

Des exercices pour travailler les croquis

Commission Inter IREM Université

26 février 2026

Table des matières

1 Des croquis comme support de raisonnement (atelier de la journée CIIU-Lycée, Nantes 2024)	3
1.1 Énoncés	3
1.2 Objectifs, résolutions possibles, constats	3
1.2.1 Problème 1	3
1.2.2 Problème 2	4
1.2.3 Problème 3	5
2 Représentations de la convexité (ateliers APMEP Le Havre 2024 et journée CIIU-Lycée Montpellier 2025)	8
2.1 Énoncés	8
2.2 Objectifs, résolutions possibles, constats	9
2.2.1 Problème 1	9
2.2.2 Problème 2	9
2.2.3 Problème 3	10
2.2.4 Problème 4	12
3 Différentes utilisations de croquis (atelier journée CIIU-Lycée, Brest 2020)	12
3.1 Énoncé	12
3.2 Objectifs, résolutions possibles, constats	13
3.2.1 Problème 1	13
3.2.2 Problème 2	14
3.2.3 Problème 3	15
3.2.4 Problème 4	15
4 Exercices de l'article ARDM-CFEM 2018	16
4.1 Régions du plan	16
4.2 Le cercle trigonométrique	16
4.3 Représentations et équations	17
5 Exercices de l'article EpiDEMES 2025	18
5.1 Différents registres de représentation d'un ensemble de nombres	18
5.2 Preuve graphique d'une proposition algébrique implicative	19
5.3 Différents registres pour les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité dans le cadre de l'analyse	20
6 Géométrie discrète	22
6.1 Points à coordonnées entières sur une droite du plan réel	22
6.2 Équation de Fermat dans un cas particulier	24
6.2.1 Factorisation	25
6.2.2 Équation réduite de l'ellipse	25

6.2.3	Analyse des intersections	25
6.2.4	Cas d'intersection spécifique	26
7	Convexité et régionnement du plan	26
7.1	Convexité et composition	26
7.1.1	Énoncé	26
7.1.2	Objectifs, résolutions possibles et constats	27
7.2	Convexité et fonction réciproque	28

Pour tous les exercices de ce recueil, il est sous-entendu que l'on se place dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ munis de leur métrique usuelle. Cela donne en particulier de la force à une représentation dans le plan grâce à la bijection entre $\mathbb{R}^2$ et le plan.

1 Des croquis comme support de raisonnement (atelier de la journée CIIU-Lycée, Nantes 2024)

1.1 Énoncés

Pour les trois problèmes suivants, donner dans la mesure du possible, deux résolutions dans des registres différents. L'une au moins s'appuiera sur un graphique ou un dessin.

Problème 1 : On considère A , B et C trois parties d'un ensemble E . Comparer $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Problème 2 : Soit $a > 0$, un réel donné, démontrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left((|x| \leq |x + a|) \text{ ET } (|x| \leq |x - a|) \right) \Rightarrow |x| \leq \frac{a}{2}.$$

Problème 3 : L'inégalité suivante est-elle vraie pour tous les réels positifs u et v ?

$$\int_0^u x^2 dx + \int_0^v \sqrt{x} dx \geq uv.$$

1.2 Objectifs, résolutions possibles, constats

Les trois exercices sont donnés dans trois registres : ensembliste, algébrique et fonctionnel. Les représentations graphiques jouent des rôles différents selon les exercices.

1.2.1 Problème 1

Objectifs et résolutions possibles Des points d'attention possibles sont sur la façon dont est montrée l'égalité des deux ensembles (double inclusion) et sur la représentation des ensembles (généricité du dessin).

- Les patates sont utilisées au lycée dans le cadre des probabilités pour des recherches de cardinaux ou lors de la démonstration de la formule des probabilités totales.
- Limite de ce type de représentation : peut ne pas être considérée comme générique si on n'y voit pas la possibilité d'intersection vide même lorsque visuellement les ensembles s'intersectent. On peut alors représenter les 8 cas possibles.
- Très dur de représenter une position générique dès qu'on passe à 4 ensembles.
- Avec les tables de vérité en introduisant les propositions $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{C}(x)$

$$A = \{x \in E \mid \mathcal{A}(x) \text{ vraie}\} \quad B = \{x \in E \mid \mathcal{B}(x) \text{ vraie}\} \quad C = \{x \in E \mid \mathcal{C}(x) \text{ vraie}\}.$$

Démontrer $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ équivaut à démontrer que

$$\forall x \in E \quad [\mathcal{A}(x) \text{ ET } (\mathcal{B}(x) \text{ OU } \mathcal{C}(x))] \Leftrightarrow [(\mathcal{A}(x) \text{ ET } \mathcal{B}(x)) \text{ OU } (\mathcal{A}(x) \text{ ET } \mathcal{C}(x))].$$

Constats Des exemples de représentations produites par les stagiaires. Cela donne l'impression que la représentation générique de deux ensembles n'est plus un acquis pour une partie des étudiants.

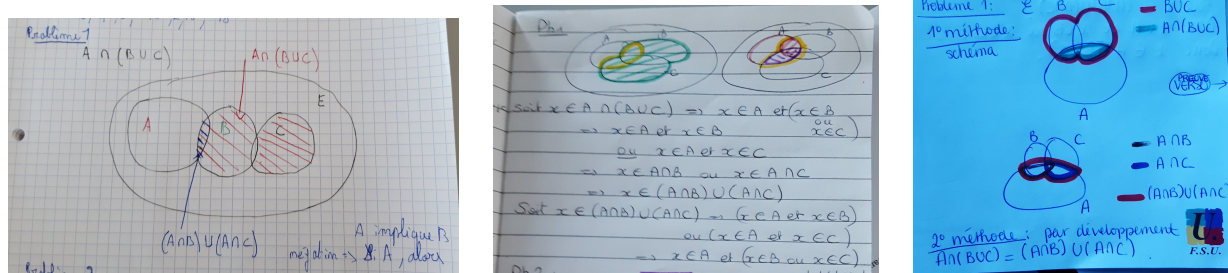


FIGURE 1 – Position générique ou non de 3 ensembles

1.2.2 Problème 2

Objectifs et résolutions possibles

- En terme de distances en restant sur la droite des réels.
- Avec les courbes représentatives des fonctions valeur absolue : on traduit une inégalité dans $\mathbb{R}$ en position relative de courbes dans $\mathbb{R}^2$, 3 représentations sur un même graphique pour pouvoir comparer.
- De façon algébrique en utilisant que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2.$$

Il est donc équivalent de démontrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left((x^2 \leq (x+a)^2) \text{ ET } (x^2 \leq (x-a)^2) \right) \Rightarrow |x| \leq \frac{a}{2}.$$

- Adaptations possibles : remplacer a par un nombre, demander d'étudier aussi le cas a négatif.

Constats Les tracés des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto |x-a|$ et $x \mapsto |x+a|$ à partir de celle de $x \mapsto |x|$ ne font pas partie des acquis des stagiaires. Lorsque des tracés différents pour une même fonction sont proposées au sein d'un groupe, ce n'est pas un réflexe de considérer des points de contrôle pour éliminer le tracé qui n'est pas correct.

Nous avons vu les 4 approches.

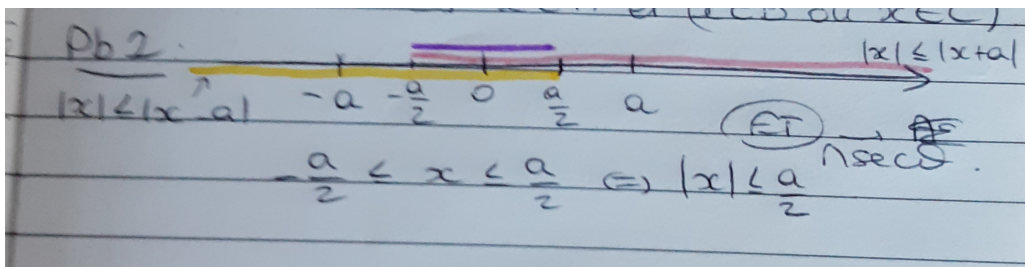


FIGURE 2 – En terme de distance

- Après calcul des intégrales cela revient à étudier l'inégalité

$$\frac{u^3}{3} + \frac{2}{3}v^{3/2} \geq uv. \quad (1)$$

C'est l'inégalité de Young $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$ avec $p = 3$ et $q = \frac{3}{2}$ (on a bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). L'inégalité de Young n'est souvent étudiée qu'en L3, on ne s'attendait donc pas à la voir.

- Avec la croissance de la fonction $\ln$, il est équivalent d'étudier l'inégalité

$$\ln\left(\frac{u^3}{3} + \frac{2}{3}v^{3/2}\right) \geq \ln(uv).$$

Or, avec la concavité de la fonction $\ln$

$$\ln\left(\frac{u^3}{3} + \frac{2}{3}v^{3/2}\right) \geq \frac{1}{3}\ln(u^3) + \frac{2}{3}\ln(v^{3/2}) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv).$$

Nous venons en fait de re-démontrer l'inégalité de Young dans ce cas particulier.

- Puisque v est positif, on peut faire le changement de variable $v = V^2$ et on doit étudier le signe de

$$u^3 + 2V^3 - 3uV^2 = (u - V)^2(u + 2V)$$

qui est toujours positif, avec égalité lorsque $u = V = \sqrt{v}$.

- On peut aussi repérer que l'inégalité (1) est une égalité lorsque $v = u^2$. Puis pour conserver ce lien en posant $t = \frac{v}{u^2}$. L'inégalité (1) est alors équivalente à

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^{3/2}\right)u^3 \geq tu^3$$

ou encore à

$$t^{3/2} \geq \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}.$$

On termine avec une étude des variations de la fonction $t \mapsto t^{3/2} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

- Sans la remarque précédente alors on est plutôt tenté de diviser par uv et cela revient à montrer que $\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t^{-1} \geq 1$ avec $t = \frac{u}{\sqrt{v}}$. A un changement de variable près, c'est la même inégalité que ci-dessus.
- On peut étudier le signe de la fonction de deux variables

$$(u, v) \mapsto \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3}v^{3/2} - uv$$

en fixant une des deux variables.

Si on fixe $v > 0$ alors la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(u) = \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3}v^{3/2} - uv$ est dérivable et de dérivée $f'(u) = u^2 - v$. L'étude du signe de f et le cas d'égalité en découlent facilement.

- En utilisant l'égalité des intégrales avec des aires et la symétrie par rapport à la première bissectrice des courbes représentatives des fonctions carré et racine (dans un repère orthonormé).

Cette représentation n'étant probablement pas la première puisqu'il est normal de commencer par la figure 4 vue en début de paragraphe.

- Si on cherche à généraliser, cela se voit bien avec les aires. Le cas d'égalité se voit aussi par le calcul en introduisant la fonction $F : u \mapsto \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} f^{-1}(x) dx$. $F(0) = 0$ et pour tout $u \geq 0$, $F'(u) = f(u) + f'(u)f^{-1}(f(u)) = f(u) + uf'(u)$. F et $u \mapsto uf(u)$ ont même dérivée et même valeur en 0, les deux fonctions sont égales sur $[0, +\infty[$.

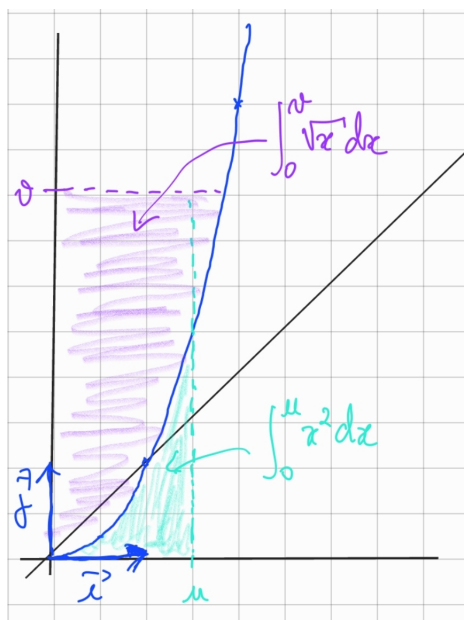


FIGURE 5 – Preuve graphique

Constats Le fait que l'on n'indique pas dans l'énoncé si l'inégalité est vraie ou fausse, a conduit en groupe qui avait vu le cas d'égalité à chercher des cas pour laquelle elle n'est pas vraie. Cette recherche infructueuse a été faite via GeoGebra et des curseurs pour u et v .

Comme prévu les premières représentations ont été analogues à celles de la figure 4. L'utilisation de la symétrie (figure 5) a été très vite vue par un des stagiaires.

Nous avons aussi eu un cas d'étude en fixant l'une des deux variables

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 x^2 &= \frac{1}{x^2} \\
 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^u + \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)_0^v & \\
 \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - uv &\geq 0 \\
 \text{on fixe } u: v \in \mathbb{N} \\
 f(v) &= \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - uv \\
 f'(v) &= \sqrt{v} - u \\
 \begin{array}{c|ccc} & 0 & u^2 & +\infty \\ \hline f(v) & - & 0 & + \\ \hline f'(v) & & \searrow & \nearrow 0 \end{array} \\
 \text{Donc } f &\geq 0. \\
 \text{on fixe } v: u \in \mathbb{N} \\
 g(u) &= \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - uv \\
 g'(u) &= u^2 - v \\
 \begin{array}{c|ccc} & 0 & \sqrt{v} & +\infty \\ \hline g(u) & - & 0 & + \\ \hline g'(u) & & \searrow & \nearrow 0 \end{array} \\
 \text{Donc } g &\geq 0 \\
 \text{Donc } \int_0^u x^2 dx + \int_0^v \sqrt{x} dx &\geq uv \\
 \sqrt{v} - u &\geq 0 \\
 \sqrt{v} &\geq u \\
 v &\geq u^2 \\
 f(u^2) &= \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} u^3 - u^3 \\
 &= 0 \\
 u &\geq \sqrt{v} \text{ ou } u \geq -\sqrt{v} \text{ impossible car sur } \mathbb{N} \\
 g(\sqrt{v}) &= \frac{\sqrt{v}^3}{3} + \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} - \sqrt{v} v \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

FIGURE 6 – En fixant une variable

2 Représentations de la convexité (ateliers APMEP Le Havre 2024 et journée CIIU-Lycée Montpellier 2025)

2.1 Énoncés

Les problèmes 1 et 2 sont adaptés d'exercices du livre Barbazo, *Mathématiques Terminale Spécialité*, Ed 2020, Hachette Education.

Problème 1 : Le but de ce problème est d'esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f , deux fois dérivable, à partir de la donnée des tableaux de variation de f et f' .

x	-5	-2	0	2	3	5
f	-1	3		-2		0
f'	3		-2		2	0

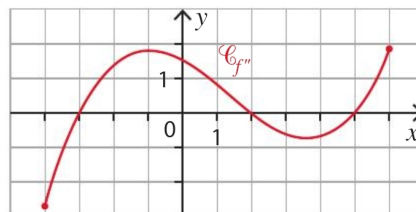
1. Sans tenir compte du tableau de variation de f' , donner une courbe représentative possible pour f .
2. Sur le même graphique avec une autre couleur, donner une courbe représentative possible pour f qui tient compte du tableau de variation de f' .
3. Dédurre des variations de f' le tableau de signe de $f''(x)$ pour x dans $[-5, 5]$.
4. Vérifier la cohérence entre les réponses données aux questions 2 et 3 en la justifiant. Si besoin ajuster avec une troisième couleur l'allure de la courbe représentative donnée dans la question 2.

Problème 2 :

30

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 6]$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_{f''}$ de sa dérivée seconde f'' est donnée ci-dessous.



1. En justifiant, déterminer, avec la précision permise par le graphique, la convexité de f sur $[-4 ; 6]$.
2. Sachant que $f(-3) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(5) = 6$, construire une courbe qui pourrait être celle de f .

Proposer deux courbes possibles, l'une correspondant à une fonction non monotone et l'autre à une fonction monotone.

Exercice préparatoire au problème 3 :

1. Soient a et b deux réels donnés, décrire l'ensemble des réels $\{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$.
2. Soient a, b, c et d quatre réels donnés, on pose $x(t) = ta + (1 - t)b$ et $y(t) = tc + (1 - t)d$.
Décrire l'ensemble des points du plan $\{M(x(t), y(t)), t \in [0, 1]\}$.

Problème 3 : Ce problème a pour but de démontrer les inégalités de Hadamard-Hermite.

Soit f une fonction convexe continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

1. On se place dans le cas où f est dérivable et positive sur $[a, b]$. Faire une représentation graphique et compléter le dessin de façon à illustrer les inégalités de Hadamard-Hermite.
2. Cela donne-t-il des idées pour une démonstration ? Si oui énoncer brièvement les idées puis faire la démonstration (éventuellement partielle avec une seule des deux inégalités).

Problème 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions f_n sont définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} + 1 & \text{pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{pour } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Étudier la convexité ou la concavité des fonctions f_n .
2. Existe-t-il des intervalles sur lesquels f_n est convexe (resp. concave) ?

2.2 Objectifs, résolutions possibles, constats

2.2.1 Problème 1

On pense que les questions 1 et 3 seront correctement traitées. On s'attend à ce que pour la question 2 il y ait confusion entre les variations de f et celles de f' et qu'il y ait incohérence. La question 4 est une question de contrôle qui a pour but d'aider à revenir sur la cohérence du tracé même s'il ne l'était pas dans un premier temps.

Des étudiants de L1 ont travaillé sur les questions 1 et 2 de ce problème. Ils ont répondu correctement à la question 1). Ils sont été désarçonnés par la question 2) se demandant ce qu'apportaient de plus les informations sur la dérivée et ont posé des questions pour savoir si la dérivée de la fonction qu'ils avaient tracée en question 1) pouvait ou non être différente de celle proposée.

2.2.2 Problème 2

La demande de deux courbes a pour but d'aider à comprendre que les informations sont lacunaires et que la solution n'est pas unique. Nous pensons que le tracé le plus naturel est celui d'une fonction non monotone.

Il faut considérer le signe de $f''(x)$. On a

- pour tout $x \in [-4, -3] \cup [2, 5]$, $f''(x) \leq 0$, f est concave sur les intervalles $[-4, -3]$ et $[2, 5]$,
- pour tout $x \in [-3, 2] \cup [5, 6]$, $f''(x) \geq 0$, f est convexe sur les intervalles $[-3, 2]$ et $[5, 6]$.

En jaune la courbe représentative d'une fonction non monotone que l'on produit assez facilement une fois l'étude de convexité faite.

En violet la courbe représentative d'une fonction monotone (nécessairement croissante avec les valeurs imposées dans la question 2). Il aura été utile de faire le lien entre la convexité de f et croissance de f' avant de faire un tracé qui convienne. Les points d'abscisses -3 , 2 et 5 sont des points d'inflexion, de plus, avec la condition de croissance, on ne peut avoir une tangente horizontale qu'aux points d'abscisse -3 et 5 .

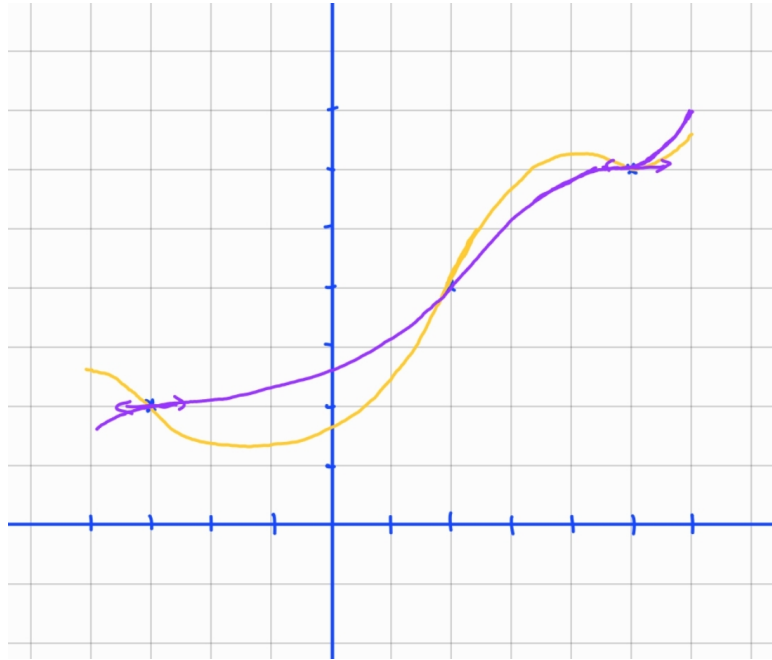


FIGURE 7 – Deux solutions possibles

2.2.3 Problème 3

Ce problème nécessite de travailler avec la définition de la convexité. Or le fait de devoir revenir aux définitions pour résoudre un exercice fait partie des sauts entre le secondaire et le supérieur.

Ces inégalités sont encore vraies sans l'hypothèse de dérivabilité. Elle a été ajoutée afin qu'il n'y ait pas de frein à utiliser la position de la courbe par rapport à ses tangentes.

A l'occasion d'expérimentations du problème, l'aire sous la courbe pour l'intégrale est mise en évidence. La corde est aussi souvent tracée, moins souvent la tangente au point d'abscisse milieu. Après le coup de pouce (Figure 9), c'est naturellement l'inégalité de droite faisant intervenir la corde qui est démontrée en premier.

Une première illustration graphique pourrait être la suivante. Elle prépare la démonstration puisque l'on a déjà fait apparaître la corde et la tangente qui serviront à justifier les inégalité, respectivement de droite et de gauche.

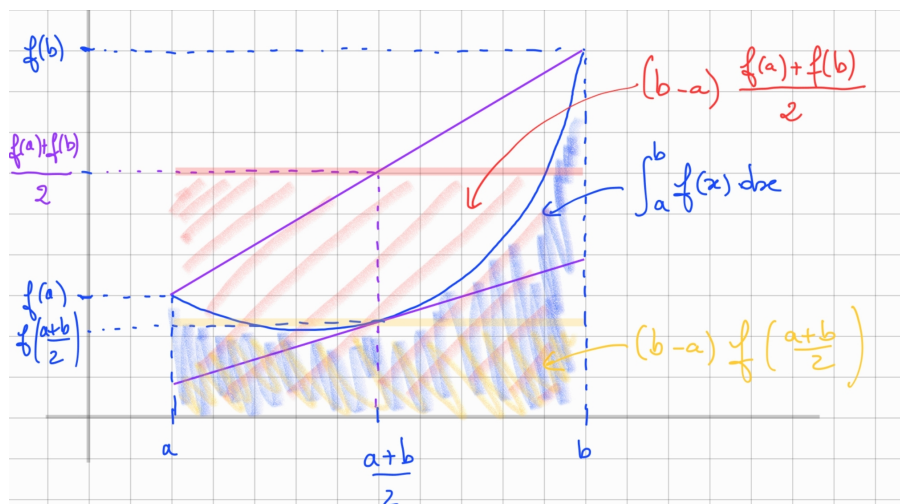


FIGURE 8 – Inégalité de Hadamard-Hermite

Si l'on fait un dessin qui ne met en évidence que l'aire sous la courbe et les aires des rectangle alors il n'est pas suffisant pour aider à trouver une démonstration de l'inégalité. Un coup de pouce possible est de faire montrer l'égalité des aires d'un rectangle et d'un trapèze ayant même base et de côté opposé à la base de même milieu.

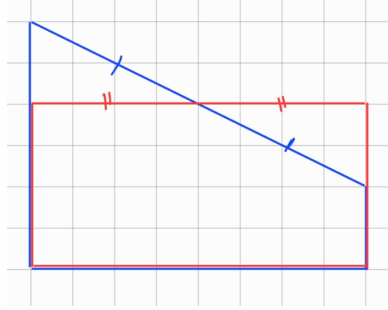


FIGURE 9 – Trapèze et rectangle de même aire

Une autre démonstration utilisant un paramétrage symétrique par rapport au milieu est aussi possible. De l'inégalité de convexité nous pouvons déduire que

$$\forall x \in [0, \frac{b-a}{2}] \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \right)$$

puis avec la relation de Chasles et deux changements de variables affines

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \right) dx \geq \frac{b-a}{2} \times 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

De même avec un argument de convexité (ou avec la croissance de $x \mapsto f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - x\right)$ sur $[0, \frac{b-a}{2}]$) on a que

$$\forall x \in [0, \frac{b-a}{2}] \quad \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \right) \leq \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$$

puis en intégrant sur $[0, \frac{b-a}{2}]$ on obtient l'inégalité de droite.

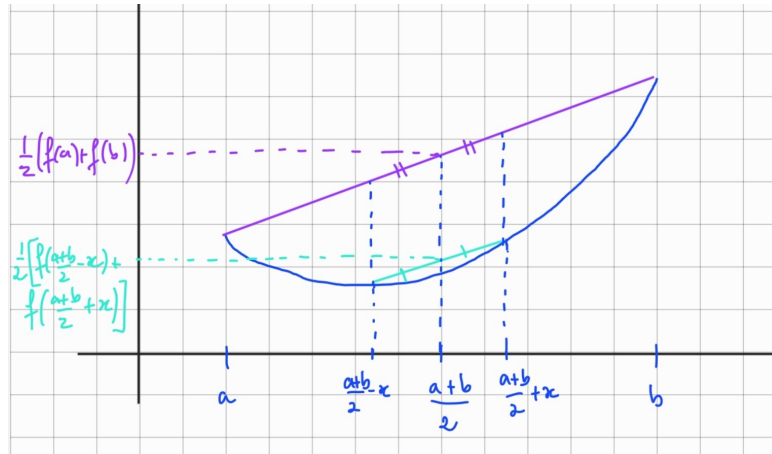


FIGURE 10 – Avec un autre paramétrage

2.2.4 Problème 4

Pour ce problème la représentation graphique donne tout de suite la réponse.

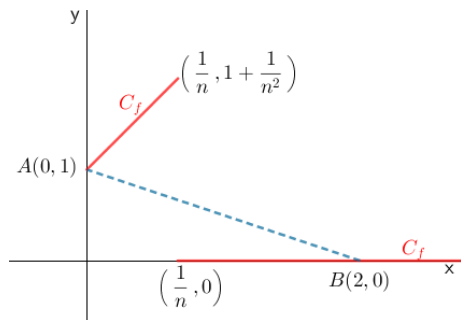


FIGURE 11 – Résolution avec un dessin

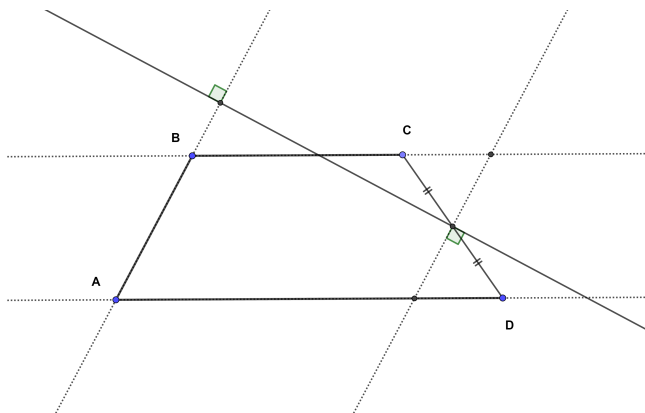
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Sur $]\frac{1}{n}, +\infty[$, on a $f_n(x) = 0$ et la fonction f_n est convexe et concave car affine, elle l'est aussi sur $[0, \frac{1}{n}]$. Cependant f_n n'est ni convexe, ni concave sur $[0, +\infty[$. Si elle l'était, la courbe C_f de f_n serait au-dessous (resp. au-dessus) de toutes ses cordes. Or les points $A(0, 1)$ et $B(2, 0)$ sont des points de la courbe, c'est-à-dire le segment $[AB]$ est une corde de C_f mais C_f n'est ni au-dessous, ni au-dessus de $[AB]$ (voir dessin). Les points de C_f ayant une abscisse x , $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, sont au-dessus de la corde (resp. les points de C_f ayant une abscisse x , $\frac{1}{n} \leq x \leq 2$, sont au-dessous de la corde).
2. Lors de l'étude pour répondre à la question précédente il a été vu que les intervalles maximaux sur lesquels les fonctions sont convexes (et concaves!) sont les intervalles $[0, \frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, +\infty[$ puisqu'elles sont affines sur ces intervalles.

3 Différentes utilisations de croquis (atelier journée CIIU-Lycée, Brest 2020)

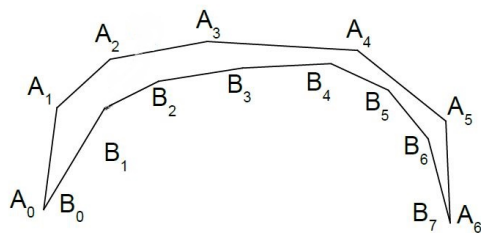
Il avait été posé deux versions d'un test, l'un avec des graphiques, l'autre sans.

3.1 Énoncé

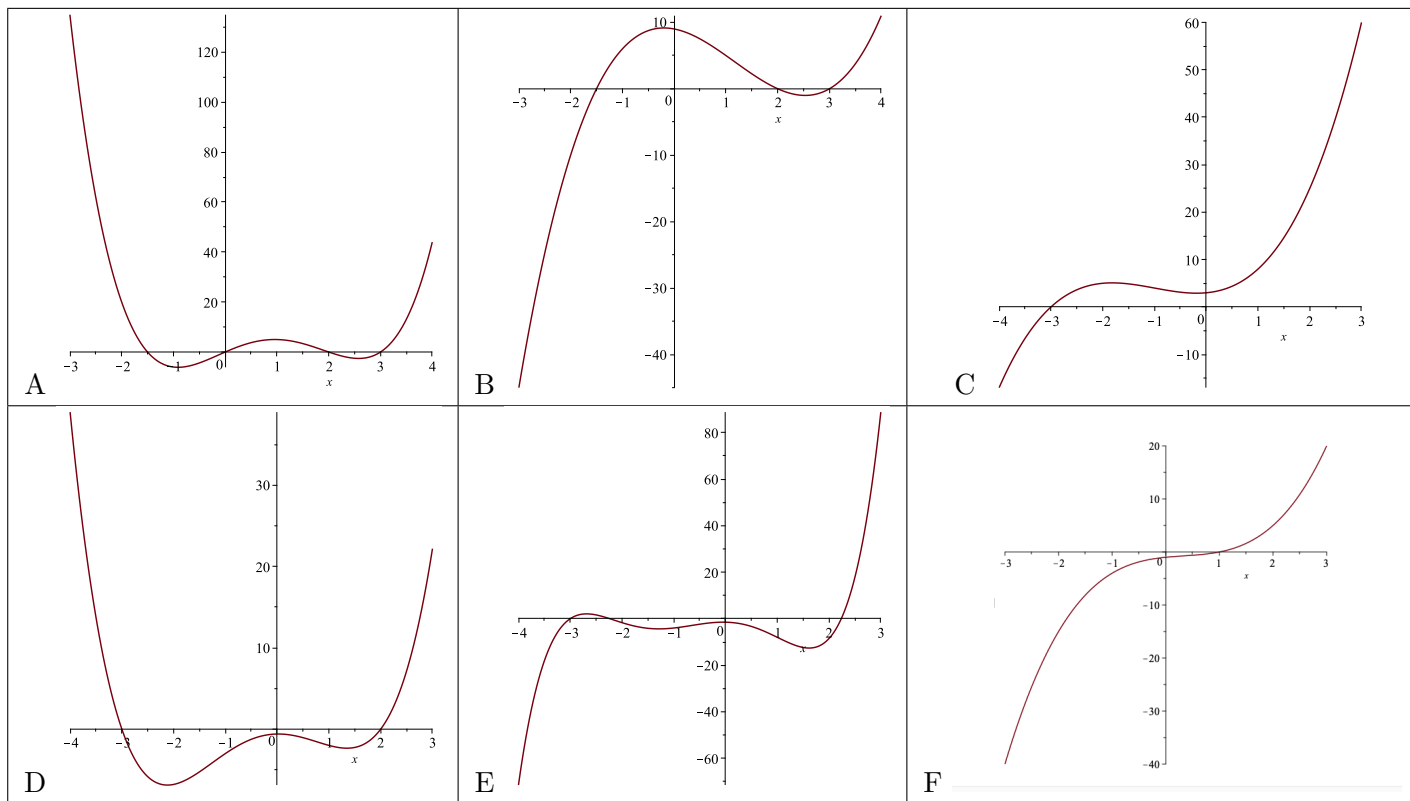
Problème 1 : Quelle propriété le dessin ci-dessous permet-il de démontrer pour l'aire du trapèze $ABCD$?



Problème 2 : Quel résultat sur les longueurs des lignes polygonales convexes vous suggère le dessin suivant, et, avec quelle preuve ?



Problème 3 : Parmi les courbes suivantes quelles sont celles qui peuvent être la représentation graphique d'un polynôme de degré 2? de degré 3? de degré 4? Justifier précisément les réponses « non » et indiquer les arguments en faveur des réponses « oui ».



Problème 4 : Soit A un réel strictement positif. Chercher la meilleure constante M telle que pour tout x de $[0, A]$ on ait $\sqrt{x} \geq Mx$.

3.2 Objectifs, résolutions possibles, constats

3.2.1 Problème 1

Il fallait montrer que *l'aire du trapèze est égale au produit de la longueur d'un des côtés non parallèles (ici le côté $[AB]$) et de la distance du milieu du côté opposé à la droite (AB) .*

La propriété n'est pas devinée, même si le parallélogramme intermédiaire est identifié, le calcul de l'aire du parallélogramme comme attendu n'est pas fait. Comme prévu a priori, la difficulté pour conclure vient du calcul de l'aire du parallélogramme avec une hauteur non usuelle, car « sortant » de la figure, on ne part pas d'un sommet, « il faut tourner la feuille ».

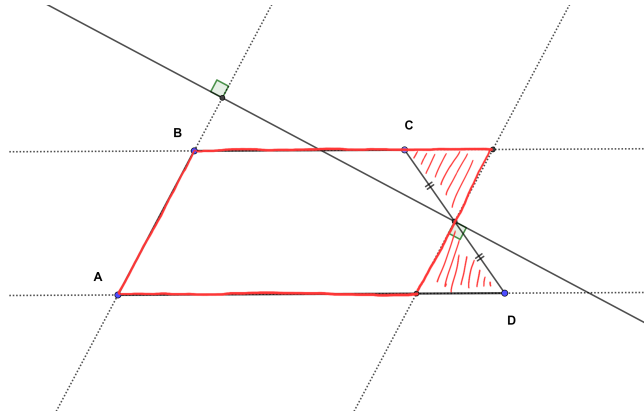


FIGURE 12 – Trapèze et parallélogramme de même aire

3.2.2 Problème 2

Le but est de montrer que pour deux polygones convexes, l'un inclus dans l'autre, le périmètre du polygone inscrit est inférieur à celui de l'autre polygone.

Ce résultat se montre à l'aide d'une récurrence forte et pour en avoir l'idée il faut ajouter des tracés. De plus le dessin proposé ici peut induire l'erreur suivante : une ligne polygonale avec plus de sommets est plus longue.

Le terme « convexe » a bien été relevé mais lors de l'expérimentation il n'y a pas eu de preuve produite ainsi que très peu de tracés supplémentaires de recherche.

C'est un travail qui nécessite des reconnaissances de sous-figures et la conclusion a été qu'il valait mieux le proposer avec le tracé supplémentaire.

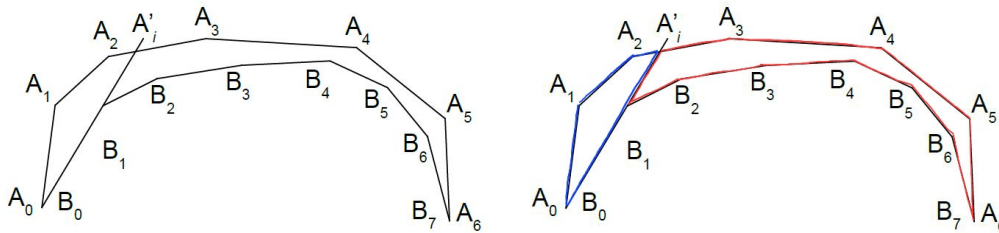


FIGURE 13 – Avec le tracé supplémentaire et les sous-figures à visualiser

Un schéma est nécessaire pour la résolution du problème, il peut aussi être proposé en rajoutant sur la figure le segment $[A_0, A_6]$.

Compléments et suggestions

Définitions

Une figure (un ensemble) géométrique fermée est dite convexe si tout segment reliant deux points situés à l'intérieur de la figure ou sur son bord, est entièrement contenu dans celle-ci.

L'enveloppe convexe d'une figure géométrique est le plus petit ensemble convexe qui contient tous les points de la figure (éléments de l'ensemble).

On peut proposer en exercice préliminaire au problème 2, la démonstration de la proposition ci-dessous.

Proposition (Inégalité triangulaire généralisée)

Étant donné une ligne polygonale composée de n segments reliant deux points A et B , avec $n > 1$, la somme des longueurs des n segments est strictement supérieure à la longueur de l'intervalle $[A; B]$ (distance entre A et B).

Pour $n = 2$, il s'agit de l'inégalité triangulaire simple : « Dans tout triangle non aplati, la somme des longueurs de deux côtés quelconques du triangle est strictement supérieure à la longueur du troisième côté ».

Géométriquement, l'inégalité triangulaire généralisée affirme que le « chemin direct » entre deux points A et B (représenté par le segment $[A; B]$) est toujours plus court que la somme des n chemins décrivant une ligne polygonale d'extrémités A et B . Une preuve par récurrence sur n permet d'établir ce résultat.

On pourra retrouver le problème 2 dans *Une étude didactique du concept de récurrence* de Denise Grenier, Petitx (2012), numéro 88.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/88x3_1560842217710-pdf

3.2.3 Problème 3

Les dessins peuvent être durs à interpréter, les outils disponibles sont le signe, les limites à l'infini, le nombre de zéros, le signe de la dérivée pour le nombre de zéros de P' . Ils permettent d'exclure certains degrés mais plus difficilement de conclure avec certitude sur le degré de la fonction polynomiale représentée.

La convention à adopter pour traiter cette question arrive spontanément : faut-il considérer que l'on a « toutes les informations » sur l'intervalle choisi pour la représentation ou non ?

Avant l'usage des calculatrices graphiques, on partait de l'étude de la fonction puis on traçait une allure de la représentation graphique, il était donc convenu que l'on rendait compte de toutes les informations du tableau de variation sur l'intervalle choisi pour la représentation. Maintenant avec les calculatrices graphiques, le cheminement est plutôt contraire les élèves ont une allure avant l'étude. Les enseignants de lycée amènent les élèves à se demander si avec l'intervalle de représentation qu'ils ont choisi, ils ont toutes les informations utiles.

Cet exercice peut être modifié en posant la question : « Quelles informations peut-on tirer sur les fonctions polynomiales dont les représentations graphiques sont données ? » Des propriétés sur les zéros de la fonction, de la dérivée, degré et limite à l'infini peuvent être trouvées graphiquement.

Les fonctions polynomiales représentées sont

$$A : x \mapsto x(x-2)(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$B : x \mapsto (2x+3)(x-2)(x-3)$$

$$C : x \mapsto (x^2+1)(x+3)$$

$$D : x \mapsto \frac{1}{10}(x^2+1)(x+3)(x-2)$$

$$E : x \mapsto \frac{1}{10}(4x^2+1)(x+3)(x^2-5)$$

$$F : x \mapsto (x^2+1)(x-1)$$

3.2.4 Problème 4

Une difficulté possible est de considérer M comme la pente d'une droite. Nous pensons que le dessin évite des éventuelles erreurs de majoration, minoration que l'on pourrait faire en ne travaillant qu'en analytique. Une autre difficulté possible est de comprendre « meilleure constante », il s'agit de décider si c'est la plus grande ou la plus petite valeur possible.

Lors du test le fait de comparer des nombres conduit à faire un dessin, le terme « meilleure constante » n'est pas considéré comme ambigu et est bien compris.

Une résolution graphique est proposée. On trace les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = Mx$ pour un paramètre M variable puis on cherche M tel que le segment reste en dessous de la courbe. Pour cela il est utile d'avoir une vision dynamique de la droite d'équation $y = Mx$ lorsque M varie. En utilisant la concavité de la fonction racine carrée, il est facile de repérer que la « meilleure constante » M est la pente de la corde joignant les extrémités de la courbe, de coordonnées $(0, 0)$ et $(A, \sqrt{A})$.

Il y a aussi eu une résolution algébrique.

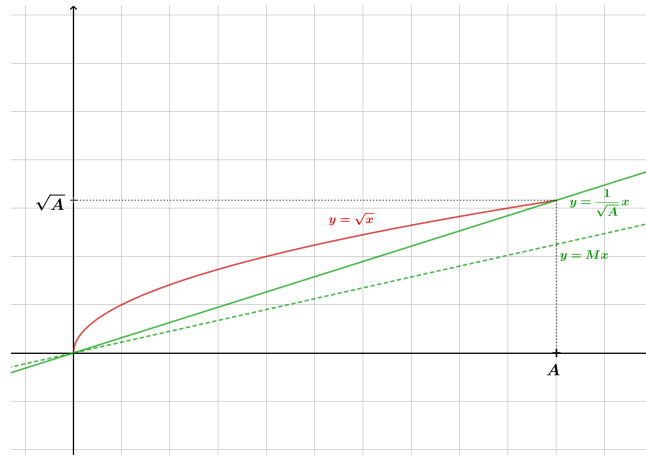


FIGURE 14 – Résolution graphique

4 Exercices de l'article ARDM-CFEM 2018

L'article complet est dans les Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018, p 409-422 publié par l'IREM de Paris.

<https://hal.science/hal-02421410>

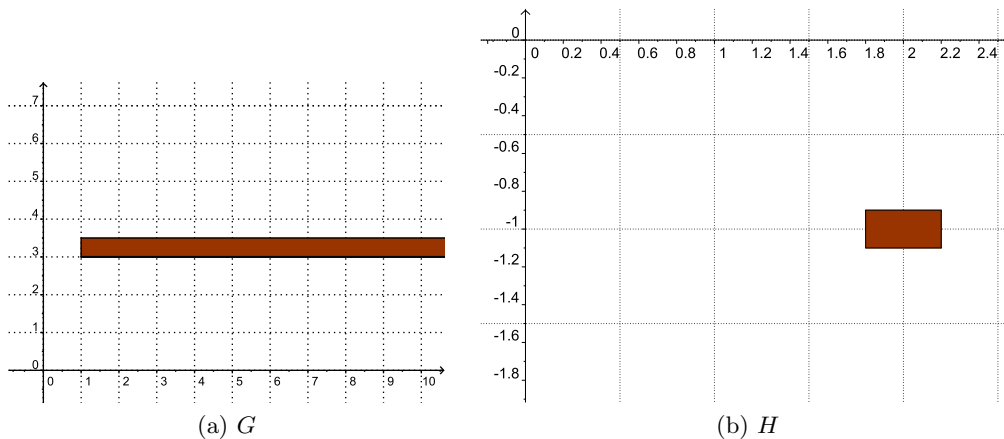
4.1 Régions du plan

L'exercice suivant a pour but de faire travailler le lien entre des inégalités et des régions du plan ainsi que de préparer aux « bandes » et « boîtes » qui sont très souvent une illustration de la définition des limites à l'aide des quantificateurs.

1. Représenter graphiquement les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq -3, y \geq 7\} \quad ; \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x + 3| \leq 0,5, y \geq 7\}$$

2. Donner la définition des ensembles G et H dont la représentation graphique est



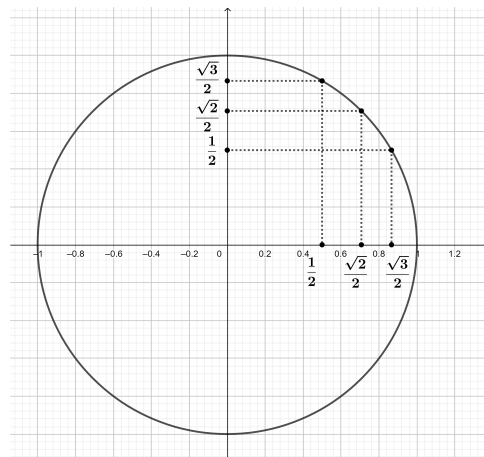
4.2 Le cercle trigonométrique

La résolution du problème 1 ne s'appuie que sur le cercle trigonométrique dans le but qu'il devienne familier aux étudiants et un support naturel pour, par exemple, retrouver des formules trigonométriques. *Il reprend des idées développées dans les actes mais n'y est pas présenté en tant que tel.*

Problème 1 :

En vous appuyant sur le cercle trigonométrique ci-dessous, résoudre graphiquement les inéquations suivantes sur $I = [0; 2\pi[$, puis sur $J =]-\pi; \pi]$.

- a) $\sqrt{2} \cos x > 1$ d) $2 \sin x - 1 \geq 0$
b) $2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$ e) $2 \sin x + \sqrt{2} < 0$
c) $\cos x \geq 1$ f) $\sin x + \sqrt{2} < 0$



Dans le problème 2, il ne nous semble pas indispensable d'avoir recours au cercle trigonométrique comme support visuel. En revanche, l'étude du signe de $\cos(3t)$ et donc, l'étude du signe de l'abscisse d'un point d'abscisse curviligne $3t$, pourrait être menée avec moins d'erreurs grâce à la visualisation du cercle trigonométrique.

Problème 2 : Soit la courbe C définie par le système d'équations paramétriques : pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

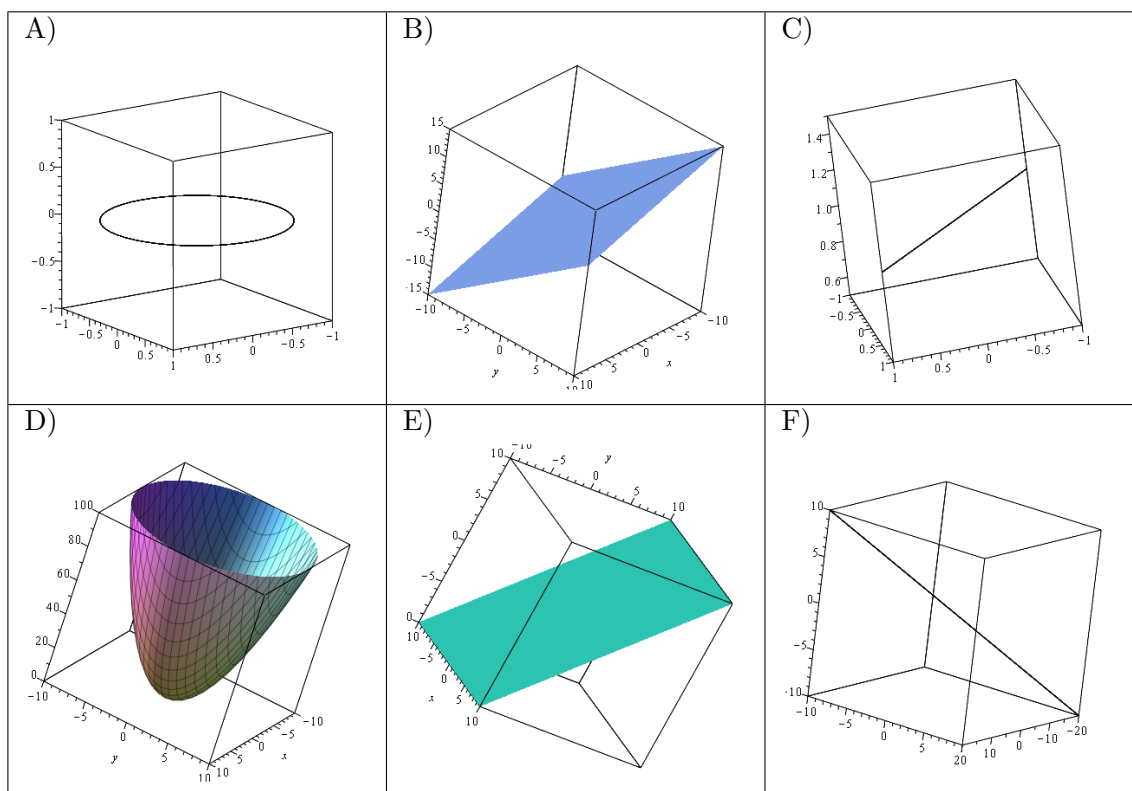
Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, étudier la courbe le plus précisément possible : justifier en particulier la continuité et la dérivabilité des fonctions x et y , calculer les dérivées des fonctions x et y , dresser le tableau de leurs variations.

4.3 Représentations et équations

Le problème qui suit est extrait d'exercices donnés à Lille et permet de faire travailler les équations cartésiennes et paramétriques. Nous espérons faire émerger des plans vectoriels et les droites vectorielles, grâce au classement demandé. Dans ce but la question, « Lesquels sont des espaces vectoriels ? », pourrait être rajoutée. Par ailleurs l'utilisation de logiciels de tracé peut contribuer à lever des difficultés dues aux représentations en deux dimensions d'un objet en trois dimensions en permettant par exemple de faire tourner les figures.

Problème : Apparier les dessins et équation (ou système d'équations). Classifier les couples appariés en expliquant les critères utilisés.

1) $x - 2y + 2z = 0$	2) $z = x^2 + y^2$	3) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$	4) $y + z = 0$
5) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$	6) $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$	7) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$	



Signalons aussi des exercices de Pariès et Robinet (Repères IREM, 75, p. 35-45) qui, à partir de groupes d'équations, demandent de reconnaître ceux qui correspondent à deux plans, droites ou droites et plans parallèles ou perpendiculaires et de préciser s'il y a coplanarité.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr09009_1704835377666-pdf

5 Exercices de l'article EpiDEMES 2025

Les analyses d'expérimentations des problèmes qui suivent sont dans l'article à paraître sur EpiDEMES « Des croquis comme support de raisonnement et de changement de registres »

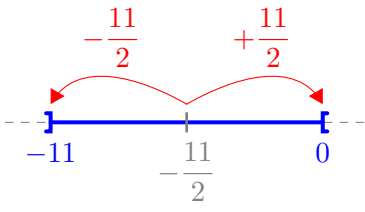
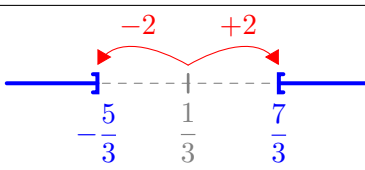
<https://hal.science/hal-04538367v2>

5.1 Différents registres de représentation d'un ensemble de nombres

Dans l'exercice proposé, il s'agit de remplir des cases dans un tableau où chaque colonne correspond à un registre différent de représentation d'un ensemble de nombres. Il s'agit d'évaluer la capacité à passer d'un registre à un autre en mobilisant les notions de valeur absolue, d'intervalle et de distance entre deux réels.

Exercice 1 : Dans chaque colonne du tableau ci-dessous est proposée une écriture ou une représentation d'un ensemble de réels. Compléter toutes les cases du tableau afin d'en donner une représentation équivalente.

Indiquer l'ordre de remplissage.

ensemble fini de réels ou intervalle(s)	égalités ou inégalités	croquis ou schéma de l'ensemble des x considérés	valeur absolue	distance
$x \in]6, 15[$				
	$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$			
				
				$d(x; \frac{3}{2}) = 1$
			$ x + 5 = \pi$	
				$d(x; -4) \leq 5$
			$ x - 3 \leq \frac{1}{2}$	
				

5.2 Preuve graphique d'une proposition algébrique implicative

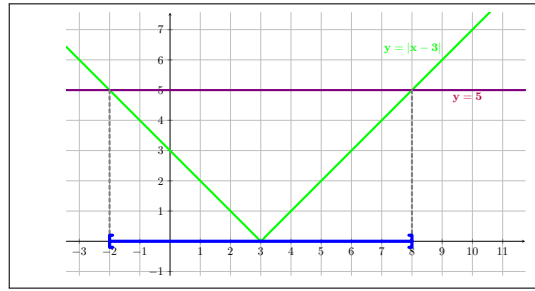
Il s'agit ici de démontrer, en utilisant une preuve graphique l'implication suivante : pour tout réel $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$((|x| \leq |x + a|) \text{ ET } (|x| \leq |x - a|)) \implies |x| \leq \frac{a}{2}.$$

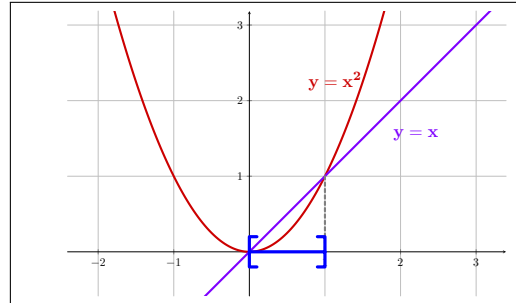
Cette fois, à la différence la version donnée dans la partie 1, le changement de registre est accompagné par la donnée de deux exemples. Ces exemples ont pour but d'illustrer le passage d'une proposition à une inconnue (qui peut se résoudre dans $\mathbb{R}$ dans le registre algébrique) à une représentation dans le plan muni d'un repère (en utilisant un graphique dans le registre fonctionnel).

Exercice 2 : Voici deux exemples de graphiques illustrant la proposition à leur gauche et pouvant servir de preuve.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$$



$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$



Donnez une démonstration de la proposition suivante et faites un graphique illustrant cette démonstration ou pouvant la remplacer.

Pour tout réel $a > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left((|x| \leq |x + a|) \text{ ET } (|x| \leq |x - a|) \right) \Rightarrow |x| \leq \frac{a}{2}.$$

5.3 Différents registres pour les notions d'injectivité, surjectivité, bijectivité dans le cadre de l'analyse

Les exercices 3, 4 et 5 ont pour objectif de tester l'aptitude des étudiants à changer de registre dans le cadre de l'analyse, sur des notions nouvelles pour des étudiants de L1¹, que sont l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application.

En introduction de ces exercices, il est donné un tableau de Marc Rogalski (« Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie », Ellipses 2001) afin d'illustrer ce qui est appelé registres (Nom de la propriété, Langage formalisé, Langage usuel, Équation, Exemple de représentation graphique). Pour les exemples de représentations graphiques, des fonctions discontinues sont représentées afin de dissocier les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité de celle de continuité.

Exercice 3 : Le tableau ci-dessous présente les notions d'injection, surjection et bijection dans différents registres (Nom de la propriété, Formel, Langage usuel, Equation, Exemple de représentation graphique).

1. Première année universitaire

Nom de la propriété	Langage formalisé	Langage usuel	Equation	Exemple de représentation graphique
f est injective de E dans F	$\forall x, x' \in E$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$	Tout élément m de F a <i>au plus</i> un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a <i>au plus</i> une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en <i>au plus</i> un point. avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est surjective de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a <i>au moins</i> un antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a <i>au moins</i> une solution dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en <i>au moins</i> un point. avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$
f est bijjective de E dans F	$\forall m \in F$ $\exists x \in E$ <i>unique</i> tel que $f(x) = m$	Tout élément m de F a <i>un et un seul</i> antécédent	$\forall m \in F$ l'équation $f(x) = m$ a <i>une</i> solution et <i>une seule</i> dans E	$\forall m \in F$, la droite d'équation $y = m$ coupe $G(f)$ en <i>un</i> point et <i>un seul</i>. avec $E = [a, b]$ et $F = [c, d]$

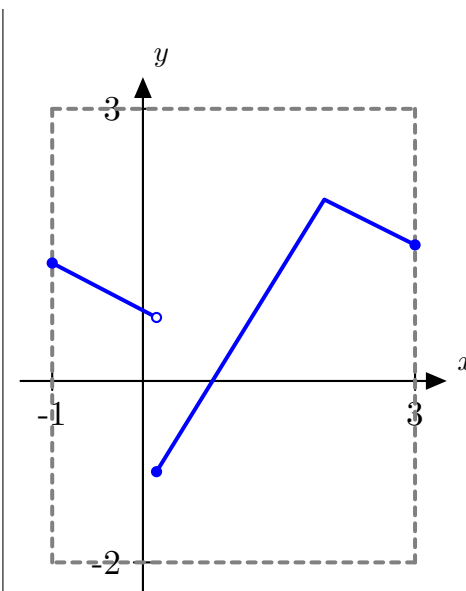
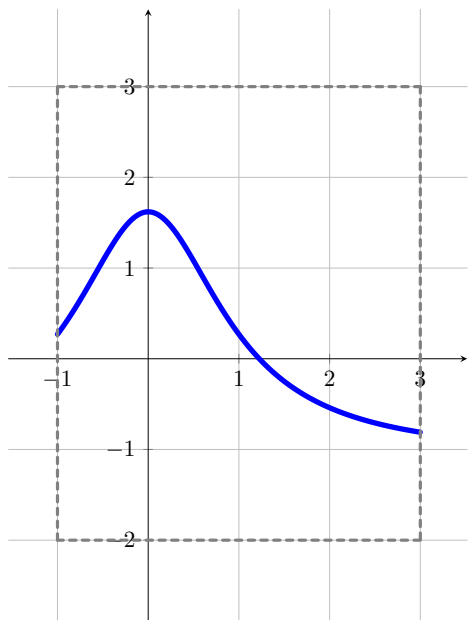
En vous inspirant de ce qui est proposé dans le tableau précédent, justifiez si les applications ci-dessous sont ou non injective/surjective/bijjective **en argumentant dans deux registres dont l'un graphique**.

1. $f(x) = x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$;
2. $g(x) = x^2$, $E = \mathbb{R}$, $F = [0, +\infty[$;
3. $h(x) = x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = \mathbb{R}$;
4. $l(x) = x^2$, $E = [0, +\infty[$, $F = [0, +\infty[$.

Exercice 4 : On a représenté ci-dessous deux fonctions de $E = [-1, 3]$ dans $F = [-2, 3]$. Pour chacune d'elle indiquez si elle est

- injective ?
- surjective ?

Justifiez graphiquement vos réponses.



Exercice 5 : Pour chacune des conditions ci-dessous, représentez graphiquement une fonction qui la satisfait :

1. injective et non surjective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;
2. surjective et non injective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$;
3. bijective de $[-1, 2]$ dans $[0, 1]$.

6 Géométrie discrète

6.1 Points à coordonnées entières sur une droite du plan réel

Ce qui suit est extrait du travail de thèse de Sinaly DISSA, « Entre arithmétique et géométrie discrète, une étude épistémologique et didactique du théorème de Bézout et du théorème de Pick », 2020.

<https://theses.hal.science/tel-02971653>

L'énoncé du problème le situe dans le domaine de la géométrie.

Étant donné n points alignés dans le plan, déterminer tous les points à coordonnées entières situés dans le même alignement que ces n points.

La question peut être proposée dans différents registres de représentation : une équation, une représentation graphique, une écriture fonctionnelle, la donnée de deux points ou d'un point et un vecteur directeur, ou encore, des équations paramétriques. Le registre de représentation choisi pour résoudre le problème va induire des stratégies de résolution différentes.

Dans la suite nous appellerons *point entier* un point à coordonnées entières.

Des questions viennent assez naturellement : existe-t-il des droites qui ne passent par aucun point entier, ou par un seul point entier, ou encore par un nombre fini ou infini de points entiers ?

Le tableau suivant résume les différentes approches et registres susceptibles d'apparaître dans la résolution du problème.

Registres	Écritures ou éléments d'identification	Commentaires
Graphique	Droite, point dans un repère	Représentation graphique des points et tracé de la droite
Fonctionnel	$f : x \mapsto ax + b$ avec x, a, b réels.	La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Algébrique	$y = ax + b$ ou $ax + by + c = 0$ avec x, y, a, b, c réels	Caractérisation de la droite à partir d'une équation algébrique ou à partir de deux équations paramétriques.
	$\begin{cases} x = a + bk \\ y = a' + b'k \end{cases}$ où a, a', b, b' sont des réels et k un paramètre.	
Arithmétique	$ax + by = c$ avec x, y, a, b, c des entiers.	Écriture plus proche d'une égalité de Bezout.

Énoncé du problème expérimenté en master 1 et 2 par Sinaly Dissa

Étant donné des points alignés dans un repère du plan, déterminer tous les points entiers situés dans le même alignement que ces points.

Étudier le problème dans chacun des cas particuliers suivants :

- Cas 1 : $(1, \frac{1}{2}), (2, 3), (-\frac{2}{5}, -3)$.
- Cas 2 : $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), (-\frac{1}{2}, -1), (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

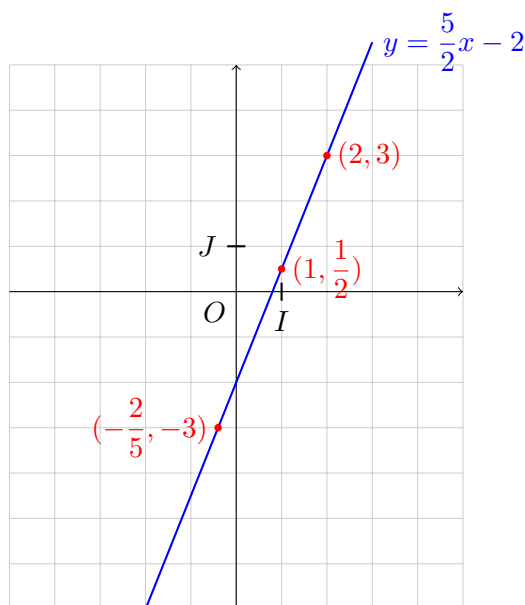
Remarques

Il a été choisi de donner des ensembles de points, pour ne privilégier aucun registre particulier. En donnant trois points cela laisse le choix des couples de points à utiliser pour déterminer des points entiers (graphique) et aussi pour établir une équation de la droite et vérifier les calculs.

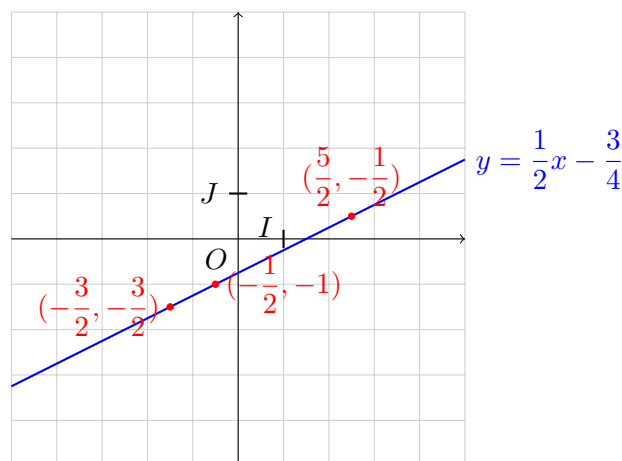
Ainsi

- Dans le cas 1, un point entier est donné, qui peut servir de base pour une recherche d'autres points entiers. Soit directement sur le graphique, par exemple en utilisant la pente ($p = \frac{5}{2}$) ou un multiple adéquat de cette pente, soit en écrivant une équation de la droite. On peut obtenir tous les points entiers de la droite avec un argument algorithmique.
- Dans le cas 2, il est plus difficile de résoudre ce problème uniquement dans le registre graphique. L'écriture d'une équation sous la forme $ax + by = c$ semble nécessaire pour obtenir tous les points. La réécriture de cette équation avec a, b, c entiers (équation diophantienne) permet de résoudre le problème par la recherche de solutions particulières induisant une écriture générique de ces solutions.

Le cas 1 peut être résolu entièrement dans les registres graphique et fonctionnel. Le cas 2 nécessite le recours au registres algébrique et arithmétique.



Cas 1



Cas 2

Stratégies et résolutions observées

- Méthode d'exploration et de résolution graphique.
On dispose du tracé de la droite. On peut chercher des points entiers « évidents » et essayer, à partir de ces points, d'en trouver d'autres, par exemple en utilisant la pente de la droite, ou en calculant les différences entre les abscisses et les ordonnées des points sur la droite.
- Méthode fonctionnelle.
On part de l'équation réduite de la droite, $y = ax + b$ et on cherche des valeurs entières du couple (x, y) qui vérifient l'équation, en combinant graphique et calcul algébrique.
- Méthode algébrique-numérique.
Avec la réécriture éventuelle de l'équation sous la forme la plus générale $ax + by + c = 0$, et si possible avec toutes les variables et coefficients entiers. Celle-ci peut déboucher sur une résolution dans le registre arithmétique et à l'utilisation du théorème de Bezout et de son corollaire.

L'écriture paramétrique de la droite n'a jamais été observée.

Résolution diophantienne

Corollaire du théorème de Bezout. Une équation diophantienne $ax + by = c$ avec a, b, c entiers, et a et b non nuls, admet au moins un couple d'entiers solution, si et seulement si $\text{pgcd}(a, b)$ divise c . Puis à l'aide du théorème de Gauss, connaissant une solution particulière on peut déterminer tous les couples d'entiers solutions de l'équation $ax + by = c$.

6.2 Équation de Fermat dans un cas particulier

Le but est la recherche des couples d'entiers naturels (x, y) solutions de $x^3 + y^3 = 27$ puis de $x^3 + y^3 = p^3$ avec p premier.

Le cas $x^3 + y^3 = 27$ peut se traiter en considérant les différentes valeurs possibles de x et y qui sont 0, 1, 2 ou 3.

le cas p premier arbitraire peut être abordé géométriquement par des étudiants qui savent déjà réduire une forme quadratique et dessiner une ellipse. On retrouve, avec un dessin, la condition d'intersection de l'ellipse et de la droite, qui est parallèle à un axe principal de l'ellipse.

Détaillons maintenant cette résolution.

6.2.1 Factorisation

On remarque que l'on peut factoriser cette équation comme suit :

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = p^3.$$

Cela montre que la résolution de cette équation revient à résoudre le système d'intersection entre une droite et une ellipse. Ainsi, l'étude des intersections de l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = a$ et de la droite $x + y = b$ nous permet de traiter cette équation. Cette situation se ramène à quatre cas particuliers où les valeurs de a et b sont exprimées en fonction de p , un nombre premier. Ces cas sont les suivants :

- Cas 1 : $a = p$, $b = p^2$,
- Cas 2 : $a = p^2$, $b = p$,
- Cas 3 : $a = 1$, $b = p^3$,
- Cas 4 : $a = p^3$, $b = 1$.

Ces quatre cas permettent de déterminer l'existence d'intersections et de calculer les coordonnées des points d'intersection, si elles existent.

Remarque 1 : Pour x et y positifs, la condition $x^3 + y^3 = p^3$ implique $x + y \leq 2p$ et on peut exclure les cas 1 et 3 pour $p \geq 3$. On peut aussi exclure le cas 4 de façon similaire à ce qui est détaillé dans la résolution géométrique

Remarque 2 : Si on continue de façon algébrique dans le cas 2, on cherche alors les solutions du système

$$\begin{cases} x^2 - x(p - x) + (p - x)^2 - p^2 = 0 \\ y = p - x \end{cases}.$$

Nous continuons en détaillant une résolution géométrique.

6.2.2 Équation réduite de l'ellipse

L'équation réduite de l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = a$ (avec $a > 0$) est :

$$\frac{u^2}{4a} + \frac{3v^2}{4a} = 1$$

où $u = x + y$ et $v = x - y$.

Les demi-axes sont les suivants :

- Demi-petit axe : $\sqrt{\frac{4a}{3}}$ dans la direction v ,
- Demi-grand axe : $\sqrt{4a}$ dans la direction u .

6.2.3 Analyse des intersections

L'intersection entre l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = a$ et de la droite d'équation $x + y = b$ dépend de la valeur de b :

- Si $b^2 < 4a$, il y a deux points d'intersection.
- Si $b^2 = 4a$, il y a un seul point d'intersection (tangence).
- Si $b^2 > 4a$, il n'y a pas d'intersection.

Les points d'intersection ont pour coordonnées (x, y) avec

$$v = \pm \sqrt{\frac{4a - b^2}{3}}, \quad x = \frac{b + v}{2}, \quad y = \frac{b - v}{2}.$$

6.2.4 Cas d'intersection spécifique

Nous allons maintenant appliquer ces résultats aux quatre cas précédemment mentionnés, où a et b sont exprimés en fonction de p , un nombre premier. Ces cas détermineront si des points d'intersection existent, et s'ils existent, quelles sont leurs coordonnées.

- **Cas 1** : $a = p$, $b = p^2$. $b^2 = p^4$, $4a = 4p$ et on a $b^2 > 4a$ car $p \geq 2$.

Conclusion : il n'y a **pas d'intersection**.

- **Cas 2** : $a = p^2$, $b = p$. $b^2 = p^2$, $4a = 4p^2$ et on a $b^2 < 4a$.

Conclusion : il n'y a **deux points d'intersection** de coordonnées $(p, 0)$ et $(0, p)$ ($v = \pm p$).

- **Cas 3** : $a = 1$, $b = p^3$. $b^2 = p^6$, $4a = 4$ et on a $b^2 > 4a$ car $p \geq 2$.

Conclusion : il n'y a **pas d'intersection**.

- **Cas 4** : $a = p^3$, $b = 1$. $b^2 = 1$, $4a = 4p^3$ et on a $b^2 < 4a$ car $p \geq 1$.

Il y a deux points d'intersection, mais ces points n'ont pas de coordonnées entières naturelles.

En effet, lorsque $x + y = 1$, les seules valeurs entières possibles pour (x, y) sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Cependant les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas des points de l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = p^3$ puisque dans les deux cas on a $x^2 - xy + y^2 = 1$. $p^3 = 1$ si et seulement si $p = 1$ ce qui est exclu car p est premier.

Conclusion : il n'y a **pas d'intersection** avec des coordonnées entières naturelles.

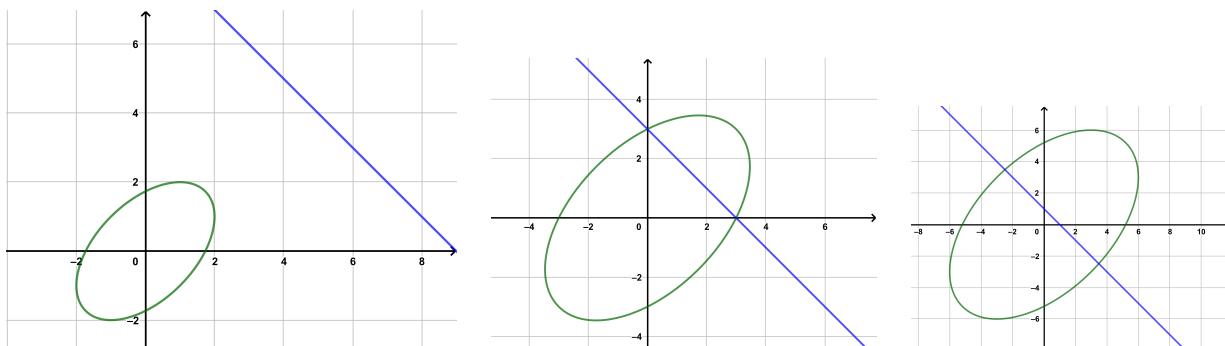


FIGURE 15 – Cas 1, 2 et 4 pour $p = 3$

7 Convexité et régionnement du plan

7.1 Convexité et composition

7.1.1 Énoncé

Rappel de la définition d'une fonction convexe

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I , est dite *convexe* si, pour tout $x_1, x_2 \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables

Si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est convexe si et seulement si la dérivée de f est croissante sur I .

Caractérisation de la convexité pour les fonctions deux fois dérivables

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I , alors f est convexe si et seulement si la dérivée seconde de f est positive ou nulle sur I .

Question

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I et g est convexe sur J , alors la composition $g \circ f$ est-elle :

- Toujours convexe ?

- Jamais convexe ?
- Parfois convexe ?

Est-il possible d'ajouter une hypothèse supplémentaire afin d'assurer que $g \circ f$ soit toujours convexe ?

7.1.2 Objectifs, résolutions possibles et constats

Cet exercice a été testé en M1 et M2 MEEF (resp. 11 et 12 copies), les M1 n'avaient pas revu la convexité avant. Les étudiants et étudiantes avaient 20mn pour le résoudre et travaillaient individuellement.

A noter que dans l'énoncé il était implicite que la composition $g \circ f$ était bien définie. Dans certains cas il a été vu une discussion sur les intervalles I et J ce qui n'était pas voulu. Il convient donc de rajouter explicitement dans l'énoncé que $\mathbf{f}(I) \subset J$. On peut aussi supposer les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

Objectifs et résolutions possibles Il n'a pas été proposé dans l'énoncé de caractérisation de la convexité d'une fonction par la convexité de son épigraphe (voir exercice suivant). En effet il est très difficile de visualiser la représentation graphique d'une composée à partir des représentations graphiques des fonctions composées (à l'exception de la composition avec $x \mapsto \pm x + a$).

L'énoncé induit fortement à penser que la bonne réponse est « parfois convexe ». Il reste alors à trouver des exemples permettant de justifier que l'on ne peut avoir ni toujours convexe, ni jamais convexe.

Pour nier « toujours convexe » il suffit de trouver un exemple de composée qui n'est pas convexe. Il suffit par exemple de prendre $g(x) = -x$ qui est une fonction affine donc convexe et $f(x) = x^2$. $g \circ f : x \mapsto -x^2$ n'est pas convexe.

Pour nier « jamais convexe » il suffit de trouver un exemple de composée qui est convexe. Les exemples possibles sont nombreux, $g(x) = x$ et $f(x) = x^2$, la fonction carrée composée avec elle-même...

Pour la démonstration avec ajout d'une hypothèse supplémentaire il est alors intéressant d'observer laquelle des caractérisations est utilisée.

L'hypothèse que l'on ajoute est « g croissante sur $f(I)$ ».

- En revenant à la définition de f convexe, pour tout $x_1, x_2 \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Puis avec la croissance de g sur $f(I)$ et l'inégalité de convexité pour la fonction g en $f(x_1)$ et $f(x_2)$

$$g(f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \leq g(\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)) \leq \lambda g(f(x_1)) + (1 - \lambda)g(f(x_2)).$$

- En supposant de plus f et g dérivables

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

f étant convexe elle est ou bien monotone, ou bien décroissante puis croissante.

Soit un intervalle sur lequel f est croissante, on a $g' \circ f$ croissante et positive, f' est croissante et positive donc le produit est une fonction croissante.

Soit un intervalle sur lequel f est décroissante, on a $g' \circ f$ décroissante et positive, f' est croissante et négative donc le produit est une fonction croissante.

Avec la continuité de f sur I° , on en déduit que $(g \circ f)'$ est croissante sur I .

- En supposant de plus f et g deux fois dérivables

$$(g \circ f)'' = f'' \times (g' \circ f) + (f')^2 \times (g'' \circ f).$$

On sait que $f'' \geq 0$ et $g'' \geq 0$, avec $g' \geq 0$ on en déduit que $(g \circ f)'' \geq 0$.

Constats et évolutions possibles Compte-tenu de la formulation de la question, il a effectivement été deviné que la réponse correcte est « parfois convexe ».

Il n'a été vu que dans une seule copie un exemple explicite permettant de nier que la composée est toujours convexe ($g(x) = -x$ et $f(x) = e^{-x}$). Mais dans cette copie l'hypothèse à ajouter n'est pas conjecturée.

En revanche, on trouve des exemples de composées donnant une fonction convexe, c'est majoritairement la fonction carrée composée avec elle-même.

Les démonstrations abouties avec l'ajout de l'hypothèse de croissance sur g sont faites avec l'inégalité de convexité (5) ou en utilisant la dérivée seconde (5). Il y a une seule démonstration utilisant la dérivée première et qui suppose à tort que le produit de fonctions croissantes est une fonction croissante.

Dans 7 copies il n'y a pas de début de démonstration (autre que le rappel des définitions).

On constate aussi que la définition de $g \circ f$ (qui n'était pas rappelée) reste une difficulté à ce niveau d'études et est souvent confondue avec $f \circ g$. Il y aussi des erreurs lors du calcul de dérivées.

Enfin l'hypothèse qui est ajoutée, est souvent donnée sous la forme « g croissante sur J » n'est qu'une condition suffisante. Il y a très souvent la confusion dans le vocabulaire entre « il faut que » et « il suffit que ».

Il y avait beaucoup de pistes d'explorations pour le temps imparti, une variante possible serait de distribuer deux énoncés distincts. L'un avec un rappel de la définition de convexité avec les inégalités, l'autre avec un rappel de la définition de la convexité dans le cas d'une fonction deux fois dérivable avec les variations de f' et le signe de f'' .

Enfin si l'on veut essayer de ne pas induire au travers de l'énoncé que la réponse correcte est « parfois convexe », on peut aussi en proposer une formulation sous forme de conjecture.

Conjecture : *La composition de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ est toujours une fonction convexe.*
Démontrer la conjecture si elle est vraie, donner un contre-exemple si elle est fausse et chercher des hypothèses supplémentaires (nécessaires ou suffisantes) afin qu'elle soit vraie.

7.2 Convexité et fonction réciproque

Le problème qui suit n'a pas encore été testé. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On dit qu'une *fonction* f est *convexe* sur un intervalle I lorsque l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{M(x, y), x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$$

(appelé *épigraphe* de f) est une partie convexe du plan. On dit qu'une *fonction* f est *concave* si $-f$ est convexe.

On dit qu'une *partie* $\mathcal{P}$ du plan est *convexe* lorsque pour tout couple de points (A, B) de $\mathcal{P}$, le segment $[A, B]$ est contenu dans $\mathcal{P}$. On pourra utiliser sans démonstration que la convexité d'une partie du plan est conservée par symétrie.

Cela permet en particulier d'en déduire que f est concave si et seulement si

$$\mathcal{E}' = \{M(x, y), x \in I \text{ et } y \leq f(x)\}$$

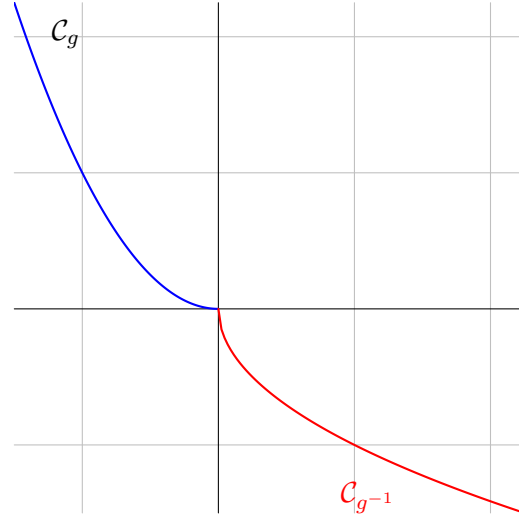
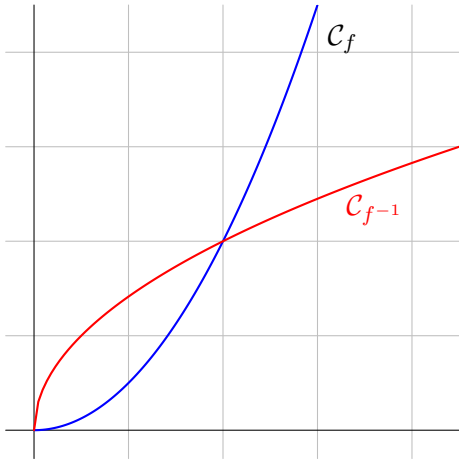
est une partie convexe du plan.

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow J$ convexe, continue et bijective. Peut-on en déduire que $f^{-1} : J \rightarrow I$ est

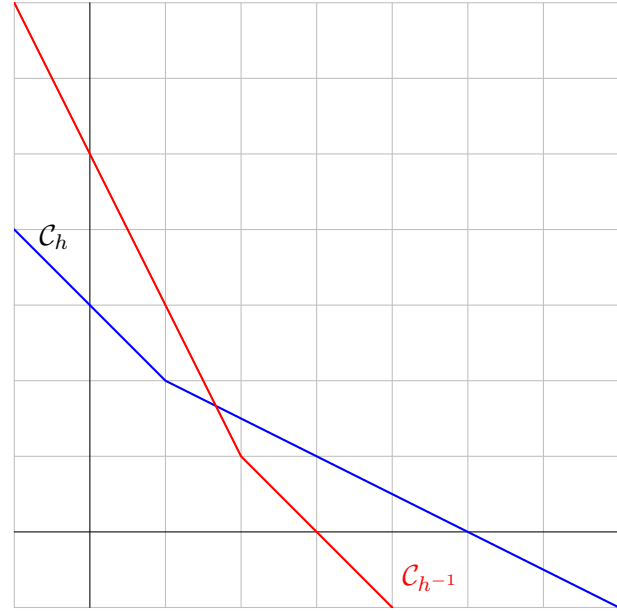
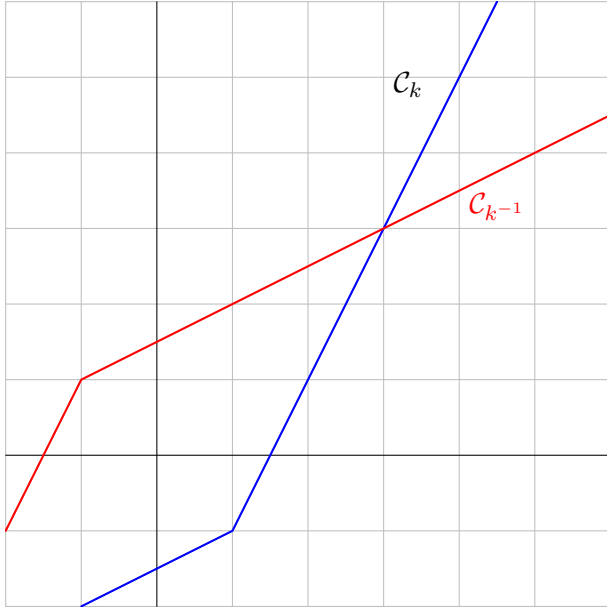
- convexe ?
- concave ?

On pourra considérer dans un premier temps les exemples suivants. Dans quels cas peut-on affirmer que f^{-1} est convexe ? est concave ? Justifier la réponse.

$f(x) = x^2$ avec $I = [0, +\infty[$ et $J = [0, +\infty[$; $g(x) = x^2$ avec $I =]-\infty, 0]$ et $J = [0, +\infty[$.



$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ 2x - 3 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases} \quad \text{et } h(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases} \quad \text{avec } I = J = \mathbb{R}.$$



Les exemples proposés montrent que la seule réponse possible est « on ne peut ni en déduire que f^{-1} est convexe, ni en déduire qu'elle est concave ». En observant plus précisément les quatre exemples on peut conjecturer que la concavité de f^{-1} dépend du sens du variation de f .

Visuellement, avec la conservation de la convexité par symétrie axiale, on peut penser qu'une bonne approche est une démonstration se basant sur l'épigraphie. C'est le cas lorsque la fonction considérée est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J .

Dans ce qui suit la symétrie utilisée est toujours la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. On rappelle que $M(y, x)$ est le symétrique de $M(x, y)$.

- Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, on considère $\{M(x, y), x \in J \text{ et } y \leq f^{-1}(x)\}$ qui est le symétrique de

$$\{M(y, x), x \in J \text{ et } y \leq f^{-1}(x)\} = \{M(a, b), b \in J \text{ et } f(a) \leq b\}.$$

On reconnaît l'intersection de l'épigraphe de f avec le rectangle $\mathbb{R} \times J$, c'est une partie convexe du plan. f^{-1} est concave.

- Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, on considère $\{M(x, y), x \in I \text{ et } y \geq f^{-1}(x)\}$ qui est le symétrique de

$$\{M(y, x), x \in J \text{ et } y \geq f^{-1}(x)\} = \{M(a, b), b \in J \text{ et } f(a) \leq b\}.$$

On reconnaît l'intersection de l'épigraphe de f avec le rectangle $\mathbb{R} \times J$, c'est une partie convexe du plan. f^{-1} est convexe.

Lorsque la fonction f est définie sur un intervalle I strictement inclus dans $\mathbb{R}$ on est amené à faire le découpage suivant

- si f est croissante sur I ,

$$\{M(x, y), x \in J \text{ et } y \leq f^{-1}(x)\} = \{M(x, y), (x, y) \in J \times I \text{ et } y \leq f^{-1}(x)\} \cup J \times]-\infty, \inf(I)]$$

- si f est décroissante sur I ,

$$\{M(x, y), x \in J \text{ et } y \geq f^{-1}(x)\} = \{M(x, y), (x, y) \in J \times I \text{ et } y \geq f^{-1}(x)\} \cup J \times [\sup(I), +\infty[$$

Dans chaque cas le premier ensemble dépendant de f^{-1} est convexe avec le même argument de symétrie que pour $I = \mathbb{R}$. Les rectangles sont convexes, en général il est faux que l'union de deux convexes est un convexe mais c'est vrai ici dans ces deux cas particuliers.

Nous pensons que dans le cas où $I \neq \mathbb{R}$ il est préférable de faire une des deux autres démonstrations possibles.

L'une utilisant l'inégalité de convexité (qui découle de la convexité de l'épigraphe). Soient $(a, b) \in J^2$ et $t \in [0, 1]$. f étant bijective, il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tels que $\alpha = f^{-1}(a)$ et $\beta = f^{-1}(b)$, d'où

- si f est croissante

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) \Leftrightarrow tf^{-1}(a) + (1-t)f^{-1}(b) \leq f^{-1}(ta + (1-t)b)$$

et f^{-1} est concave;

- si f est décroissante

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) \Leftrightarrow tf^{-1}(a) + (1-t)f^{-1}(b) \geq f^{-1}(ta + (1-t)b)$$

et f^{-1} est convexe.

L'autre complètement analytique avec les variantes suivantes.

- On suppose de plus f dérivable (f convexe équivaut à f' croissante) et on suppose que f' ne s'annule pas. Alors f^{-1} est dérivable et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

On sait que f^{-1} a le même sens de variation que f et f' est de signe constant. Si f est croissante alors $f' \circ f^{-1}$ est croissante et $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est décroissante. Si f est décroissante alors $f' \circ f^{-1}$ est

décroissante et $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est croissante.

- On suppose de plus f deux fois dérivable (f convexe équivaut à $f'' \geq 0$) et on suppose toujours que f' ne s'annule pas. Alors f^{-1} est deux fois dérivable et après calcul on a

$$(f^{-1})'' = -\frac{1}{f' \circ f^{-1}} \times \frac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^2}$$

qui est du signe de $-f'$.

Index

- Convexité d'une fonction et variation de la dérivée,
8, 26, 28
- Convexité et position des cordes et tangentes, 9,
26, 28
- Courbe paramétrée, 17
- Equations et représentations d'ensembles
 - dans l'espace, 17
 - dans le plan, 22
- Informations sur une fonction par lecture graphique,
8, 13
- Injection, surjection et bijection, 20, 22
- Intégrale et aire, 3, 9
- Inégalités et cercle trigonométrique, 16
- Inégalités et positions relatives de graphes de fonctions, 3, 13, 19
- Inégalités et régionnement du plan, 16
- Reconnaissance de sous-figure, 12, 13
- Représentation d'ensembles, 3
- Traduction arithmétique d'un problème géométrique,
22
- Traduction géométrique d'un problème d'arithmétique,
24
- Valeur absolue et distance, 18