

# La notion de limite à la transition lycée-université

Une synthèse de travaux dans la C2I Lycée-Université

# Un nœud de connexion avec d'autres notions difficiles

- Les nombres réels

Notion d'égalité dans  $\mathbb{R}$  :  $a = b$  si et seulement si quelque soit  $\varepsilon > 0$ ,  $|a-b| < \varepsilon$

Le discret et le continu

Le travail avec des valeurs absolues, des inégalités

- La formalisation

Quelque soit (souvent dit « pour tout ») ; Il existe (« on peut trouver... »)...

Identifier des quantifications universelles (parfois implicites) et existentielles

- La logique

$a \neq b$  si et seulement si il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $|a-b| \geq \varepsilon$

La négation d'une implication

Le travail par conditions suffisantes successives (pertes d'information au fil du raisonnement)

- Les suites, les fonctions

Différents cadres d'apparition, liées à modélisation, aspects outils/objets ; aspects processus / objets ; différents registres de représentations ; aspects et propriétés ponctuels, globaux, locaux... *autant de subtilités à identifier...*

Suites ; fonctions ; suites définies par récurrence ; suites définies par des fonctions...

# Différentes « recherches-actions »

- Une étude des manuels scolaires (anciens programmes) et les approches proposées de la notion de limite de suite en 1<sup>ère</sup> S et TS
- Une étude de feuilles de TD de L1
- Une étude de l'évolution au gré des diverses réformes (1971 / 1982 / 1988 et 2001)
- Un questionnaire proposé en 2007 et en 2008 sur 298 étudiants de L1
- Le travail de la notion de limite avec des physiciens
- La reprise et l'adaptation dans des classes d'ingénieries conçues par des didacticiens

# Sur les programmes, les manuels, les exercices

- Aspects « locaux » et « globaux » peu identifiables au lycée et une large algébrisation qui tend à gommer le relief sur les suites et les fonctions ; pourtant des outils et des techniques de ces deux niveaux sont utilisées au début de l'université
  - Prédominance, négligeabilité, équivalence avec des règles algébriques « étendues »
  - Mélange d'analyse et de règles algébriques
  - Formules de Taylor globales et locales (DL)

## Exercice 3

On considère sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1 + \cos(x))$ .

a) Montrer que  $f$  est une fonction paire.

b) Justifier que sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a l'encadrement

$$\ln(2) - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln(2) - \frac{x^2}{4}.$$

c) En déduire l'encadrement.

$$-1 \leq \frac{-1}{1 + \cos(c)} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(\exp(x) - 1)\sin(x^2)}{x^2 \ln(1+x)}$$

$$\frac{1 - \cos(2x)}{(2x - x^2)\tan(x)}$$

$$\frac{\sin(x)\sqrt{1+x^2} - x}{x^3}$$

## Sur les questionnaires

1. Parmi ces suites données par leur terme général, quelles sont celles qui ont une limite quand  $n$  tend vers l'infini ? Précisez cette limite quand elle existe.

1-1 $(-1)^n + 1$	1-2 $\sqrt{n} - n$	1-3 $\sin(2\pi n)$	1-4 $\cos(2\pi/n)$
48%	46%	18%	41%

2. Donnez les limites des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{e^x}{x^3}$	2-1a $x$ tend vers plus l'infini	2-1b $x$ tend vers 0	2-1c $x$ tend vers moins l'infini
	78%	9%	67%

$g(x) = x^{10} e^x$	2-2a $x$ tend vers plus l'infini	2-2b $x$ tend vers 0	2-2c $x$ tend vers moins l'infini
	87%	77%	55%

$j(x) = \cos(2\pi x)$	2-3 $x$ tend vers plus l'infini	$l(x) = \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x-2}$	2-4a $x$ tend vers 2
	20%		13%

# Sur les questionnaires

- Un taux de réponse très bon dès que des **règles algébriques** peuvent être appliquées de façon immédiate, moins bon si adaptation (problème de signe notamment)
- Seuls 3 étudiants sur 298 répondent correctement à la fois à la question sur  $\sin(2\pi n)$  et  $\cos(2\pi x)$ 
  - Trois groupes d'étudiants pour les limites qui ne relèvent pas d'une règle algébrique, cohérence des réponses selon les trois groupes
    - Groupe P (raisonnement plutôt « ponctuels » ; 68 étudiants)
    - Groupe G (raisonnement plutôt « globaux » ; 104 étudiants)
    - Groupe U (on ne peut pas trancher ; 126 étudiants)
  - Les étudiants du groupe G globalement meilleurs, y compris au BAC (en fait  $G > P > U$ )
  - Les étudiants des groupes P (et U dans une moindre mesure) totalement démunis face aux questions où il peut être important d'adopter un point de vue global
  - Seuls quelques étudiants capables de passer d'un point de vue à un autre ; majorité ne peut pas construire un raisonnement avec l'un ou l'autre des points de vue dès lors que les règles algébriques ne peuvent plus être appliquées
- Confirmation d'un gommage, au mieux d'une dissociation des points de vue ponctuels et globaux sur les suites et les fonctions, absence d'un point de vue local

# Les vieilles ingénieries

- Une sur limites de suites, une sur limite de fonctions mais des objectifs et des hypothèses initiales communes
  - Notion de limite (mais aussi de nombre réel, borne sup...) ne peut pas passer par un cours magistral **sans travail préalable** pour mettre en évidence
    - Des contradictions, de conflits, l'impossibilité de répondre à des questions simples...
    - Un besoin de clarification, de synthèse, de définition rigoureuse de la notion
  - Donner des **raisons d'être à la définition formelle** (ou du moins à son sens), nécessité pour une compréhension correcte et des activités de preuve
  - Approche comme **objet** mathématique de la notion de limite et pas seulement comme outil, approche comme **outil** de la définition formalisée et pas seulement comme objet
  - Augmenter l' « **herbier** de suites et fonctions » disponibles  
(on ne parlait pas encore à cette époque de ponctuel / global / local, très présent dans l'analyse des réponses au questionnaire )

# Aline Robert, convergence de suites, 1981

- Identification de différentes conceptions par les étudiants en début de DEUG de la notion de limite
  - Modèle archaïque : limite = barrière qu'on ne peut pas franchir
  - Modèle monotone : limite = barrière dont on se rapproche de façon monotone
  - Modèle dynamique : limite = barrière (ou nombre) dont on se rapproche
  - Modèle statique : limite = barrière (ou nombre) dont on peut être aussi proche qu'on veut
- Les modèles se chevauchent chez les étudiants
- Les meilleures performances des étudiants sur des exercices avec les limites sont réalisées par les étudiants ayant un modèle statique de limite (puis 50% pour dynamique, plus faible pour les autres)
- **Hypothèse** : ingénierie pour implanter le modèle statique chez les étudiants avant le cours sur les limites de suites



# Deux séquences encadrant le cours magistral

- 1<sup>ère</sup> séance : installer le « bon modèle »
  - Représenter graphiquement 10 suites données
  - Classer ces suites et expliquer les critères de classements  
(il est prévu de former des groupes de deux étudiants de niveaux pas trop éloignés mais pas égaux)
  - Il est prévu ici d'introduire la formulation numérique de la définition : il existe un nombre  $L$  tel que la différence  $|U_n - L|$  peut être rendue - plus petite que tout nombre  $\varepsilon$  donné à l'avance - à partir d'un certain rang  $n$
  - Statuer sur la validité de deux énoncés et donner l'explication  
(ici il est nécessaire d'avoir la définition pour justifier)
  - Il est prévu ici d'introduire la formulation géométrique en terme d'intervalle : tout intervalle contenant  $L$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n$
- Cours magistral
- 2<sup>ème</sup> séance : séance d'exercices
  - Renforcer la première séquence, chasser les modèles dynamiques...

# Jacqueline Robinet, limite de fonctions, 1983

- C'est une ingénierie en 1<sup>ère</sup> B en 1983, on se limite d'abord à limite de fonction à  $l'∞$ , je suis moins convaincu, ça peut surement être encore travaillé
- La séquence 1
  - Tracer l'allure générale de courbes sur  $]0,+∞[$  (sans calculatrice graphique)
    - De fonction ayant ou pas une limite à l'infini
    - Monotones ou non
    - Définies sur tout  $[0, ,+∞[$  ou ayant des discontinuités...
  - Travail en groupes, chaque groupe trace une fonction « facile » et une fonction « plus délicate », puis un représentant de chaque groupe au tableau
  - Classer collectivement les fonctions – critères non explicités mais de fait les étudiants classent en fonction du comportement à l'infini
- La séquence 2
  - Etude locale de  $x \rightarrow x^2$  et  $x \rightarrow \sqrt{x}$  avec la question : comment choisir  $x$  pour que  $x^2$  (resp  $\sqrt{x}$ ) soit supérieur à 25, à  $10^2$ , à  $10^6$  ?
- La séquence 3
  - Formalisation de la « limite infinie en  $+∞$  » ; « limite finie en  $+∞$  »
  - Exemplification. Je n'ai pas vu de question qui suscite le besoin de la définition...
- Séquence 4 : limite en un point

# Les suites d'Aline Robert et les fonction de Jacqueline Robinet

- Suites
- Fonctions
  - $x \rightarrow x^3$  ;  $\sqrt{x}$  ;  $1/x$  ;  $x + \sin(x)$  ;  $4/(2-x)^2$  ;  $(2+x)/(7-x)$  ;  $\sin(x)/x$  ;  $\cos(1/x)$

# Les deux énoncés d'Aline Robert

- Une suite à terme positif qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang (Vrai / Faux ? Justifier)
- Si une suite a une limite  $L > 0$  alors tous ses termes sont  $> 0$  à partir d'un certain rang

(dans la séquence 2 une question liée au théorème de Césaro mais je ne retrouve plus...)

# Une autre ingénierie, Thomas Lecorre actuellement en thèse

- Des hypothèses du même type (pas QUE un cours magistral, etc etc...)
- Une place plus grande au « débat scientifique » dans la classe pour créer les conditions de l'introduction de la définition
- La question du débat (en TS et en L1)
  - **Si  $\lim f(x) < \lim g(x)$  (quand  $x \rightarrow \infty$ ), que peut-on conclure sur f et g ?**
  - Proposition d'élèves, temps de réflexion, votes...
- Le professeur institutionnalise ensuite...
  - Impossibilité de se mettre d'accord si on n'adopte pas de convention commune, l'idée de voisinage pour traduire « en + l'infini », sa traduction en « il existe A tel que pour tout  $x > A$ ... »



# Dans notre groupe

- Adaptations pour quels objectifs ?
  - Aider à dépasser et à articuler avec l'algèbre des limites
  - Instaurer la notion de limite comme concept de base de l'analyse
  - Réduire le saut « conceptuel » entre les approches qualitatives, intuitives et la définition formalisée (ou du moins son sens)
- Quelles adaptations ?
  - L'idée initiale de faire tracer graphiquement, l'importance donnée aux graphiques et faire classer les suites ou les fonctions semble intéressante
  - Peut-on proposer les mêmes questions aux élèves pour susciter des conflits, contradictions, et leur besoin de la définition de ce que c'est que la limite ? Ou du moins quels problèmes poser pour susciter les conflits et le besoin de définition ?
  - Quel degré de formalisation est utile ? Quelles preuves sont pertinentes à faire ?
  - Quels savoirs préalables ? Sur  $\mathbb{R}$  notamment ? Sur la notion de voisinage ?
  - Positionnement par rapport à l'usage d'un logiciel graphique ???