

Des programmes pour calculer et compter

CII - journées de Dijon

Exemple 1

1. Programmer le calcul de u_{100} avec :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = 4 \times u_n - 1 \end{cases}$$

2. Faire effectuer le calcul suivant : $0, 1 + 0, 2$.
3. (a) Écriture binaire de 171 et 87.
(b) Écriture en base 10 de 10011.
(c) Écriture en binaire de 45, 75.

Exemple 2

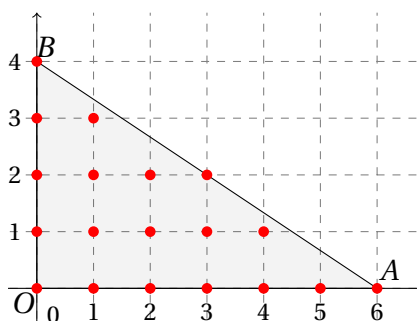
On se propose de résoudre, dans \mathbb{N}^3 , l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = 2386$ avec $a \leq b \leq c$.

1. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3a^2$ et en déduire que $a < 29$.
2. Justifier que $c^2 < 2386$ et en déduire que $c < 49$.
3. Concevoir un algorithme qui recherche de façon exhaustive tous les triplets d'entiers $(a; b; c)$ solutions de l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = 2386$ avec $a \leq b \leq c$.

Exemple 3

Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'inéquation : $5x^2 - 4xy + y^2 \leq 100$.

Exemple 4



Que vaut N lorsque les points A et B ont pour coordonnées respectives $(300; 0)$ et $(0; 400)$?

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Dans l'exemple ci-contre, on considère les points $A(6; 0)$ et $B(0; 4)$.

Le nombre N de points de coordonnées entières se trouvant à l'intérieur du triangle OAB , ou sur le triangle OAB , est égale à 19.

Exemple 5

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

On s'intéresse au nombre de triplets (a, b, c) appartenant à $\llbracket 0; N-1 \rrbracket^3$ vérifiant $a < b < c$?

1. Réaliser un programme itératif qui dénombre ces triplets pour un entier N donné.
2. Programmer la méthode de Monte-Carlo afin d'estimer ce nombre de triplets (nombre de tirages recommandé = 10^6).
3. Tester ces programmes pour $N = 100, 1000, 10000$.

Exemple 6 : Une marche aléatoire, le paradoxe des grenouilles

Une grenouille veut rejoindre une mare située à un mètre devant elle. Elle effectue pour l'atteindre des sauts supposés en ligne droite de longueur aléatoire entre 0 et 1 mètre, suivant ainsi une répartition uniforme sur $[0; 1]$. Elle atteint la mare lorsque la distance totale parcourue devient strictement supérieure à 1m.

- Quelle est la distance moyenne parcourue en deux sauts?
- Quel est le nombre moyen de sauts nécessaires pour atteindre la mare?

Exemple 7 : En vrac

1. Que calcule ce script Python?

```
from math import *
u=0
for k in range(100) :
    u=cos(u)
print(u)
```

2. On dispose d'une urne contenant 1 000 boules numérotées de 1 à 1 000. On tire simultanément deux boules de l'urne. Déterminer la probabilité que les numéros des boules tirées soient deux entiers premiers entre eux.
3. a et b désignent deux entiers naturels avec $a > b$. Dans la division euclidienne de a par b : on note q le quotient et r le reste r . On sait que $a + b = 86$ et que $r = 9$. Déterminer les couples $(a; b)$ possibles.
4. b est un entier naturel non nul. En divisant 250 par b , il reste 7 et en divisant 500 par b , il reste 5. Identifier b .