

Chapitre 2. Comment une démonstration au programme de seconde « cache un passé ». Le jeu des démonstrations bigarrées.

Rédaction, expérimentation : Alain Bernard, Stéphane Herrero, Aymeric Francisco do Carmo, Emmanuelle Rocher (IREM de Paris Nord)

Avertissement

Ce document est un complément numérique au chapitre 2 de l'ouvrage *Vivre les mathématiques par des approches historiques*, ADAPT, 2024. Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant-e pourra pleinement se l'appropriier et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été conçu par ses auteurs. Ce travail nécessite la lecture préalable du chapitre auquel il se rattache dans l'ouvrage susdit.

4. Le « jeu des démonstration bigarrées » au lycée Bagnolet (2021-22)

Stéphane Herrero, Classe de 2^{nde}, Lycée Bagnolet, relu par les co-auteurs

Avertissement des auteurs : ce document est un complément numérique à l'ouvrage « vivre les mathématiques par des approches historiques » (F. Laurent, dir., 2024), chapitre n°2, « Comment une démonstration au programme de seconde « cache un passé », Le jeu des démonstrations bigarrées ». Il est mis à disposition pour être utilisé en classe, avec ou sans modifications, mais n'a ni valeur de modèle, ni de recette. L'enseignant pourra pleinement se l'approprié et l'adapter à la réalité, unique, de sa classe, en comprenant son rôle et sa place dans une séance, ses objectifs et la façon dont il a été pensé et conçu par ses auteurs.

L'objectif particulier de ce document est de donner un complément plus détaillé à la présentation de la première progression dont il est question dans le chapitre, 4^{ème} partie. Le chapitre donne son analyse a priori, les choix didactiques et permet d'en saisir l'arrière-plan historique. Nous donnons ici la progression globale de l'année et les documents auxquels le chapitre fait allusion

1. Exercice Devoir Maison Additionner – Soustraire
2. Exercices Devoir Maison Multiplier – Diviser
3. Exercice Devoir Maison Racine carrée
4. Progression 2GT

Exercice Devoir Maison Additionner – Soustraire

Nombres constructibles (1)

Tracer un segment de longueur quelconque. Dans tout l'exercice, on utilisera ensuite ce segment comme **segment unité**, c'est-à-dire de longueur 1.

1. Tracer un segment de longueur 3, de longueur 5.
2. a. Comment construire un segment de longueur 2 avec ces deux segments? Et un segment de longueur 4?
b. Si on dispose de trois segments de longueurs respectives 3, 5 et 9, expliquer comment construire un segment de longueur 11.
3. Comment tracer un segment de longueur 2,5 ? Ou de longueur 6,79 ?

Exercices Devoir Maison Multiplier - Diviser

Nombres constructibles (2)

1. **Construction d'une figure**
 - a. Tracer un segment unité.
 - b. Tracer un segment $[AB]$ de longueur 5. Placer un point $D \in [AB]$ à une unité de longueur de A .
 - c. Tracer une demi-droite $[Ax)$. Placer $E \in [Ax)$ à 3 unités de longueur de A .
 - d. Placer C sur $[Ax)$ tel que $(DE) \parallel (BC)$.

2. Déterminer la longueur AC .
3. **Une autre figure**
 - a. Construire une figure analogue avec $AB = 4$ et $AE = 2$.
 - b. Déterminer la longueur AC .
4. Déterminer la longueur AC si $AB = a$ et $AE = b$. Quelle opération sur les longueurs AE et AB effectue cette construction?

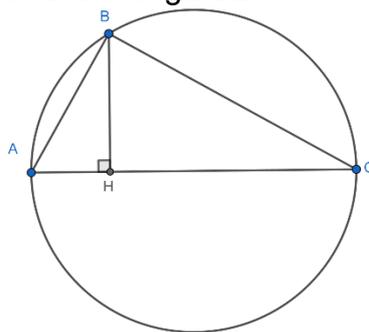
Nombres constructibles (3)

1. **Construction d'une figure**
 - a. Tracer un segment unité.
 - b. Tracer un segment $[AB]$ de longueur 3. Placer un point $D \in [AB]$ à une unité de longueur de A .
 - c. Tracer une demi-droite $[Ax)$. Placer $C \in [Ax)$ à 6 unité de longueur de A .
 - d. Placer E sur $[Ax)$ tel que $(DE) \parallel (BC)$.
2. Déterminer la longueur AE .
3. **Une autre figure**
 - a. Construire une figure analogue avec $AB = 5$ et $AC = 4$.
 - b. Déterminer la longueur AE .
4. Déterminer la longueur AE si $AB = a$ et $AC = b$. Quelle opération sur les longueurs AC et AB effectue cette construction?
5. Expliquer comment construire un segment de longueur 0,25 unité, 1,2 unité et $\frac{4}{3}$ unité.

Exercices Devoir Maison Racine carrée

Nombres constructibles (4a.)

Sur la figure ci-contre, $[AC]$ est un diamètre du cercle. B est un point du cercle et H est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .



1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier
2. a. Ecrire l'égalité de Pythagore dans les trois triangles de la figure.
b. En déduire que $AC^2 = AH^2 + 2BH^2 + HC^2$.
3. a. Expliquer pourquoi $AC = AH + HC$.
b. Développer et réduire $(AH + HC)^2$
c. En déduire que $AH \times HC = BH^2$
4. Rédiger la preuve de cette égalité en un seul texte comme lors de la correction du DM1.

Nombres constructibles (4b.)

Suite de l'exercice *Nombres constructibles (4a.)*

Vous devez, au choix, répondre aux questions du niveau facile, du niveau moyen ou niveau difficile. **Attention**, la fin (construction) est commune à tous les exercices.

Niveau Facile

On a $AH = 1$ et $HC = 2$.

- a. Calculer $AH \times HC$.
b. En déduire la valeur exacte de BH
c. Donner une valeur approchée au millième de BH .
 - Montrer que $AB = \sqrt{3}$
- (b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de AB .
- a. Montrer que $BC = \sqrt{6}$
b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de BC .

Niveau moyen

On a $AH = 1$ et $HC = 5$.

- Donner la valeur exacte de BH , de AB et enfin de BC .
- Donner la valeur approchée à 10^{-3} près de BH , de AB et enfin de BC .

Niveau difficile

On a $AH = 1$ et $HC = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $BH = \sqrt{a}$, que $AB = \sqrt{a+1}$ et que $BC = \sqrt{a^2+a}$
- En déduire que $BH \times AB = BC$

Construction

Le résultat des premières parties permet la construction de segment de longueur \sqrt{a} , pour tout nombre a réel.

En adaptant le programme de construction ci-après, construire un segment de longueur $\sqrt{7}$.

Supposons que l'on veuille tracer un segment de longueur $\sqrt{10}$.

- On commence par tracer un segment $[AC]$ de longueur 11.
- On place $H \in [AC]$ tel que $[HC] = 10$.
- On trace le cercle de diamètre $[AC]$.
- On trace la perpendiculaire à (AC) passant par H .
- Elle coupe le cercle en B avec $BH = \sqrt{10}$

1 Introduction aux vecteurs

Connaissances

- Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M' . Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Notation \vec{u} . Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel.

Capacités associées

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

2 Informations chiffrées

Connaissances

- Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population.
- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.
- Évolution : variation absolue, variation relative.
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).

Capacités associées

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.
- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.

3 Géométrie repérée

Connaissances

- Expression des coordonnées de AB en fonction de celles de A et de B.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel.

Capacités associées

- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel. Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

4 Droites du plan

Connaissances

- Vecteur directeur d'une droite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités associées

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points un point et la pente.
- Déterminer la pente d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation réduite.

5 Multiples, diviseurs, nombres premiers

Connaissances

- Notations \mathbb{N} et \mathbb{Z} .
- Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.

Capacités associées

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux des écritures fractionnaires.

6 Fonction affines et équations inéquations

Connaissances

- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.

Capacités associées

Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

7 Orthogonalité

Connaissances

Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Capacités associées

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes. Veiller à mobiliser les connaissances du collège, notamment la trigonométrie.

8 Parabole et fonction carrée

Connaissances

- Définition et courbe représentative
- Variations et signe
- Intervalles de \mathbb{R} . Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à connaître dans les deux sens.
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.

Capacités associées

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

9 Statistiques descriptives

Connaissances

- Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.
- Linéarité de la moyenne.

Capacités associées

- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m , l'écart type s , et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.

10 Fonction cube / Puissances

Connaissances

- Définition et courbe représentative
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Règles de calcul sur les puissances entières relatives

Capacités associées

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances.

11 Parallélisme

Connaissances

- Colinéarité de deux vecteurs.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Application du déterminant aux équations de droite : équation cartésienne, équation réduite.

Capacités associées

- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer une équation de droite à partir d'un point et un vecteur directeur
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.

12 Les ensembles de nombres

Connaissances

- Ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π .
- Ensemble \mathbb{R} des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de \mathbb{R} . Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels. Représentation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leq r$.

Capacités associées

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique.
- Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement d'un nombre réel par des décimaux, d'amplitude donnée.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

13 Fonction racine carrée / Les racines carrées

Connaissances

- Définition et courbe représentative
- Règles de calcul sur les racines carrées. Relation $\sqrt{x} = |x|$

Capacités associées

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des racines carrées.

14 In.égalités

Connaissances

- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

Capacités associées

- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = Ri, d = vt, S = \pi R^2, V = abc, V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Modéliser un problème par une inéquation.

15 Probabilités

Connaissances

- Ensemble (univers) des issues. Évènements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un évènement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$. Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités associées

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

16 Fonction inverse / les rationnels / Hyperbole

Connaissances

- Définition et courbe représentative
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.

Capacités associées

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux des écritures fractionnaires.

17 Échantillonnage

Connaissances

- Échantillon aléatoire de taille n pour une expérience à deux issues.
- Version vulgarisée de la loi des grands nombres : " Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. "
- Principe de l'estimation d'une probabilité, ou d'une proportion dans une population, par une fréquence observée sur un échantillon.

Capacités associées

- Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues.
- Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.
- Simuler N échantillons de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues. Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

18 Fonction, courbe représentative, variations et extremum

Connaissances

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de \mathbb{R} .
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.

Capacités associées

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$.
- Étudier la parité d'une fonction sur des exemples.
- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.

19 Système deux équations à deux inconnues

Connaissances

Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.

Capacités associées

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.