ? n=8 ? n=9 ? n=13 ?

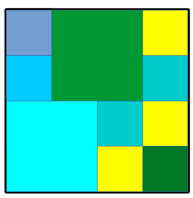


figure 5

Ce problème est accessible dès le début du collège et reste pertinent jusqu'à la fin du lycée. Il est presque entièrement résolu en moins de deux heures (même en 6ème) pour presque toutes les valeurs de n. Les raisonnements se construisent en même temps que l'exploration des solutions avec papier-crayon, et les preuves reviennent à justifier les dessins qui montrent le pavage ou à décrire les solutions par un algorithme basé sur des suites en progression arithmétique.

P2. Pavage insécable

On veut paver une grille carrée de telle manière qu'il n'existe aucune droite coupant la grille carrée dans ses deux dimensions. Voici un exemple pour le carré 5×5, avec 13 pavés de deux tailles différentes.

Questions

Q1. Existe-t-il un pavage insécable d'une grille $n \times n$ pour tout n ?

Q2. Trouver un pavage avec un minimum de pavés.

Q3. Trouver un pavage avec un maximum de pavés.

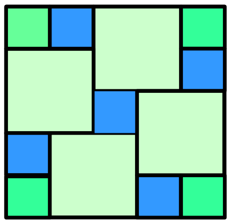


Figure 6

Q1 est une question d'existence, Q2 et Q3 sont des questions d'optimisation.
L'exploration du problème avec du matériel adéquat (cf livre SiRC cité) permet de résoudre facilement Q1 pour $n \leq 10$, et par un raisonnement « inductif », de décrire des pavages pour des tailles supérieures : en utilisant les homothéties de coefficients entiers (par exemple, à partir de n=5, on obtient tous les multiples de 5), ou en remplaçant de manière appropriée des pavés «dans des coins par d'autres plus grands (par exemple, on peut construire un pavage insécable du carré 6×6 à partir de celui proposé ci-dessus. Les preuves sont géométriques et constructives, inductives ou algorithmiques.

P3. Une « situation fondamentale » pour l'apprentissage du raisonnement

Question générale

Pour quels types de polyminos et quelles dimensions, existe-il un pavage avec des pavés identiques plus petits (dominos, triminos, etc..) ?

Trois cas particuliers

P1. Rectangle avec un trou quelconque / dominos (*fig.7*)

P2. Carré avec un trou quelconque / triminos en L (*fig.8*)

P3. Trapèze sans trou / dominos (*fig.9*)

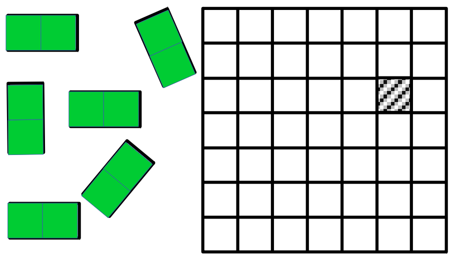


figure 7

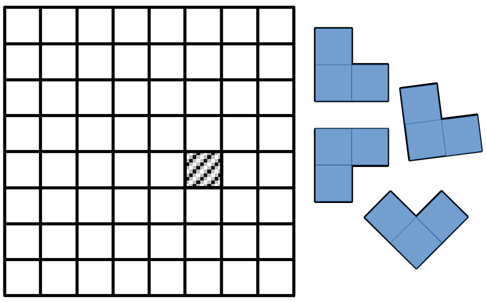


figure 8

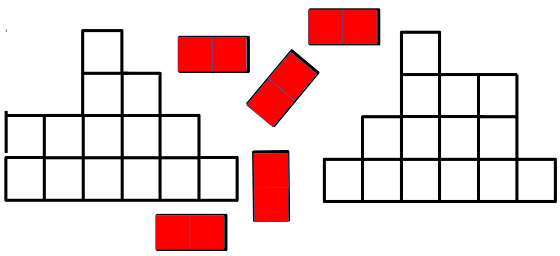


figure 9

Les raisonnements et outils de preuve que ces problèmes de pavage permettent de mettre en œuvre sont nombreux et certains inhabituels. Citons : Analyse combinatoire, construction algorithmique de solutions, recherche de conditions nécessaires ou suffisantes, preuves diverses : par exhibition d'exemples (existence d'une solution), par découpage, par disjonction des cas, récurrence, absurde.

4. Deux problèmes de graphes

P1. Chemin eulérien dans un graphe

À quelles conditions sur les sommets et les arêtes, un graphe admet-il un chemin empruntant une fois et une seule chacune des arêtes ?

Il s'agit d'un problème classique de la théorie des graphes, très facile d'accès, mais dont la résolution contient une partie souvent occultée dans les ouvrages qui la traite. La condition nécessaire d'existence d'un chemin ou d'un cycle est liée à la parité des degrés des sommets du graphe et à sa connexité (qui n'est aps vérifiée sur le graphe de la figure 10). Si celle-ci est assez facile à établir, le fait que c'est aussi une condition suffisante est plus subtile. Elle nécessite un raisonnement inductif qui peut être compris et mené sur des exemples dès le collège.

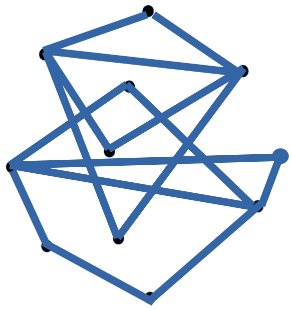


figure 10

P2. Cheminement dans une grille (tout public)

Problème général. On veut parcourir une grille quelconque, en passant une fois et une seule par toutes les cases, et en se déplaçant d'une case à une autre qui lui est directement voisine. À quelles conditions existe-t-il un chemin ou un cycle reliant deux cases quelconques données. Voici un exemple.

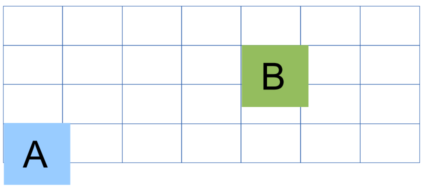


figure 11a

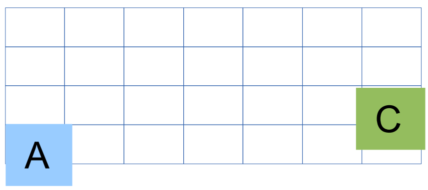


figure 11b

Le problème de « cheminement dans une grille » est celui de l'existence d'un chemin ou d'un cycle hamiltonien dans un graphe. Ce problème est NP complet. Mais il se résout facilement dans le cas particulier d'un graphe de grille (comme ici). On peut mettre en œuvre différents types de preuve (selon la taille et la forme de la grille) :par exhaustivité des cas, par coloration et un raisonnement par l'absurde, ou encore en utilisant une partition et un raisonnement par récurrence.

5. Approche discrète de problèmes géométriques euclidiens

P1. Empilement optimal de *n* disques dans un triangle équilatéral

Question générale
Quel est le plus petit triangle équilatéral contenant n disques identiques ne pouvant se chevaucher ?

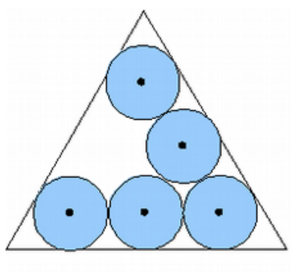


figure 12a

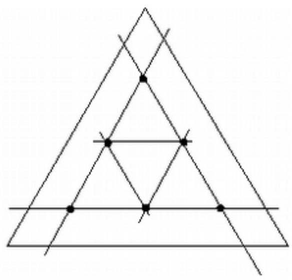


figure 12b

On peut démontrer que le triangle dessiné dans la figure *12a* est le plus petit pour six disques (on a enlevé un des six disques), car tous les disques sont tangents entre eux et tangents aux côtés du

triangle. Est-il possible de réduire la taille du triangle pour cinq disques ? Il y a en effet beaucoup de place perdue. Ce problème est quasiment insoluble si on reste en géométrie euclidienne. Une modélisation efficace consiste à identifier chaque disque par un point – son centre – et à écrire la contrainte « sans recouvrement » par une condition sur les positions des points : « la distance entre deux points doit être supérieure ou égale au diamètre des cercles ». La question de départ revient alors à déterminer le plus petit triangle contenant *n* points vérifiant cette condition. Il faudra ensuite faire un retour sur les diamètres des disques pour retrouver le triangle optimal cherché.
Par une partition appropriée du nouveau triangle, et l'application du principe des cages à pigeons, on peut résoudre facilement le problème pour *n*=5 (c'est presque « magique »).

Les solutions peuvent être parfois surprenantes selon les valeurs de *n*. Ainsi, pour *n*=7, il y a deux solutions optimales très différentes relativement aux positions respectives des disques.

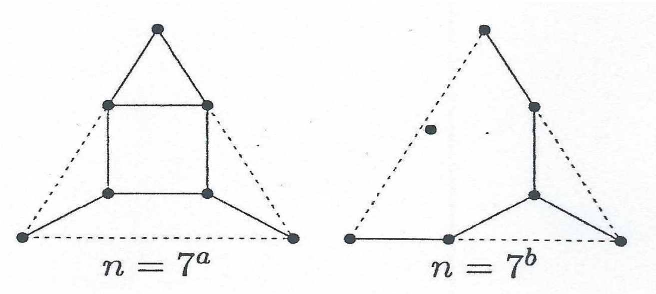


figure 13a ***figure 13b***

Les traits pleins entrent deux points indiquent des distance égales au diamètre des disques, les pointillés des distances strictement plus grandes. Dans la solution de la figure 13b, il n'y a aucune symétrie et un des points est même libre de son mouvement dans une petite zone du triangle.

P2. Longueurs de lignes polygonales convexes incluses

Question. Démontrer le théorème suivant : Toute ligne polygonale finie convexe située à l'intérieur de l'enveloppe convexe d'une ligne polygonale convexe donnée et de mêmes extrémités est de longueur plus petite.

Avec les notations de la figure ci-dessous, la propriété se traduit par :

$$l\,(B_0 B_1 \ldots B_m) \leq l\,(A_0 A_1 \ldots A_n)$$

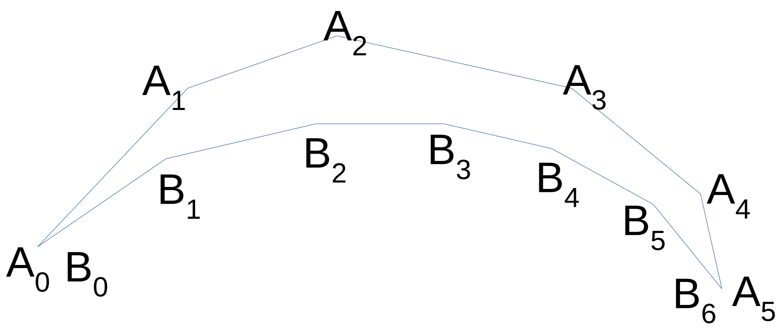


figure 14

Pour la démonstration, les objets considérés sont les segments des lignes polygonales et non leurs longueurs – même si la question concerne les longueurs des lignes A et B. Un raisonnement utilisant le principe de récurrence classique sur le nombre de segments de la ligne A permet de résoudre la question.

P3. Polygones réguliers à sommets entiers (Grenier et Payan 1998)

Question. Pour quelles valeurs de n peut-on construire des n-polygnes réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ?

Ci-dessous, en figure 15*a*, des exemples de polygones réguliers (n=3, 4 et 8). Peut-on les tracer avec tous leurs sommets sur les sommets d'une grille carrée régulière, comme en figure 15*b* ?

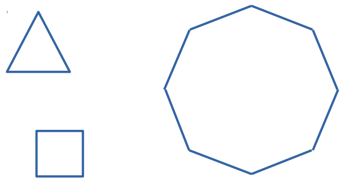


figure 15a

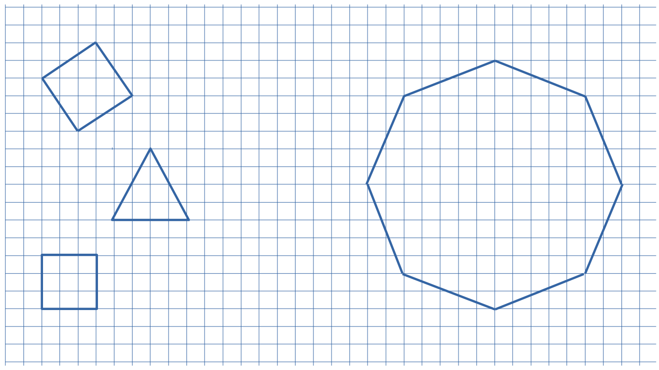


figure 15b

Ce problème est difficile à résoudre dans le cadre de la géométrie euclidienne, sauf pour des valeurs particulières de n. Ainsi, pour n=3, c'est impossible (le triangle de la figure 15b est un faux exemple...), pour n=4, il en existe dans des positions différentes sur la grille. Si l'on veut examiner chaque valeur de n indépendamment, le travail est fastidieux et risque de ne pas aboutir. Un raisonnement basé sur le principe de descente infinie de Fermat (il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$), utilisant la notion d'aire discrète d'un polygone (comptée par le nombre de ses points intérieurs), et des transformations isométriques (rotations ou symétries), permet de résoudre la question pour toutes les valeurs de $n \geq 3$ en une seule fois !

6. D'une question de géométrie euclidienne à la résolution d'inéquations dans $\mathbb{N}2$ pour des graphes planaires (Grenier et Tanguay, 2008 & 2010)

Question. Démontrer le théorème : Il n'y a (pas plus) que cinq polyèdres réguliers dans $\mathbb{R}3$.

Un polyèdre est régulier si ses faces sont des n-polygones réguliers et s'il a un même nombre de faces en chaque sommet (degré des sommets). La condition pour que le polyèdre soit convexe est que, en chaque sommet, la somme des angles aux sommets des polygones adjacents à ce sommet soit strictement inférieure à 360 degrés. Les faces ne peuvent donc être que des triangles, des carrés ou des pentagones, et leur nombre en chaque face est limité. On modélise un tel polyèdre par un graphe planaire – diagramme de Schlegel (figure 16). En utilisant la relation d'Euler dans les graphes planaires : $s–a+f=2$ (sommets, arêtes, faces), on en déduit une inéquation dans $\mathbb{N}^2$ reliant p= nombre de côtés d'une face et q=degré des sommets $(p–2)(q–2)<4$ ((p,q) est le symbole de Schläfli). Cette inéquation n'admet que cinq solutions dans $\mathbb{N}^2$. On vérifie ensuite par des arguments géométriques l'existence des cinq polyèdres associés.

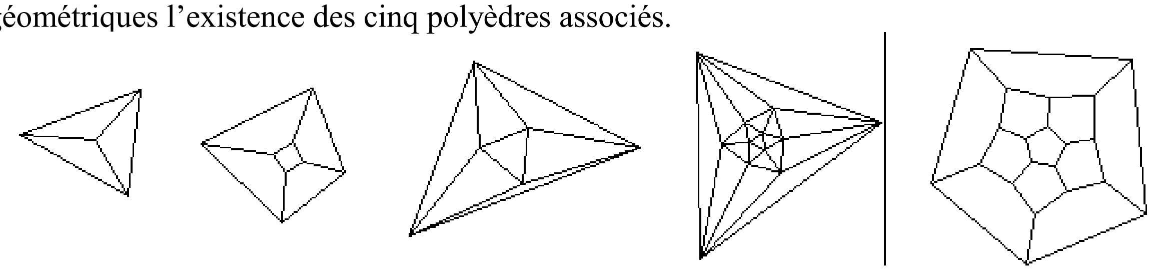
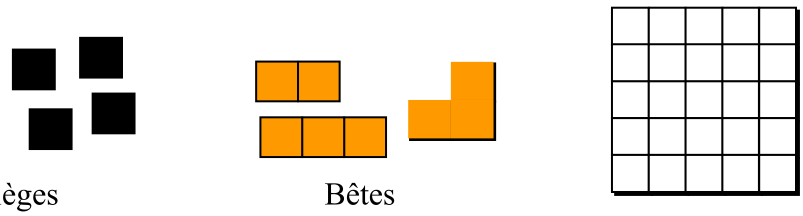


figure 16

Dans cette approche, on a « oublié » les mesures des angles (dièdres, polygonaux) et les mesures de longueurs (côtés), alors même que l'on cherche des objets très réguliers. Ils sont en fait traduits dans les inéquations arithmétiques décrivant les conditions sur les graphes planaires associés.

Annexe. Trois SiRC qui ont fait leurs preuves à tous les niveaux

S1. La « chasse à la bête » (Maths-à-modeler) – Un problème d'optimisation
On veut protéger un champ quadrillé d'un nuage de bêtes, avec des pièges (uniminos) que l'on va placer dans le champ de manière à ce qu'aucune bête ne puisse se poser sans toucher un piège. Une bête est l'un des trois petits polyminos (domino, trimino long, trimino en L).

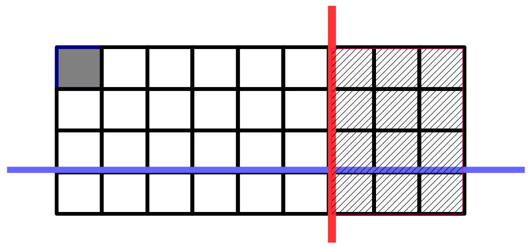


Pièges Bêtes

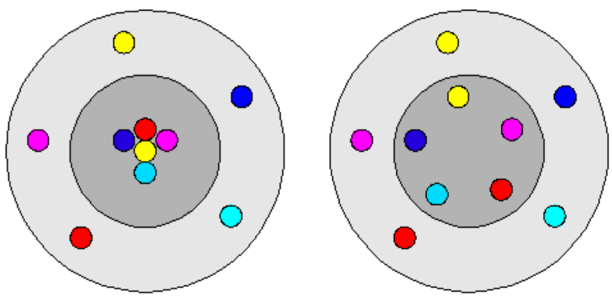
Pour chacun des 3 types de bêtes, trouver le plus petit nombre de pièges (et leurs dispositions) qui assure la protection du champ.

S2. Le jeu du chocolat. Un jeu à stratégie gagnante
Jeu à deux (équipes de) deux joueurs. Une tablette de chocolat rectangulaire contenant un carreau en savon. Chaque joueur doit, à tour de rôle, couper la tablette dans une seule de ses dimensions au choix et garder le morceau ne contenant pas le carré de savon. Celui qui est obligé de prendre le carré de savon a perdu.
Existe-t-il une stratégie gagnante (pour ne pas manger le carré de savon !) quelles que soient les dimensions de la tablette ?

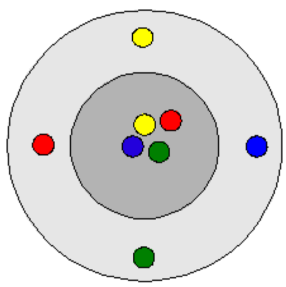
Version de base. Le rectangle est de dimensions quelconques, le carré de savon est dans un coin (en grisé sur le dessin)



S3. La roue aux couleurs (Godot, thèse 2005, primaire-collège, L1) arithmétique élémentaire
Deux disques concentriques, n pions équirépartis sur le disque extérieur et k couleurs,Est-il possible de placer n pions sur le disque central, face à ceux du disque extérieur, ayant des couleurs prises parmi les k couleurs, tels que pour toute rotation de $2\pi/n$, il n'y ait que deux pions de même couleurs face à face.



Exemple d'une solution pour n=k=5



Chercher une solution pour n=k=4.

Liste de SiRC, avec les notions et raisonnements en jeu et des références.

Pavages de polyminos / *algorithmes, théorèmes d'existence, récurrence* / coloration de graphes de grille (Grenier et Payan 1998 ; Deloustal-Jorrand 2004 ; Groupe SiRC 2017)
La chasse à la bête / *optimisation dans N* / intervalles d'entiers, borne sup, borne inf (Duchêne, thèse en maths discrètes 2006 ; Groupe SiRC 2017)
Objets géométriques discrets / *représentation (pixels), définition* / géométrie euclidienne (Ouvrier-Buffet, 2003)
Déplacements dans le plan discret / *définition* / systèmes générateurs minimaux (Ouvrier-Buffet 2003)
Partage d'un carré en *n* carrés / *induction* / suites, congruences, dénombrement, géométrie (Groupe SiRC 2017)
Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction et preuve* / géométrie de l'espace, graphes planaires (Grenier et Tanguay 2008 et 2010)
Polygones réguliers à sommets entiers / *récurrence, absurde* / géométrie combinatoire (Grenier et Payan 1998)
La roue aux couleurs / *modélisation, bijection* / arithmétique, nombres premiers, permutations (Godot 2005)
Jeu des carrés dans un rectangle / *stratégie* / algorithme d'Euclide (Colipan 2014)
Jeu de SET/ *démarche expérimentale*/ dénombrements, permutations (Giroud 2011)
Jeu de la frontière / *stratégie, absurde* / convexité (Giroud 2011)
Promenades dans une grille / *algorithmes, théorèmes d'existence* / chemin hamiltonien, coloration
(in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)
Dénombrements (mots, chemins, etc) / *modélisation, bijection* / analyse combinatoire
(in http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/)
Chemins eulériens, hamiltonniens / définition, modélisation/ graphes (Cartier 2008)
Les gardiens de musée / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration (Groupe SiRC 2017)
Disques dans triangles ou carrés / *optimisation* / géométrie combinatoire, graphe (Grenier et Payan 1998)

Bibliographie sur les SiRC (non exhaustive)

CARTIER Léa (2008) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.* Thèse, Université Joseph Fourier.

COLIPAN Ximena (2014) *Étude de SiRC basées sur des jeux combinatoires particuliers : les jeux de type Nim.* Thèse, Université Grenoble-Alpes.

DELOUSTAL-JORRAND Virginie (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique.*Thèse, Université Joseph Fourier.

GIROUD Nicolas (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe.* Thèse de l'université Joseph Fourier.

GODOT Karine (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse, Université Joseph Fourier.

GRENIER D., PAYAN Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes, *Revue de Didactique des Mathématiques* vol. 18.1, pp.59-100, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER D., PAYAN Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de RDM*, Paris, 19 Octobre 2002.

GRENIER D. (1995) Savoirs mis en jeu dans des problèmes de combinatoire *in* Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A (eds) (1995). *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, ed. La Pensée Sauvage.

GRENIER D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.

GRENIER D., TANGUAY D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x*, n°78, pp. 26-52. IREM de Grenoble.

Groupe « Logique, raisonnement et SiRC » (2017), *Situations de recherche pour la classe, expérimenter, conjecturer, raisonner et prouver en mathématiques, au collège, au lycée ... et au-delà,* décembre 2017, 2ème édition, éditeur IREM de Grenoble.

TANGUAY D., GRENIER D. (2010) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation, *For the Learning of Mathematics* vol.30-3, pp.36-42 (FLM publishing association) Cubberley Education Library, Stanford.