

Suites récurrentes à la transition Lycée Université : exemples de difficultés d'élèves et d'étudiants

Macarena Flores González

Réunion IREM CIIL - CIIU

19 mars 2022



Intérêt à la transition Lycée-Université

Contexte de thèse soutenue en novembre 2021.

- Problématique d'intérêt national (France Stratégie, 2017) et international (colloques ICMI, CERME,...).
- Difficultés dans l'apprentissage de l'Analyse (Artigue, 2003) : notions de suite, de fonction, de nombres réels, de limite.
- Les élèves amalgament les concepts de suite et de fonctions (Rousse, 2018).
- Intérêt épistémologique des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Comment étudie-t-on une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?

Nous avons besoin de :

- Un premier terme
- Une relation $u_{n+1} = f(u_n)$
- Un intervalle stable par f

Comment étudie-t-on une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?

- Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. Et soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Comment étudie-t-on une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?

- On étudie la fonction f (monotonie, croissance,...)
- Chercher les limites possibles de la suite ($f(x) = x$)
- Étudier le comportement de la fonction dans l'intervalle I
- Si f est croissante sur I : (u_n) monotone
- Si f est décroissante sur I : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.
- Etc...

Examen proposé en L1

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exemples de réponses d'étudiants de L1

Contexte :

- Examen de décembre 2018.
- Calculatrices interdites.
- 40 productions des étudiants en 1ère année CPEI.

Exemples de réponses d'étudiants de L1

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(n) = f(x) \in [0, 1]$
alors $\forall x \in [0, 1]$, $u_n \in [0, 1]$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et donc $u_n = f(n) = f(x) \in [0, 1]$
alors $\forall x \in [0, 1]$, $u_n \in [0, 1]$

$$u_{n+1} = f(u_n) \cong u_n = f(n)$$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

Si $f(u_n) = f(x)$ alors $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0; 1]$

Donc $f(x) \in [0; 1] \forall x \in [0; 1]$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

S $f(u_n) = f(x)$ alors $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0; 1]$
Donc $f(x) \in [0; 1] \forall x \in [0; 1]$

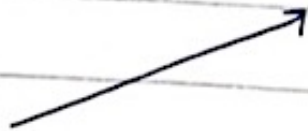
$$u_{n+1} = f(u_n) \cong u_n = f(n)$$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2) $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$ ~~soit~~ $f(x) = \frac{1}{2-x}$

$f'(u_n) = \frac{1-x}{(2-x)^2}$ avec $1-x \geq 0$
 $\Rightarrow x \leq 1$

u_n	0	1
$f'(u_n)$		+
$f(u_n)$		

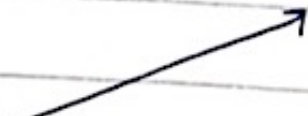
la suite u_n est croissante sur $[0, 1]$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2) $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$ ~~soit~~ $f(x) = \frac{1}{2-x}$

$f'(u_n) = \frac{1-x}{(2-x)^2}$ avec $1-x \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq 1$

u_n	0	1
$f'(u_n)$		+
$f(u_n)$		

la suite u_n est croissante sur $[0, 1]$

Exemples de réponses d'étudiants de L1

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

③ Si la suite converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{-n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = -\infty$.

Par quotient de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exemples de réponses d'étudiants de L1

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

③ Si la suite converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{-n}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = -\infty$.

Par quotient de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exemples de réponses d'étudiants de L1

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3 et 4) Pour montrer que la suite converge, il faut déterminer la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$. $\checkmark$

$\lim_n f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0^-$

donc $\lim_n f(u_n) = 0^-$

la suite u_n converge vers 0^- .

Exemples de réponses d'étudiants de L1

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3 et 4) Pour montrer que la suite converge, il faut déterminer la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$ ~~1/11~~

$\lim_n f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0^-$

donc $\lim_n f(u_n) = 0^-$

la suite u_n converge vers 0^- .

Premiers constats

- Pour montrer que la suite est bornée (question 1), 35% de réponses ont des écritures du type :

$$\ll u_n = f(n) = f(x) \gg \text{ ou } \ll f(x) = f(u_n) \gg$$

- Pour montrer la croissance de la suite (question 2), 30% des étudiants utilisent le théorème en acte :

$$\ll \text{si } f \text{ croissante alors } (u_n) \text{ est croissante} \gg$$

- Pour montrer la convergence de la suite (question 3), 28% des étudiants argumentent que

$$\textit{la limite de } (u_n) \textit{ dépend de la limite de } f$$

Problématique

Quelques aspects théoriques

Tout ce qui précède montre un **manque** dans les activités mathématiques développées par les étudiants de L1 :

- Manque de **contrôle** sur les objets manipulés (suite et/ou fonction)
- Manque de **reconnaissance** des propriétés à mobiliser (sur les suites et/ou les fonctions) pour l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

(Vandebrouck et Robert, 2017; Rogalski, 2015)

Problématique

Quelques aspects théoriques

Tout ce qui précède montre un problème selon des dimensions que nous supposons comme cruciales dans le travail mathématique :

- **Sémiotique** : Travail avec les représentations des objets (signes) et leur visualisation.
- **Instrumentale** : Travail avec des outils (numériques ou pas) et les constructions que l'on peut faire avec
- **Discursive** : Travail à partir des arguments théoriques (système de référence) pour donner une preuve.

(Kuzniak et al. 2016)

Problématique

Examen proposé en L1

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2-x}$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions : $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. Puis que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Problématique

Quelques aspects théoriques

Ces résultats montrent un problème dans les dimensions essentielles pour le développement du travail mathématique :

- **Sémiotique** : Travail avec les représentations des objets (signes) et leur visualisation.
- **Instrumentale** : Travail avec des outils (numériques ou pas) et les constructions que l'on peut faire avec
- **Discursive** : Travail à partir des arguments théoriques (système de référence) pour donner une preuve.

(Kuzniak et al. 2016)

Problématique

Quelques aspects théoriques

Ces résultats montrent un problème dans les dimensions essentielles pour le développement du travail mathématique :

- **Sémiotique** : Travail avec les représentations des objets (signes) et leur visualisation.
- **Instrumentale** : Travail avec des outils (numériques ou pas) et les constructions que l'on peut faire avec
- **Discursive** : Travail à partir des arguments théoriques (système de référence) pour donner une preuve.

(Kuzniak et al. 2016)

Problématique

Quelques aspects théoriques

Ces résultats montrent un problème dans les dimensions essentielles pour le développement du travail mathématique :

- **Sémiotique** : Travail avec les représentations des objets (signes) et leur visualisation.
- **Instrumentale** : Travail avec des outils (numériques ou pas) et les constructions que l'on peut faire avec
- **Discursive** : Travail à partir des arguments théoriques (système de référence) pour donner une preuve.

(Kuzniak et al. 2016)

Situation construite (pour la TS)

Caractéristiques :

- 2 classes de TS des enseignants de l'IREM de Paris.
- Adaptation de la tâche de l'examen selon le modèle de Baccalauréat (modèle Bac 2016).
- Grâce à l'utilisation de la calculatrice (TI-83 ou Casio Graph) :

Possibilité de contrôle et aide à la reconnaissance des propriétés de la suite.

Activation des dimensions instrumentale et sémiotique.

Situation construite (pour la TS)

PARTIE A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation : $f(x) = x$.
- 2) Étudier le sens de variation de f .
- 3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.

Situation construite (pour la TS)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_2 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0,9
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

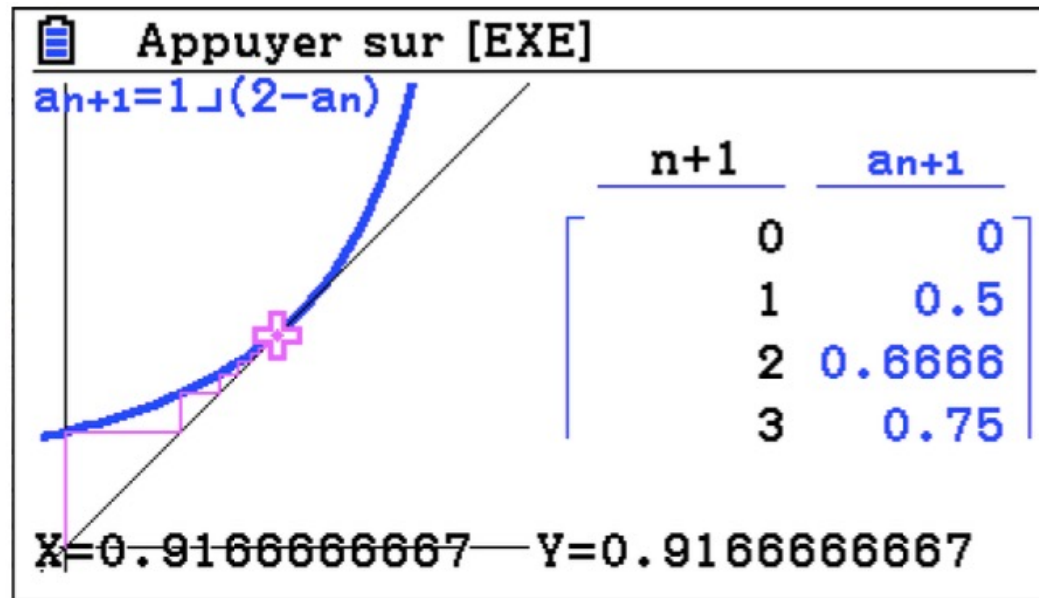
B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

Situation construite (pour la TS)



Analyse arithmético-géométrique [A1]

Situation construite (pour la TS)

Ne modifiez plus vos réponses aux parties A et B, vous pourrez revenir sur vos réponses dans la partie D

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?



Analyse calculatoire [A2]

Expérimentations en TS

- 1^o) Situation de résolution individuelle
- 2^o) Situation de résolution avec l'enseignant
- 3^o) Situation de résolution « individuelle » à la maison

1^o et 2^o Expérimentations en TS

1^o) Situation de résolution individuelle

- Devoir sur table (octobre 2019)
- 30 élèves

2^o) Situation de résolution avec l'enseignant (Oct.-Nov. 2019)

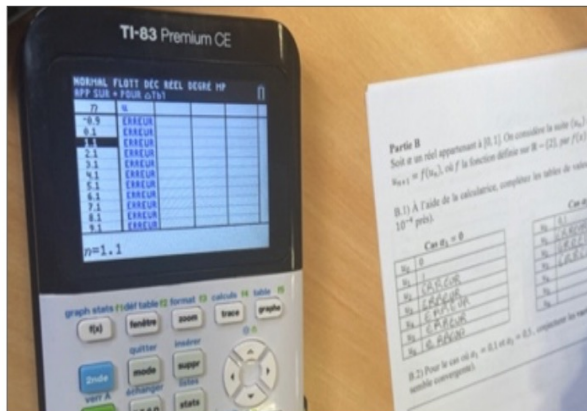
- Bilan de l'enseignant (octobre-novembre 2019)
- 32 élèves

* Classification des réponses en travail : *correct*, *incomplet* et *non correct*.

Partie B : 1^o expérimentations en TS

- 17/30 élèves reconnaissent la bonne suite récurrente.
- 9/30 font la confusion $f(u_n)$ et $f(n)$.
- 15/17 ont des reconnaissances partielles concernant les propriétés de (u_n) .

Exemple de contrôle



Production élève avant contrôle :

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	1
u_2	ERREUR
u_3	ERREUR
u_4	ERREUR
u_5	ERREUR
u_6	ERREUR



Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,6667
u_3	0,7500
u_4	0,8
u_5	0,8333
u_6	0,8571

Cas $\alpha_2 = 0,1$

u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6786
u_3	0,7568
u_4	0,8044
u_5	0,8364
u_6	0,8594

Partie B : 1^{re} expérimentations en TS

- 17/30 élèves reconnaissent la bonne suite récurrente.
- 9/30 font la confusion $f(u_n)$ et $f(n)$.
- 15/17 ont des reconnaissances partielles concernant les propriétés de (u_n) .

Exemple manque de contrôle et de reconnaissance

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,1$		Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0	u_0	0,1	u_0	0,5
u_1	0,3	u_1	0,3	u_1	0,3
u_2	0,25	u_2	0,25	u_2	0,25
u_3	0,2	u_3	0,2	u_3	0,2
u_4	0,17	u_4	0,17	u_4	0,16
u_5	0,14	u_5	0,14	u_5	0,14
u_6	0,125	u_6	0,125	u_6	0,125

La suite semble ~~croissante puis décroissante~~
Elle semble être convergente, et sa limite serait 0.

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? On a rentré la suite $\frac{1}{2-(n-1)}$ on a tapé table et on a noté les solutions.

Partie B : 2^o expérimentations en TS

- 24/32 élèves reconnaissent la bonne suite récurrente.
- 1/32 confusion $f(u_n)$ et $f(n)$.
- 24/32 ont des reconnaissances partielles.

Exemple d'aide de l'enseignant

Au début de la partie B :

« La suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ça veut dire que u_{n+1} est égale à 1 sur 2 moins u_n , avec un terme initial quelque chose... »

Partie B : 2^o expérimentations en TS

- 24/32 élèves reconnaissent la bonne suite récurrente.
- 1/32 confusion $f(u_n)$ et $f(n)$.
- 24/32 ont des reconnaissances partielles.

Exemple d'aide de l'enseignant



Enseignant (20.15) : *Ça va de moins 3000 à plus 3000 et de moins 600 à 600. On ne voit pas grand-chose... (l'enseignant programme la calculatrice de l'élève, puis il dit à toute la classe) Si vous faites une recherche graphique, pensez à régler la fenêtre...*

Bilan partie B : 1^o et 2^o expérimentations en TS

1^o expérimentation :

- Reconnaissance de la croissance de la suite globalement bien réussie.
- Convergence plus difficile à reconnaître (valeur de la limite, adoption d'une perspective locale).

2^o expérimentation :

- Effet professeur (aides de l'enseignant) : Tous les élèves reconnaissent la croissance, la convergence et la valeur de la limite (même 3 élèves qui n'ont pas les tableaux de valeurs correctes).

Partie C : Question C.1 (suite bornée)

1 ^o Expérimentation	2 ^o Expérimentation (prof)
10/15 élèves répondent	23/24 élèves répondent
4 analyse calculatoire : 1 correct - 3 incomplets	23 analyse calculatoire : • 21/23 reconnaissent la preuve par récurrence (14 incomplets). • 2/23 raisonnent avec des inégalités.
5 encore a. arithmético-géométrique : 4 incomplets - 1 non correct	0 analyse arithmético-géométrique
1 travail « ? » : incomplet	0 travail « ? »

Question C.1 (suite bornée)

1^o Expérimentation TS

- 10/15 élèves répondent
- 4 analyse calculatoire (1 correct - 3 incomplets)
- 5 encore analyse arithmético-géométriques (4 incomplets - 1 non correct)
- 1 travail « ? » (incomplet)

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f(1) = 1$ ni ayant pas de variation anormale dans l'encadrement sur $[0, 1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0, 1]$	«N'ayant pas de variation anormale dans l'encadrement $[0, 1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0, 1]$ »
--	--

Question C.1 (suite bornée)

2^o Expérimentation TS

- 23/24 élèves répondent
- 23 analyse calculatoire (pas d'analyse arithmético-géométrique).
- 21/23 reconnaissent la preuve par récurrence (14 incomplets).
- **2/23 raisonnent avec des inégalités.**

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 2 &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ } u_n \text{ appartient à } [0; 1]. \end{aligned}$$

Quels contrôles ?

Bilan question C.1 (suite bornée)

Bilan 1^o et 2^o expérimentations en TS

- Les élèves semblent mieux entrer dans C.1 car ils ont des moyens de contrôles à partir de leur travail fait dans la partie B. Mais ce type de travail peut représenter aussi un frein (élèves en autonomie).
- Les élèves qui travaillent avec l'intervention de l'enseignant travaillent tous dans l'analyse calculatoire, et la plupart reconnaît la preuve par récurrence.
- Dans les deux expérimentations on retrouve les notations du type $f(x) = f(u_n)$.

Question C.2 (suite croissante)

1 ^o Expérimentation	2 ^o Expérimentation (prof)
10/15 élèves répondent	18/24 élèves répondent
4* élèves analyse calculatoire : 1 correct, 1 incomplet, 2 non correct.	15 élèves analyse calculatoire : 0 correct, 9 incomplet, 6 non correct.
5* élèves a. arithmético-géométrique : 4 incomplet et 1 non correct.	3 élèves a. arithmético-géométrique : 2 incomplet et 1 non correct.
1 élève travail « ? » : incomplet	0 élève travail « ? »
4 élèves utilisent le théorème en acte : « f croissante donc (u_n) croissante ».	3 élèves utilisent le théorème en acte : « f croissante donc (u_n) croissante ».

Question C.2 (suite croissante)

1^o Expérimentation en TS

- 10/15 élèves répondent
- 4 élèves analyse calculatoire : 1 correct, 1 incomplet, 2 non correct.
- 5 élèves analyse arithmético-géométrique : 4 incomplet et 1 non correct.
- 1 élève travail « ? » : incomplet
- 4 élèves utilisent le théorème en acte : « f croissante donc (u_n) croissante ».

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
u_n	$-$	0	$+$	$+$
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Question C.2 (suite croissante)

1^o Expérimentation en TS

- 10/15 élèves répondent
- 4 élèves analyse calculatoire : 1 correct, 1 incomplet, 2 non correct.
- 5 élèves analyse arithmético-géométrique : 4 incomplet et 1 non correct.
- 1 élève travail « ? » : incomplet
- 4 élèves utilisent le théorème en acte : « f croissante donc (u_n) croissante ».

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_n &= \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2-n} \\ &= \frac{1}{-n} - \frac{1}{2-n} \\ &= \frac{1}{(2-n)-n} - \frac{1(1-n)}{(2-n)-n} \\ u_{n+2} - u_n &= \frac{1+1}{-2n+n^2} = \frac{2+n}{-2n+n^2} \end{aligned}$$

Question C.2 (suite croissante)

2^o Expérimentation en TS

- 18/24 élèves répondent
- 15 élèves analyse calculatoire : 0 correct, 9 incomplet, 6 non correct.
- 3 élèves analyse arithmético-géométrique : **2 incomplet** et 1 non correct.
- 3 élèves utilisent le **théorème en acte** : « *f* croissante donc (u_n) croissante ».

« $u_n < u_{n+1}$ car la fonction est croissante »

Bilan question C.2 (suite croissante)

Bilan 1^o et 2^o expérimentations en TS

- Le travail dans le paradigme A1 favorise l'engagement jusqu'à la question C2 (travail incomplet) lorsque les élèves sont en autonomie.
- Les élèves qui sont accompagnés par l'enseignant ne produisent pas de travail correct.
- Théorème en acte : « *f croissante donc (u_n) croissante* » présent dans les deux classes.

Question C.3 (convergence de la suite)

1 ^o Expérimentation	2 ^o Expérimentation (prof)
7/15 élèves répondent	23/24 répondent (alors que seulement 18 ont répondu C.2).
3 élèves analyse calculatoire : 1 correct (théorème), 2 non corrects	22 élèves analyse calculatoire : 21 correct (théorème), 1 incomplet
3 élèves a. arithmético-géométrique : incomplet	0 élèves a. arithmético-géométrique
1 élève travail « ? » : non correct	1 élève travail « ? » : non correct (essai calcul limite de f)

[A1] permet de continuer à travailler jusqu'à C.3 même si le travail est incomplet.

Question C.3 (convergence de la suite)

1^o Expérimentation en TS

- 7/15 élèves répondent
- 3 élèves analyse calculatoire : 1 correct (théorème), 2 non corrects
- 3 élèves analyse arithmético-géométrique : incomplet
- 1 élève travail « ? » : non correct

d'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? oui avec le tableau
--	---

Question C.3 (convergence de la suite)

1^o Expérimentation en TS

- 7/15 répondent
- 3 élèves analyse calculatoire : 1 correct (théorème), 2 non corrects
- 3 élèves analyse arithmético-géométrique : incomplet
- 1 élève travail « ? » : non correct

The image shows handwritten mathematical work. The top part shows a limit calculation: $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n) = \frac{1+n}{-2n+n^2} = \frac{+\infty}{-\infty} \cdot \frac{2}{-1} = -2$. The bottom part shows a crossed-out calculation: $\frac{1}{-2n} + \frac{n}{n^2} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{-1+2}{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

Question C.3 (convergence de la suite)

1^o Expérimentation en TS

B.3 : On peut dire que que α est croissant converge vers 0,9 pour tout $\alpha \in [0;1]$

C.1 : Preuve par récurrence. Travail incomplet dans A2.

C.2 : Méthode $u_{n+1} - u_n$. Travail correct dans A2.

C.3 : La suite est croissante et est majorée par 1 elle converge

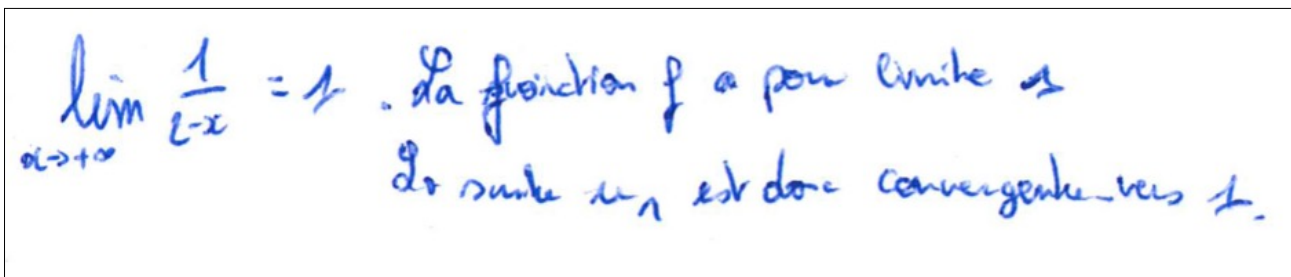
1 seul élève mène son raisonnement correct en A2 jusqu'au bout avec des contrôles dans ses résultats (dès la partie B).

Fin du travail La suite tend vers 1 et non pas vers 0,9 mais elle est croissante et elle converge

Question C.3 (convergence de la suite)

2^o Expérimentation en TS

- 23/24 répondent (alors que seulement 18 ont répondu C.2).
- 22 élèves analyse calculatoire : 21 correct (théorème), 1 incomplet
- 0 élève a. arithmético-géométrique
- 1 élève travail « ? » : non correct (essai calcul limite de f)



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1$. La fonction f a pour limite 1.
La suite u_n est donc convergente vers 1.

Question C.3 (convergence de la suite)

2^o Expérimentation en TS

- 23/24 répondent (alors que seulement 18 ont répondu C.2).
- **22 élèves analyse calculatoire : 21 correct (théorème)**, 1 incomplet
- 0 élève a. arithmético-géométrique
- 1 élève travail « ? » : non correct (essai calcul limite de f)

(u_n) est croissante et majorée par 1,
donc elle converge vers 1.

Travail « correct » mais peut-être artificiel ...

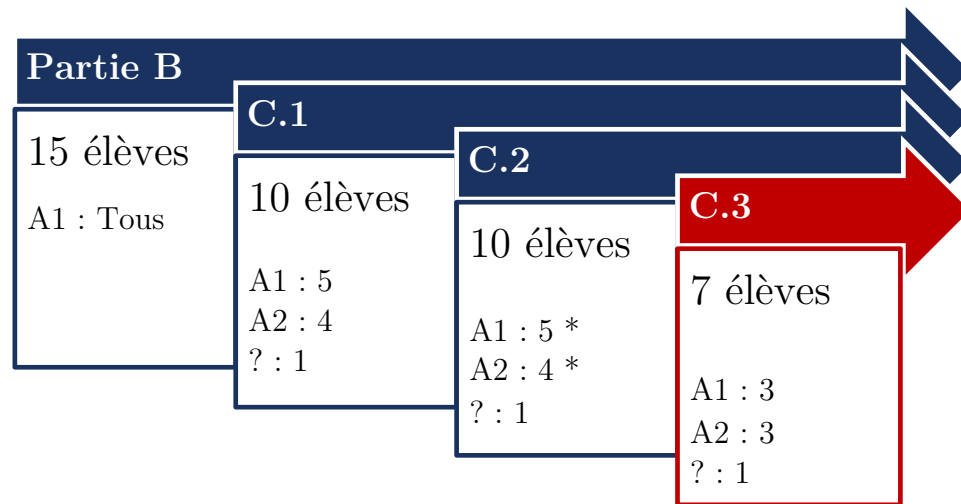
Bilan question C.3 (convergence de la suite)

Bilan 1^o et 2^o Expérimentations en TS

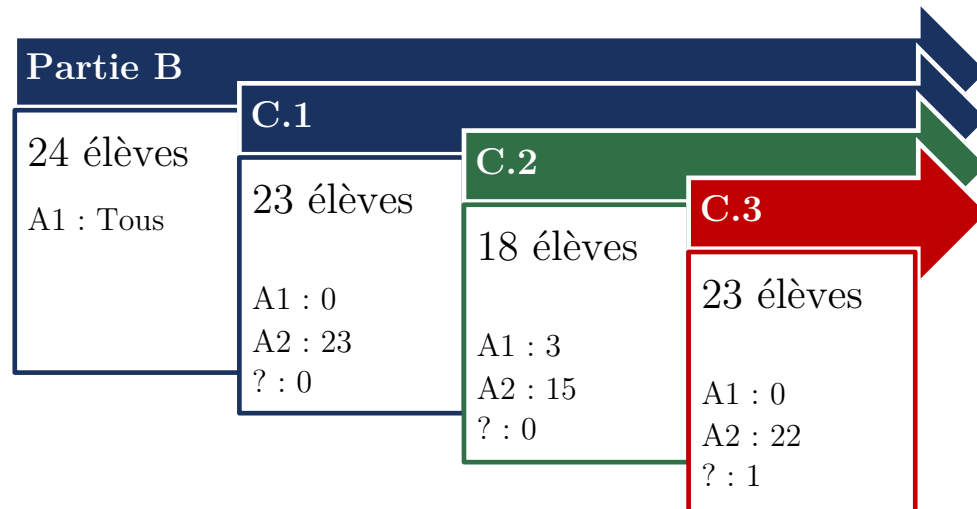
- Parmi les élèves en autonomie, 1 seul reconnaît le théorème. Les élèves qui travaillent dans une analyse arithmético-géométrique produisent un travail incomplet, tandis que ceux qui travaillent dans une analyse calculatoire (sauf une exception) produisent un travail non correct et sans contrôle.
- Les élèves qui comptent avec l'aide de l'enseignant peuvent produire un travail correct, même s'ils n'ont pas travaillé en C.1 et/ou en C.2.

Bilan 1^o et 2^o expérimentations en TS

1^o expérimentation



2^o expérimentation



En conclusion ...

- Malgré l'introduction de moyens de contrôle instrumentale et sémiotique, on trouve des élèves qui ne reconnaissent pas la suite récurrente et la traitent comme $u_n = f(n)$ (analyse calculatoire ou arithmético-géométrique).
- Le travail effectué dans la partie B est un bon précurseur pour entrer dans la partie C, mais aussi un frein chez certains élèves (ils restent dans une analyse arithmético-géométrique).
- Des élèves qui n'articulent pas le travail entre l'analyse calculatoire et l'analyse arithmético-géométrique (malgré le travail fait au lycée).
- Dialectique entre les deux types d'analyse à expliciter et à approfondir.
- Des élèves dans une analyse calculatoire produisent un travail non correct, tandis que d'autres dans une analyse arithmético-géométrique produisent un travail incomplet.

En conclusion...

- Partie B - [A1] : Les interventions de l'enseignant « forcent » les sous-activités de reconnaissance (bonne suite récurrente, contrôle instrumental, contrôle sémiotique).
- Partie C - [A2] : L'intervention de l'enseignant incite le changement de type d'analyse vers le calculatoire dans la partie C.1 (preuve par récurrence).
- Rôle de l'enseignant et bilan : explicitation dialectique entre les deux types d'analyse et aides dans le contrôle.
- Dialectique [A1]-[A2] et usage de la calculatrice : problème important de transition L-U.
- Objet mathématique $u_{n+1} = f(u_n)$ riche qui mobilise des connaissances essentielles à la transition L-U (fonction, suite, nombres réels, limite) : mérite plus d'attention.
- Résultats sur des nouvelles difficultés des élèves à la transition.

Quelques références

- Artigue, M. (2003). Evolutions et perspectives de l'enseignement de l'analyse au lycée. *IREM de Strasbourg*, 107, 1-18.
- Flores González, M., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2022). A classic recursive sequence calculus task at the secondary-tertiary level in France. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
- Flores González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020). Suites définies par récurrence dans la transition lycée-université : activité et travail mathématique. *Proceedings of the Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, (INDRUM 2020, 12-19 September 2020)* (pp. 83-92). Bizerte, Tunisia : University of Carthage and INDRUM.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling : An Introduction. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739-754.
- Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée : Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* [Thèse de Doctorat]. Université Paris Diderot.
- Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2-3), 333-382.