Raisonnement inductif et preuve par récurrence

Denise GRENIER Institut Fourier
IREM de Grenoble, Fédération de Recherche Maths-à-Modeler
Université Grenoble I

- Définitions, aspects syntaxiques et sémantiques des écritures dans des ouvrages (TS et L)
- L'image de la « répétition » comme obstacle au concept mathématique ?
- Conceptions d'étudiants et d'enseignants
- Quand l'absurde rencontre la récurrence
- Problèmes et situations de recherche pour construire une connaissance consistante et correcte

Formulations dans des ouvrages. Exemple 1

Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Dans le volume de cours, 61.3.4, page 20

1.3.4 Raisonnement par récurrence

Une propriété qui dépend de l'entier *n* peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$P(n): 1+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :

- on **prouve** que *P*(0) est vraie ;
- on **suppose** que *P*(*n*) est vraie ;
- on **prouve** qu'alors *P*(*n*+1) est vraie.

Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

Formulations dans des ouvrages. Exemple 1 (suite)

Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Dans le volume de cours, 61.3.4, page 20

« On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :
on **prouve** que $P(0)$ est vraie ;
on **suppose** que $P(n)$ est vraie ;
on **prouve** qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
Alors la propriété est vraie pour tous les entiers. »

- le SI de la proposition conditionnelle globale n'est pas écrit, le ALORS est isolé

- l'implication décrivant l'hérédité de P(n) peu visible : écrite sur deux lignes différentes, le SI est absent (ALORS seul), présentée comme deux « étapes » ;

- aucun quantificateur explicite (l'existence du n_0 est affirmée).

- initialisation en $n_0 = 0$ (vrai sur l'exemple convoqué).

Un Énoncé correct

SI

il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie

(initialisation)

ET *pour tout* $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, (hérédité)

ALORS

pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Formulations dans des ouvrages. Exemple 2

Repères TS 2012 (page 10, cours du chapitre « suites et limites »)

Au début du XX[e] siècle, le mathématicien *Giuseppe Peano* présente notamment l'axiome de récurrence dans sa construction des entiers naturels…

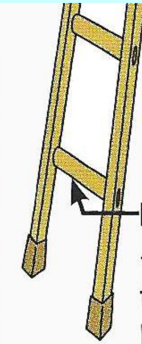
axiome de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.

On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :

- $P(0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, **$P(n)$ vraie** implique **$P(n+1)$ vraie** (*hérédité*).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.



Remarque : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On a une variante de ce raisonnement :

Si « $P(n_0)$ est vraie » **et** « pour tout $n \geqslant n_0$, **$P(n)$ vraie** implique **$P(n+1)$ vraie** », **alors** $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Le quantificateur « pour tout » présent dans l'hérédité,

Mise en évidence des deux implications « Si.. alors » et « implique », et du connecteur « et ».

Formulations dans des ouvrages. Exemple 3

(Déclic TS 2011, page 17, intitulé « Bon à savoir »

La quantification universelle dans lécriture de l'hérédité

(*le texte est en gras dans le manuel)*

1. Bien repérer ou écrire la propriété P(*n*) indexée par l'entier *n*. Ici, P(*n*) est écrite entre guillemets, car c'est une égalité qui reste à démontrer. À ce stade, on ignore si elle est vraie.

2. **Attention : lorsqu'on écrit l'hypothèse de récurrence, il faut bien considérer *P*(*n*) vraie pour un entier *n*, et pas pour tout entier *n*. Sinon, on admet la propriété qu'il faut démontrer !**

Formulations dans des ouvrages (suite)

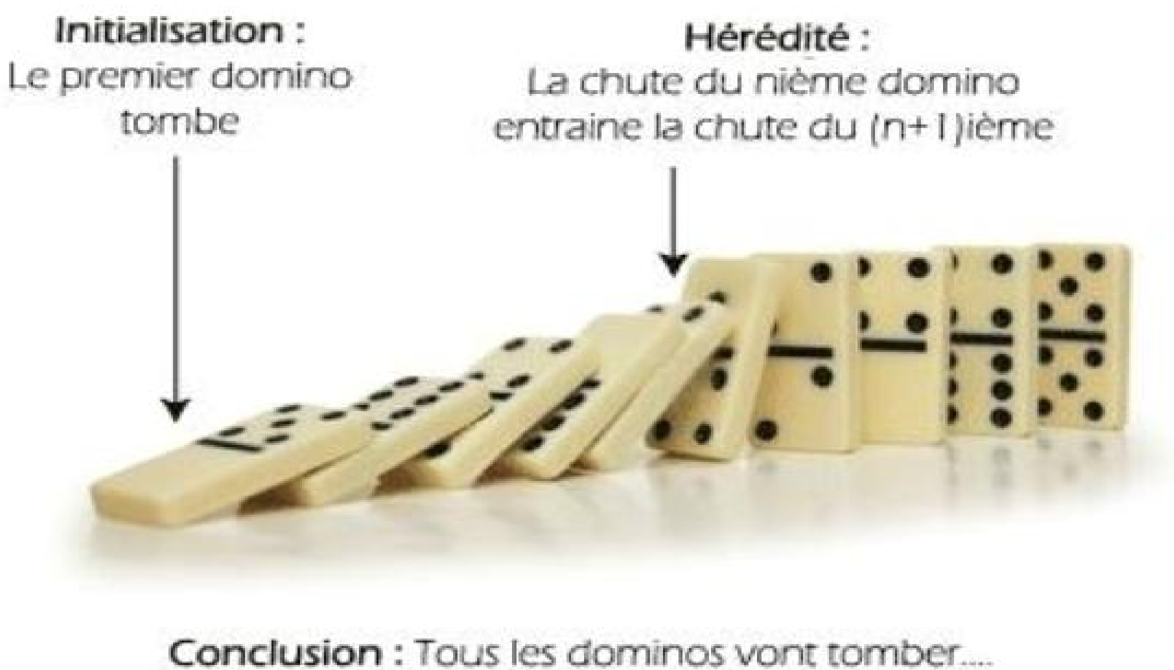
La quantification universelle de l'hérédité

déguisée dans des expressions floues, telles que
« on suppose que $P(n)$ est vraie pour **un *n* quelconque** »,
ou « **pour *un certain n*** »,
Ou encore « on suppose qu'elle est vraie **au rang *p*** »

Aucune de ces écritures ne rend compte que l'hérédité est une implication quantifiée universellement et qui peut être vraie même si la prémisse est fausse.

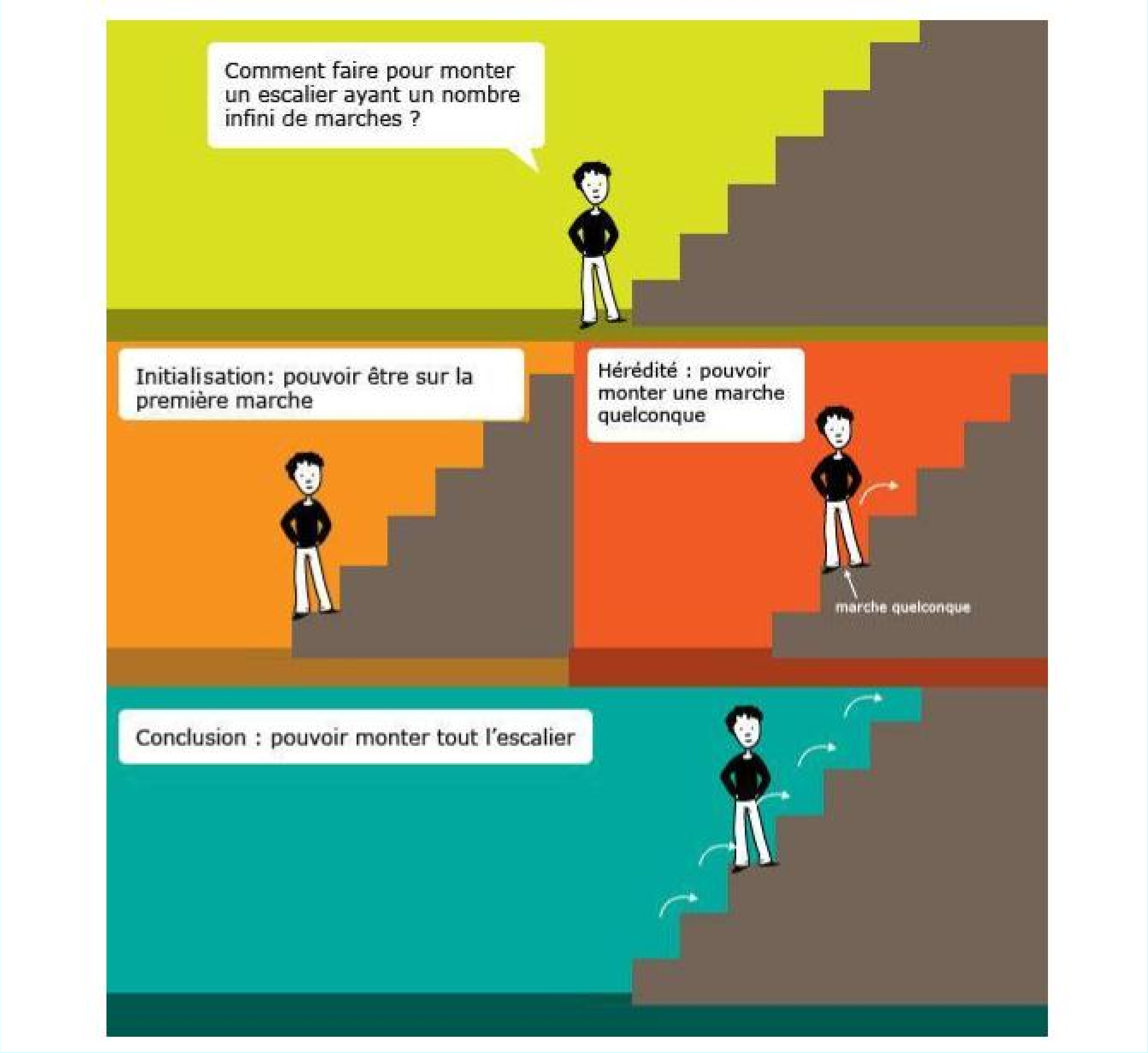
Les dominos (ou les sucres)

- La démonstration par récurrence s'apparente au "principe des dominos" :



Représentations et images de la récurrence

L'échelle



Récurrence. Définitions usuelles

(Logos, Bordas, 1982)

(didactique) Qui **revient en arrière**, qui **se répète**

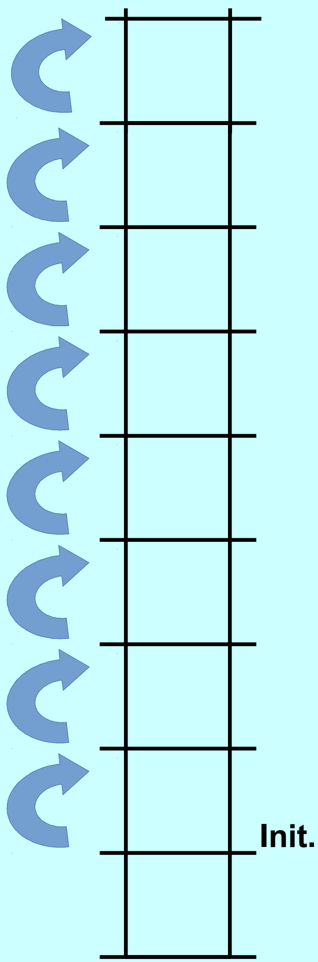
(Larousse en ligne, 2014)

• Caractère de ce qui est récurrent ; **répétition** d'un phénomène : La récurrence d'un thème dans un roman.
• Relation qui lie les termes d'une suite récurrente.

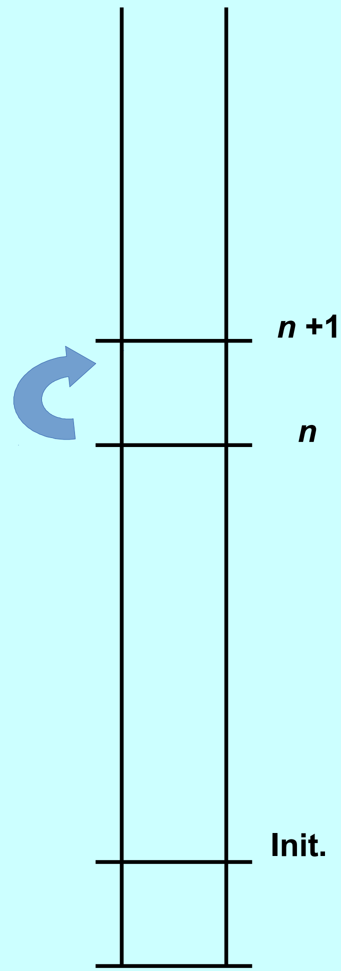
(CNRTL, en ligne)

Caractère, état de ce qui **réapparaît** par intervalles, de **ce qui se reproduit ; processus répétitif**.
Synon. rappel, réapparition, **réitération, retour**.
INFORMAT. Retour, **répétition d'un message, d'un item** (Media 1971)

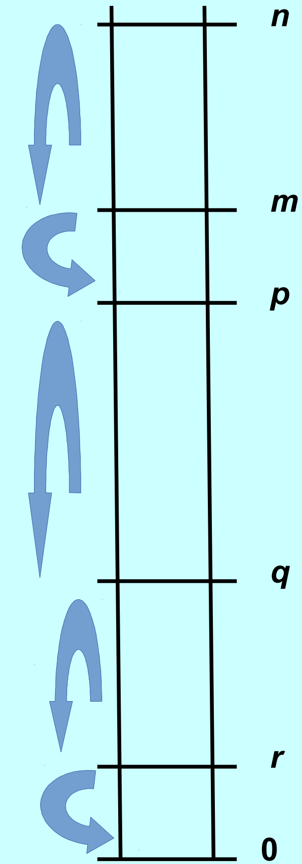
La Récurrence … en images



Répétition



Récurrence
« ascendante »



Principe de descente stricte dans N

Remarques

• Les définitions usuelles du mot « récurrence » contiennent les mots *répétition*, *processus répétitifs, reproduction*, *réitération*

→ forte relation dans le langage courant entre les termes « répétition » et « récurrence »

Dans répétition, il y a l'idée d'*identique*.

• En Maths

– Le raisonnement inductif permet de dégager une **propriété générale** d'un ensemble d'objets, à partir d'observations sur des objets particuliers de cet ensemble.

– La récurrence est un outil de preuve qui permet d'établir de **nouveaux résultats**.

La notion de répétition, obstacle épistémologique à la construction du concept de récurrence ?

(Séminaire Du mot au concept, « répétition », 3-4 juillet 2014)

- La répétition comme fondement nécessaire

répétition et récurrence sont liées dans le raisonnement inductif, procédé qui permet d'énoncer une propriété générale (conjecture) à partir de l'examen de cas particuliers “semblables”

- Doit être remise en question pour accéder au concept mathématique

l'image de répétition est remplacée par celle d'hérédité (pas forcément régulière)

Le concept de récurrence se construit contre celui de répétition

Autre forme (pour un autre usage) :
Le principe de Fermat et la « descente infinie »

- Deux formes équivalentes

F1. Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

F2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.

- Autre forme de F2 (*reductio ad absurdum)* (opérationnelle)

Si *pour tout n* entier positif tel que P(*n*) vraie, *il existe m* entier positif, $m < n$ et P(*m*) vraie,
alors *pour tout n,* P(*n*) est faux »

Conceptions et difficultés d'étudiants

15 ans de Licence, M1, IUFM, PAF …

- Domaines d'utilisation très réduits (outil « pauvre »)
- Pas de réponse aux questions : «*Le principe de récurrence est-il démontrable ? Comment le valider ?* »
- À la question :« *Comment définiriez-vous la récurrence ?* » seul énoncé du principe de récurrence (de base), ou définition d'une suite définie par récurrence
- La récurrence est (seulement) une technique, une méthode
- On ne sait pas d'où vient le « rang initial »   (la recherche de l'hérédité peut donner ce rang)
- La preuve par descente infinie (ou contre-exemple minimal) pose problème : pas d'initialisation, associée souvent à une preuve par l'absurde (donc « pas par récurrence »)

Conceptions erronées et difficultés d'étudiants (suite)

Question : La récurrence est-elle une méthode de démonstration ? **Nombreux doutes**

« La récurrence n'est pas une méthode de démonstration car on suppose la propriété au rang n et on calcule au rang n+1 en utilisant la supposition » (L3 maths)

« Comme on suppose que c'est vrai à un rang quelconque n, on a forcément que c'est vrai quel que soit n, on a donc rien prouvé » (Master1 maths)

« Je pense que c'est une méthode de démonstration car :
i) sinon on ne l'utiliserait pas autant.
ii) on utilise des variables non définies: cela prouve que cela marche tout le temps » (L3 maths)

« [...] La démonstration par récurrence peut sembler un peu légère car on suppose des choses vraies alors qu'on en sait rien mais pourtant, elle est très utile (IUFM) »

Questions didactiques

Comment construire - chez les élèves et étudiants - une autre connaissance du concept de récurrence plus « proche » du savoir mathématique ?

en proposant des problèmes où

- la conjecture est facile d'accès
- la propriété à étudier n'est pas une fonction algébrique de n
- les formes descendantes et/ou “par contre-exemple minimal” sont adaptées et accessibles

Notre travail de chercheur

- Reformulation de problèmes classiques
- Construction de problèmes non usuels mettant en jeu des « propriétés intuitives» de la récurrence : situations de recherche pour la classe (SiRC)

Des problèmes usuels un peu transformés – exemple

- Soit, pour tout n ∈ *N*, la propriété P(*n*) : $2^n \geq (n+1)^2$
  a. Pour quelles valeurs de *n* P(*n*)⇒P(*n*+1) est-elle vraie ?
  b. Pour quelles valeurs de *n*, P(*n*) est-elle vraie ?
  c. quelle est la valeur de n_0 initialisation de la récurrence ?

- Soit P(*n*) : $10^n - 1 \, est \; divisible \; par \, 9$

  et Q(*n*) : $10^n + 1 \, est \; divisible \; par \, 9$

Avec les mêmes questions

Des questions “épistémologiques” – exemple

Rappel. Domaine de pertinence de la récurrence : les ensembles dénombrables bien ordonnés (axiome de récurrence)

Question. *Les conjectures ci-dessous relèvent-elles d'une preuve par récurrence ? Est-ce une technique pertinente? Dans quel domaine est-elle utilisée ici ?*

- Pour tout entier n positif, $3^{2n} – 2^{n}$ est divisible par 7
- Pour tout entier $n > 1$, $n^2 – n + 41$ est un nombre premier
- Pour tout entier n positif,

  $$1^2+2^2+...+n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1))/6$$
- Irrationalité de $\sqrt{2}$

Invariants du concept	Syntaxe	Sémantique	Problèmes	Registre
Aspect inductif et constructif	Formulation « pas à pas » Répétition Incrémentation d'une variable Formulations spécifiques	Raisonnement inductif Construction de conjectures Définition inductive	La course à *n* Le jeu d'Euclide géométrique *n* carrés dans un carré Pavages de polyminos : carrés ou trapèzes, avec dominos ou triminos Arbre	Numérique Numérico-géométrique Numérico-géométrique Géométrique Graphe (maths discrètes)
Implication et Quantification	Implication « logique » (principe de récurrence) Quantifications	Indépendance de n_0 et de l'hérédité Implication vraie avec prémisse fausse	Petits pbs transformés	Numérique Fonctionnel (P(*n*) est une fonction analytique de *n*)
Aspect ensembliste	Récurrence descendante Récurrence forte	Propriété d'objets Déconstruction	Pavage de polyminos (trapèze avec dominos) Lignes polygonales	Géométrique Mesure et géométrique
Descente infinie et absurde	Principe de « Fermat » axiome de récurrence de N	Sans régularité (sauts des valeurs de *n)* Plus de rang initial	Non-rationnalité de V2 Polygones à sommets entiers	Numérique Mesure géométrique

Exemple. SiRC : « *n* carrés dans un carré »

(groupe logique IREM)

Pour quelles valeurs de *n* est-il possible de partager un carré en *n* carrés ?

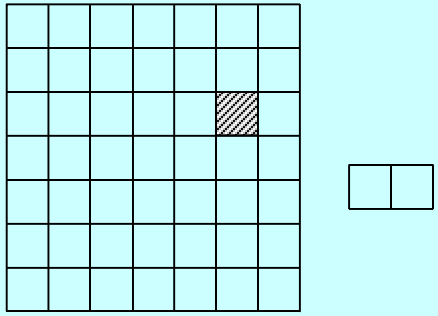
Les premières valeurs de *n* sont les carrés parfaits : 4,9,16,
Ce qui induit tous les partages de type $n=p^2$

Et-ce possible pour $n=6$? $n=17$? $n=127$?

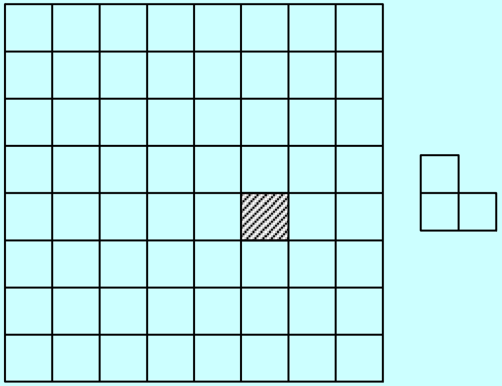
Situation de Recherche phase expérimentale nécessiare
Expérimentée depuis 5 ans au collège, lycée, université
Au collège : en une heure, conjecture vraie, preuves constructives pour les valeurs de *n* qui « marchent »

Trois problèmes de pavage

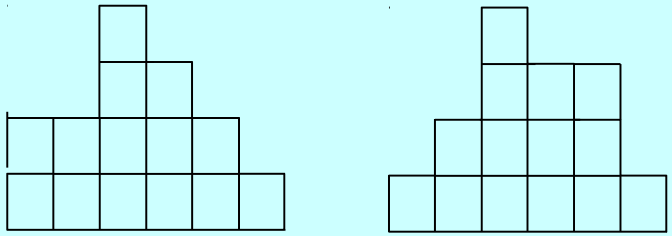
P1. Rectangle avec un trou quelconque / dominos



P2. Carré avec un trou quelconque / triminos en L



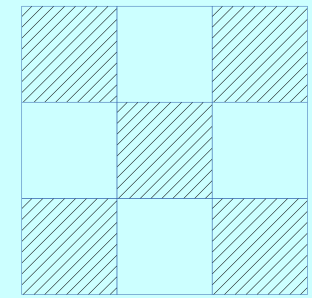
P3. Trapèze sans trou / dominos



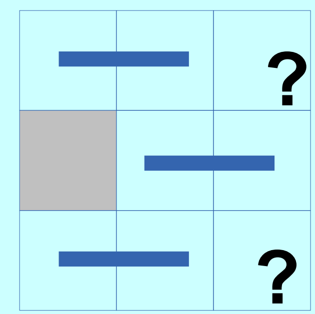
Pavage de carrés de taille n par des dominos

Propriété

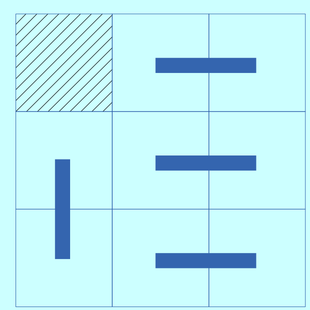
Pour *n*=3, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une des cases hachurées ci-contre.



preuve *d'impossibilité* : par pavage forcé (raisonnement par l'absurde)



preuve de *possibilité* :
par exhibition d'un exemple
(il existe un pavage)



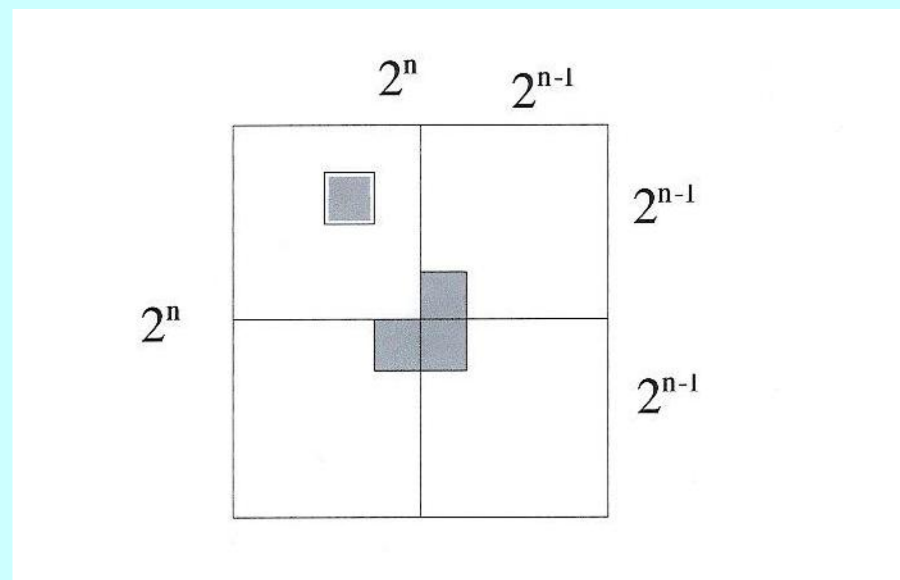
On peut encore raisonner ainsi pour *n*=5
Difficile, voire impossible pour *n* ≥7

Pavage de polyminos avec des triminos en L

P(n) est une propriété d'une classe d 'objets de taille n
“**Quelle que soit la position du trou**, un polymino carré de taille 2^n est pavable par les triminos en L »

Hérédité : pour quelles valeurs de n a t-on P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) ?
En posant un trimino comme indiqué sur le dessin ci-dessous, on obtient **quatre** carrés de taille 2^n avec un trou.

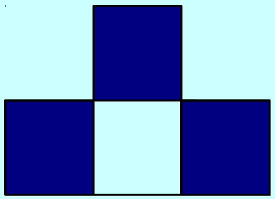
On a donc : P(n)$\Rightarrow$P(n+1)



On peut faire ce raisonnement pour tout n ≥ 1
et de plus P(1) est vraie.

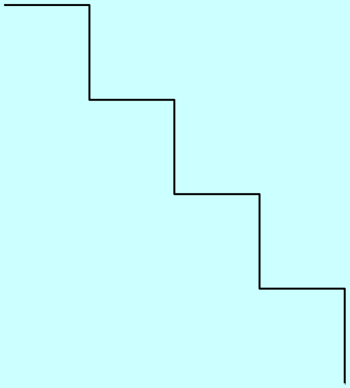
Pavage d'un trapèze par des dominos

Propriétés ou conjectures pouvant émerger de la phase expérimentale



1. Il existe des trapèzes d'aire paire
et non équilibrés
Donc la condition « aire paire » n'est pas suffisante

2. Si un trapèze a tous ses paliers ou toutes ses colonnes paires, alors il est pavable. (Preuve évidente)

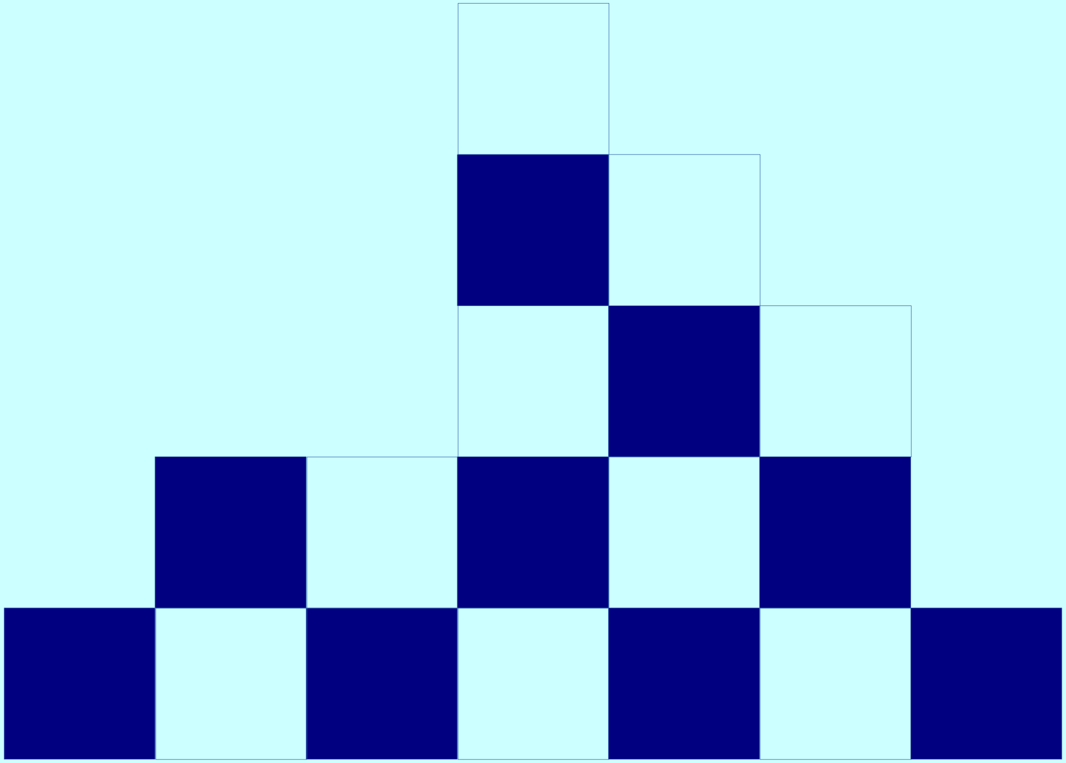


3. Tout trapèze ayant uniquement
des marches de 1 sur 1
de chaque côté est non pavable

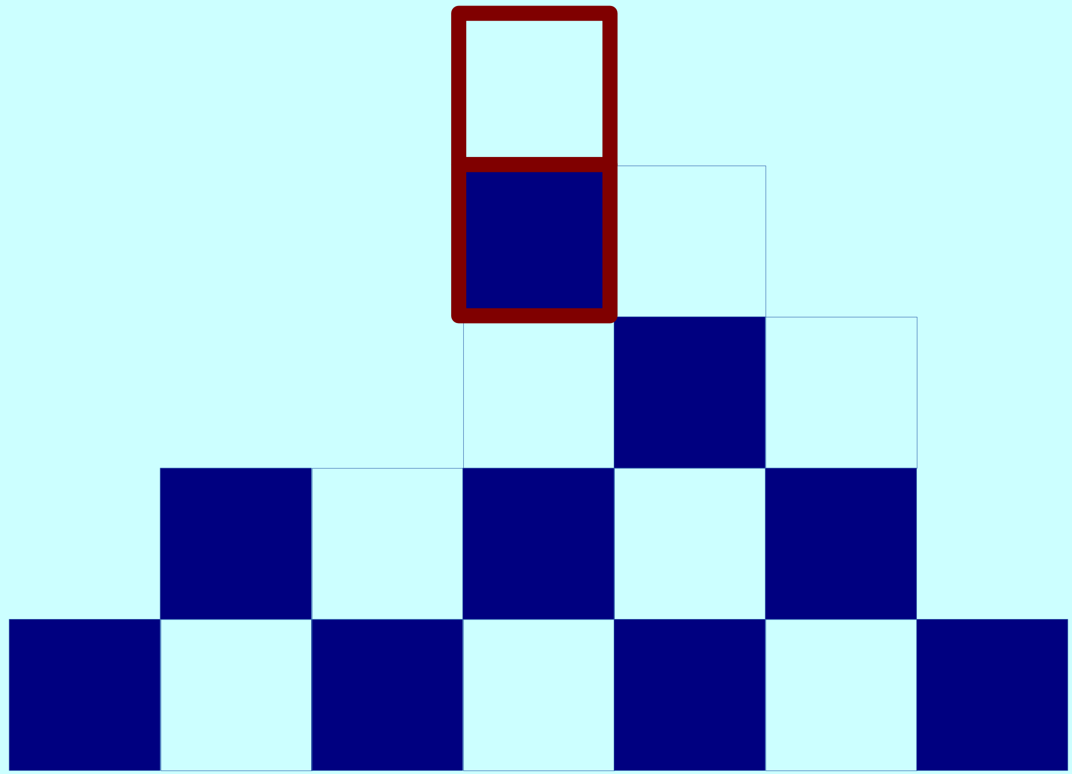
Preuve facile (non pavable car non équilibré)

algorithme de « dépavage »

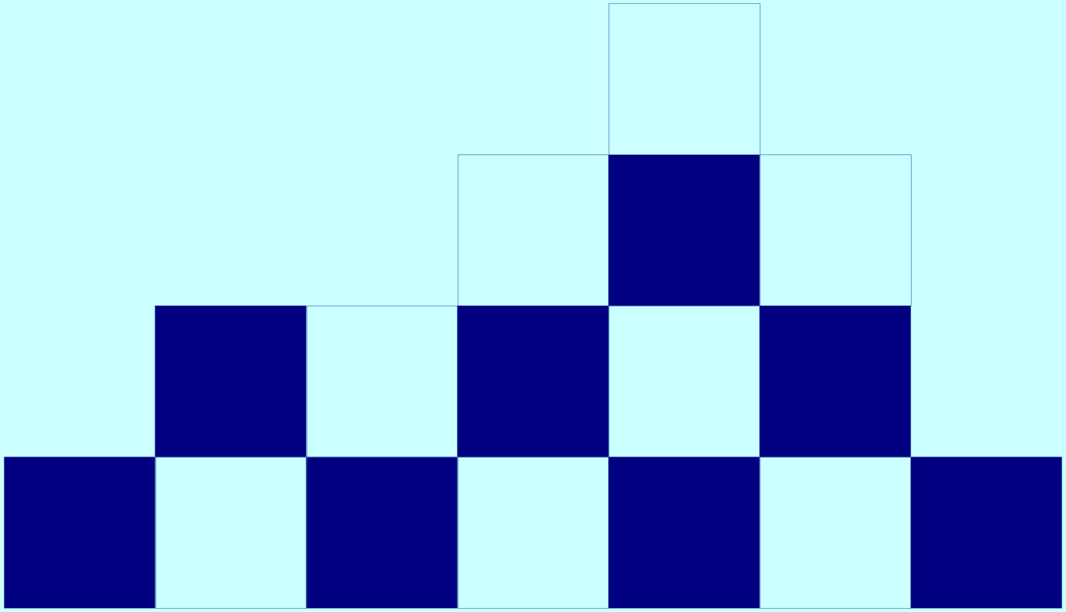
La récurrence fournit un algorithme de pavage



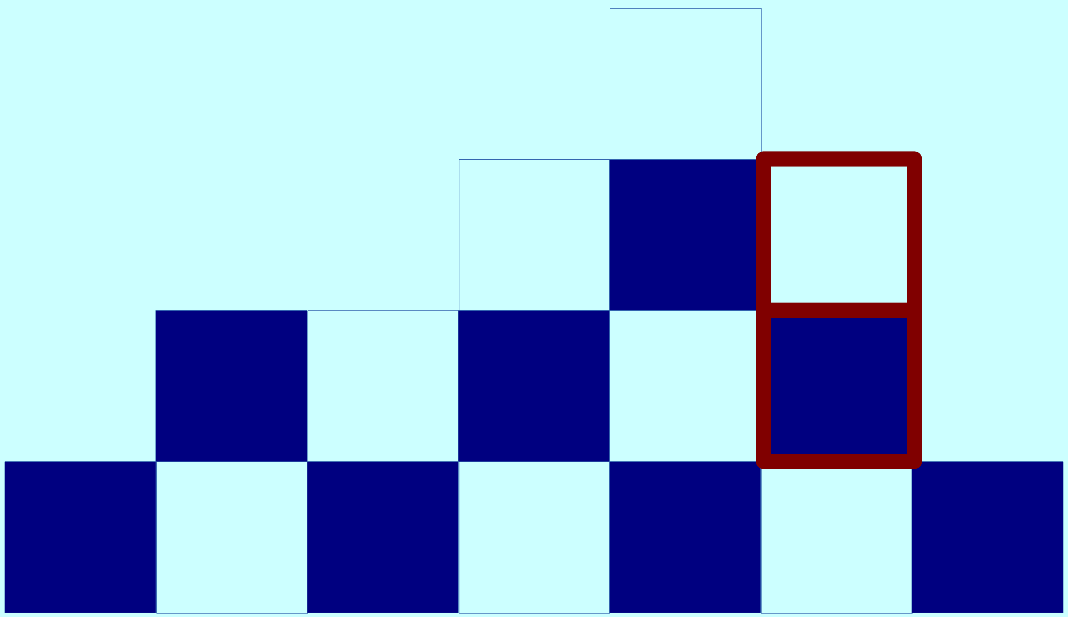
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



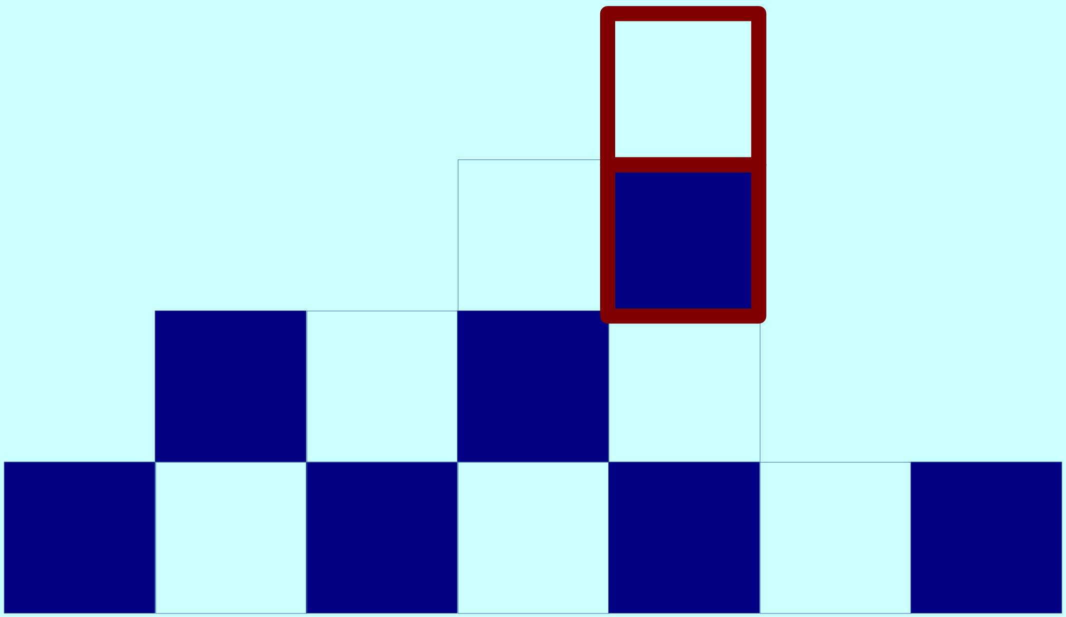
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



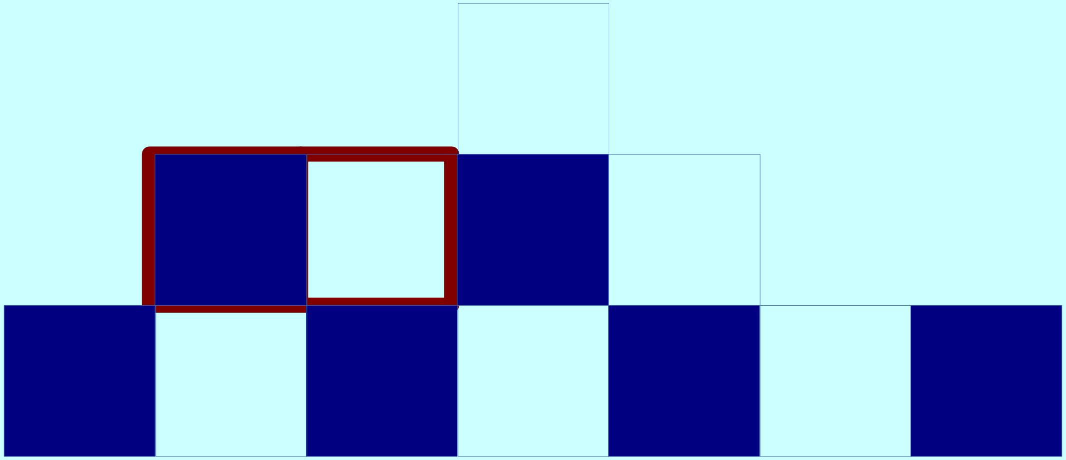
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



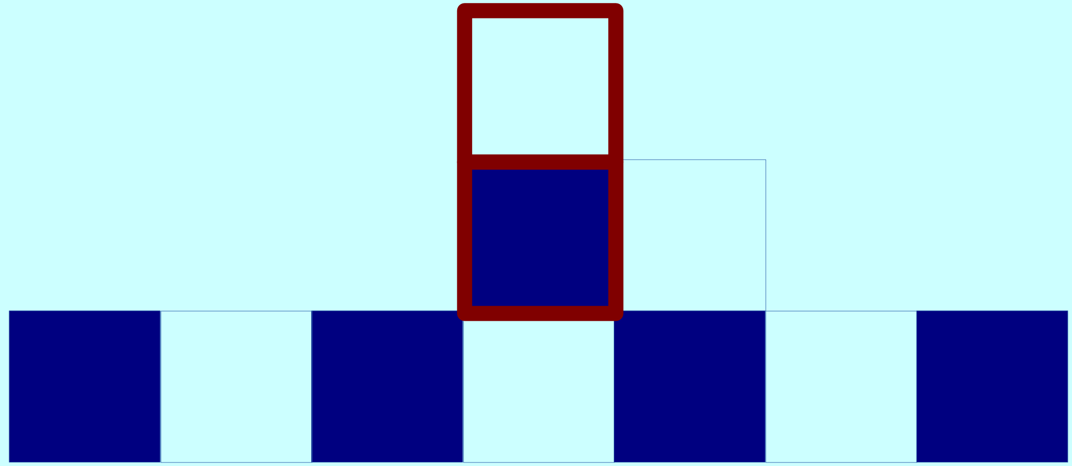
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



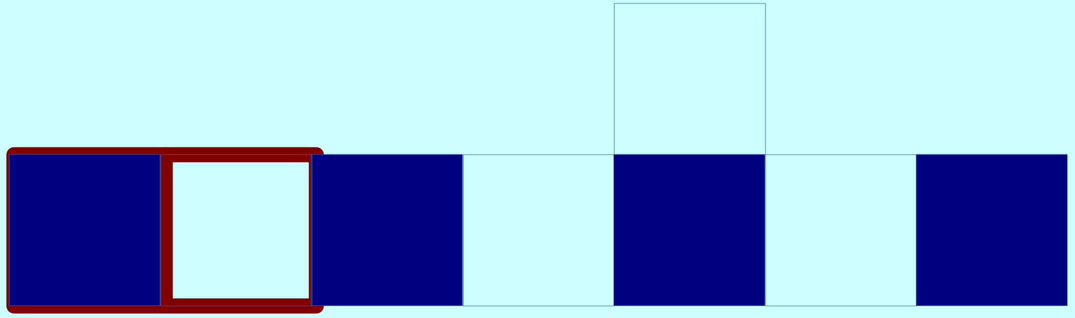
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



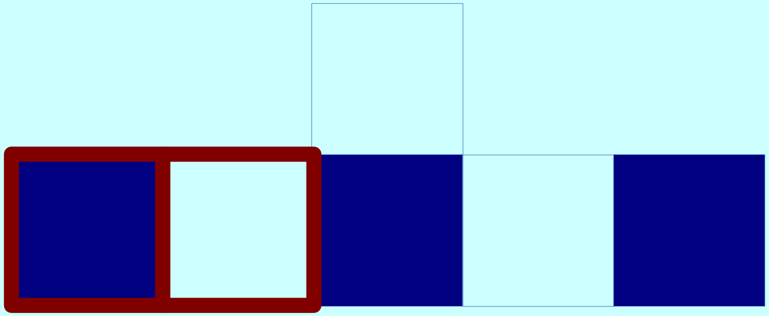
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



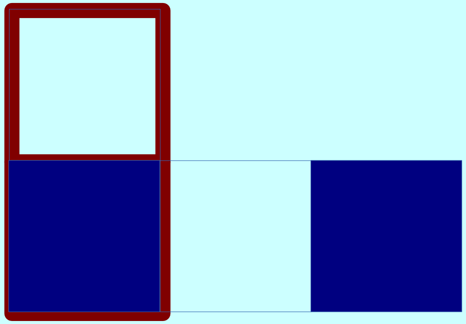
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



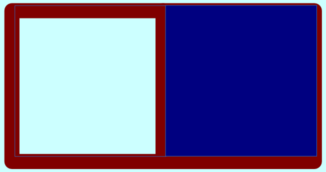
algorithme de « dépavage » - récurrence P3



algorithme de « dépavage » - récurrence P3



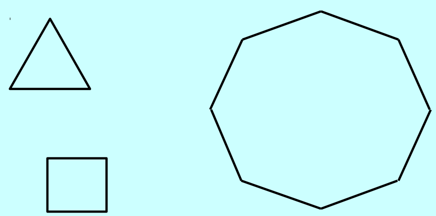
algorithme de « dépavage » - récurrence P3

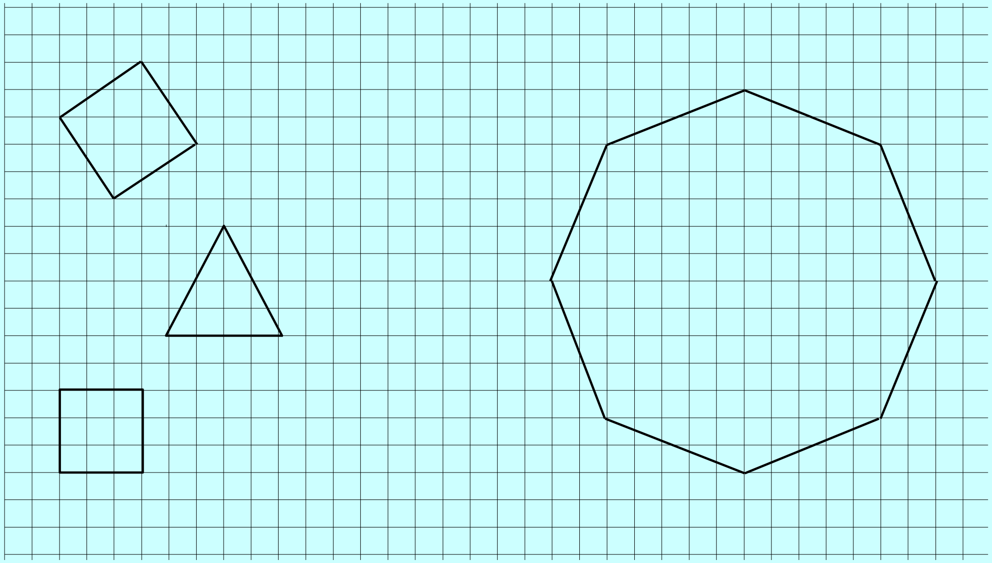


Quand l'absurde rencontre la récurrence

Polygones à sommets entiers

Pour quelles valeurs de *n* peut-on construire des *n*-polygones réguliers dont tous les sommets sont à coordonnées entières ?





n = 4. Exemples de différentes tailles et positions sur la grille.

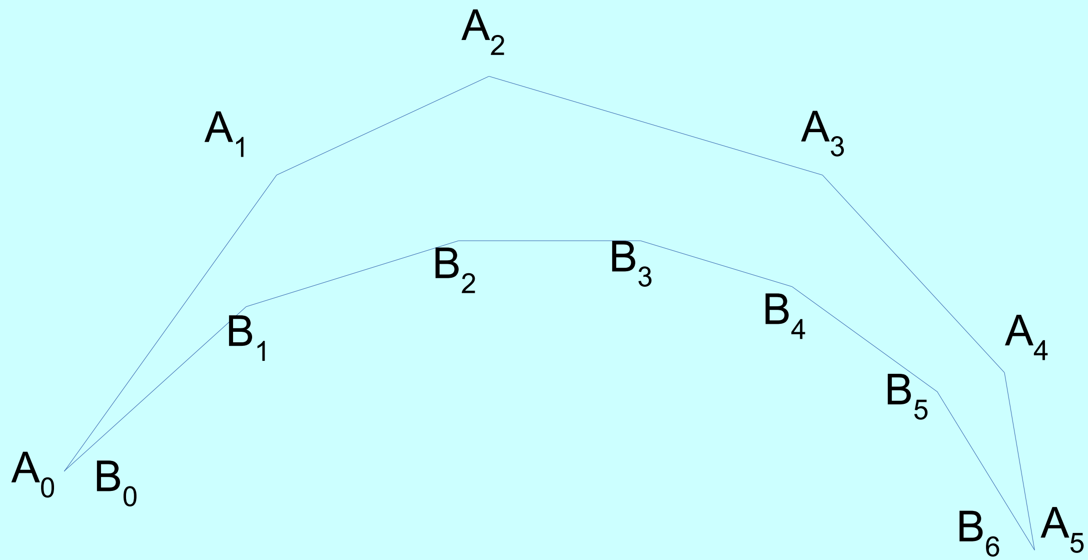
Et pour *n*=3 ? *n*=5? *n*=8?

Autre problème. Lignes polygonales convexes

Conjecture. Toute ligne polygonale située à l'intérieur de d'une ligne polygonale convexe donnée et de mêmes extrémités est de longeur plus petite.

$A_0\ A_1 \ldots A_n$ sommets de la ligne polygonale convexe donnée, et $B_0\ B_1 \ldots B_m$ ceux d'une ligne polygonale convexe à l'intérieur de la première, telles que $A_0 = B_0$ et $A_n = B_m$,

la propriété se traduit par $l\,(B_0\ B_1 \ldots B_m) \leq l\,(A_0\ A_1 \ldots A_n)$



Et pour finir (provisoirement) …
l'arbre, objet inductif par excellence **!**

Deux définitions inductives de l'arbre

Definition 1- Un arbre est soit un point, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant.

(définition inductive ascendante, dynamique constructive)

Definition 2- G est soit un point isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant est soit un arbre, soit un point isolé.

(définition inductive descendante, dynamique constructive)

cf. Un problème de définition dans la thèse de Cécile Ouvrier-Buffet

Références

Colipan Ximena (2014) Étude didactique de SiRC concernant des jeux combinatoires de type Nim, thèse de l'UJF Grenoble, ch. XI et XII

Grenier D. (2015) a didactical study of the concept of induction, *CERME9* Prague

Grenier D. (2014) La notion de répétition, obstacle épistémologique à la construction du concept de récurrence ? Exposé au séminaire « Du mot au concept : répétition » du LSE Université Pierre-Mendès France, Grenoble

Grenbier D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence, *petit x* 88, 27-47 IREM de Grenoble

Grenier D. (2012) La récurrence, concept mathématique et outil de preuve. Actes du colloque EMF février 2012 Genève.

Grenier D. (2010) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, Actes du séminaire national de DDM, Paris 2009.

Grenier D. (2003) The concept of « induction » in mathematics, Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education, vol.3. ed. Gagatsis ; Nicosia Cyprus.

Grenier D. (2001), Learning proof and modeling. Inventory of fixtures and new problems. Actes du 9ème International Congress for Mathematics Education, Tokyo, Août 2000.

Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes RDM vol. 18.1, pp. 59-100, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Ouvrier-Buffet C. (2003) Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques. Thèse de l'UJF Grenoble

La récurrence dans l'enseignement en France au lycée (1ère S et TS)

Récurrence = Mode de génération ou procédé de définition d'un type de suites numériques. La suite est parfois associée à une fonction

Deux types de problèmes
- calcul d'une suite récurrente (avec tableur ou calculatrice)
- représentation graphique d'une suite définie par récurrence

En Terminale S

- Présentée comme un *principe* dans le thème « suites et fonctions »
- Des précautions particulières pour introduire cette notion
- Analogies et images ascendantes (échelle, escalier (infini) , sucres empilés)
- La récurrence est donnée comme un principe de raisonnement,
  ou un « théorème » … jamais démontré !
- Enoncé du principe sous la seule forme « ascendante »simple (sauf exceptions)
- P(n) est exclusivement une fonction analytique (algébrique) de n
- Notations : Pn (notation des suites), plus rarement P (n)
- L'initialisation est donnée, ou facile à découvrir (0 ou 1) et située systématiquement au premier pas du principe
- Evoquée rarement : l'équivalence avec la *propriété*

« T**out ensemble non vide d'entiers positifs admet un plus petit élément »**
mais alors il est recommandé de « ne pas entraîner les élèves dans ces subtilités »

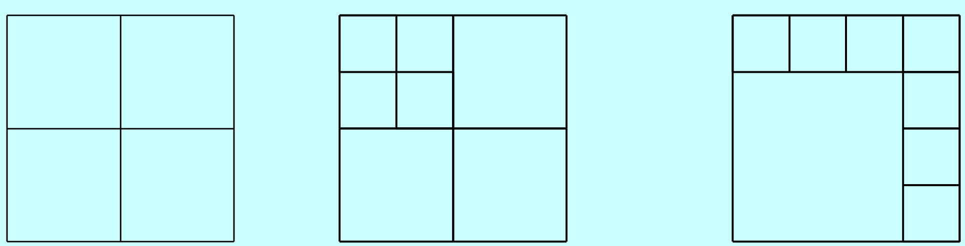
Exemple. SiRC : « *n* carrés dans un carré »

(groupe logique IREM)

Pour quelles valeurs de n est-il possible de partager un carré en n carrés ?

Les premières valeurs de n sont les carrés parfaits : 4,9,16,
Ce qui induit tous les partages de type $n=p^2$

À partir de n=4, on trouve n=7, puis 10, etc..
On génère ainsi tous les 4+ 3p comme ci-dessous



On peut aussi créer d'autres suites inductives