Mémoire UE14 : De la représentation que l'on a de la démonstration.

"Aucune investigation humaine ne peut s'intituler véritable science, si elle ne passe par la démonstration mathématique"¹

Léonard De Vinci

Ce document est un complément numérique à l'ouvrage « vivre les mathématiques par des approches historiques » (F. Laurent, dir., 2024), chapitre n°2, "Comment une démonstration au programme de seconde "cache un passé", Le jeu des démonstrations bigarrées". Publié avec l'accord des auteurs, alors étudiant-e-s en master MEEF, il ne doit pas être cité sans leur autorisation. Il complète par ailleurs l'analyse des retours d'élèves par une enquête plus détaillée.

De:

Katia SCHMITZ, enseignante du 2nd en collège, et étudiante en M2 MEEF à l'USPN
Mohamed NAIT DAOUD, Enseignant du 2nd en collège, et étudiant en M2 MEEF à l'USPN
GUENDOUDI Youcef, enseignant du 2nd en lycée, et étudiante en M2 MEEF à l'USPN

Directeur de mémoire : Alain BERNARD

Année : 2021-2022

¹ <https://citation-celebre.leparisien.fr/citation/demonstration>

Introduction	4
I. Une expérience inspirante: Le jeu des démonstrations bigarrées.	6
I.1.Contexte	6
I.2. Mise en oeuvre	7
I.3 - Bilan de cette expérience	8
I.4. Analyse des questionnaires.	9
II. Qu'est ce que démontrer ?	13
II.1 Essai de définition de la démonstration.	13
II.2 Des essais de démonstration.	14
II.3 Quels obstacles à la démonstration ?	16
III. Vers une nouvelle expérimentation	18
III. 1 Analyse du questionnaire et des rendus d'élèves	18
III. 2 . Choix d'une démonstration et plan d'action	23
Bibliographie et sitographie	24
Annexe 1: Quelques questionnaires	25
Annexe 2: Démonstrations au programme de seconde générale.	26

Introduction

“Au-delà de son intérêt majeur dans la formation des futurs scientifiques, le raisonnement mathématique est un axe important de la formation du citoyen. Il permet de comprendre ce qu’est une démarche de justification argumentée reposant sur la logique, de développer l’esprit critique, de former le futur citoyen à comprendre le monde et analyser l’information.”²

Ceci remet la démonstration et le raisonnement au cœur des pratiques de l’enseignant des mathématiques. Pratiques non exclusives à ces dernières, *“le fait de justifier est une pratique omniprésente de l’enseignement, dans toutes les disciplines, et dans la vie courante.”³*, mais bien trop présentes pour les confondre. *“La mathématique”, disait Galilée, “est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.”⁴*

Mais ce n’est pas tant la démonstration comme entité que ce qu’elle représente pour les élèves qui nous motivera ici.

C’est d’ailleurs par les mathématiques que l’on tentera d’établir une ébauche de l’idée qu’ils s’en font. On peut lire dans *le BO Programme de mathématiques de seconde générale et technologique: “Démontrer est une composante fondamentale de l’activité mathématique.”⁵*. Ce même bulletin propose une panelle d’assertions à démontrer, desquelles nous pourrons nous servir à dessein.

A l’instar des travaux qu’un groupe de collègues dirigé par Alain Bernard a effectués, notre étude portera sur la mise en œuvre d’une des démonstrations du programme de seconde générale.

Ne sachant pas précisément comment agencer nos idées, c’est avec notre directeur de mémoire, Alain Bernard, qu’a pu émerger un ensemble de jalons du mémoire.

Le premier, et non des moindres, fut d’ébaucher un plan d’action afin de cadrer dissemblables propositions. A cet effet, une discussion autour des expériences menées par le groupe d’Alain Bernard s’est engagée. Il s’agissait principalement de l’activité “démonstrations bigarrées” faisant la part belle à l’étude des positions relatives des courbes représentatives des fonctions identité, carré et cube dans le premier quadrant du plan. Démonstration largement suggérée par les ressources officielles, il fut alors proposé de porter l’étude sous différents aspects apportant avec eux un lot historique intéressant. Le

²https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/RA19_Lycees_GT_2_MATH_Raison_nement_Demonstration_1171070.pdf

³ REPERE - IREM, N°115 - avril 2019 *“EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER ?”* d’Emile BARON, Christophe HACHE Irem de Paris LDAR, Université Paris Diderot.

⁴ <http://evene.lefigaro.fr/citations/mot.php?mot=math%C3%A9matiques&p=2>

⁵ https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

développement de notre première partie offrira une justification de ce qu'il nous amène à penser à notre projet sur une échelle de temps différente induisant, par là même, une préparation graduelle (au travers de questions flash, calcul mental ou devoirs hors classe).

On arrive donc à notre deuxième jalon: la préparation. Jonché par un travail de réflexion et de lecture il s'agit là de débroussailler habilement notre voie. Cela se fera dans un premier temps par la lecture de documents relatifs à la démonstration (suggérés par Alain Bernard), des ressources officielles et l'analyse de l'expérimentation susmentionnée. Conjointement à cette première partie, l'idée étant de fournir un travail largement inspiré par l'expérimentation des collègues, on choisira une démonstration du programme que l'on réalisera mutatis mutandis à celle-ci.

Une liste de tâches fut établie :

- Lister l'ensemble des démonstrations du programme et faire un choix "intéressant" (tant historiquement que pédagogiquement par la variété de démonstrations proposées)
- Récupérer, lire et résumer les documents utiles à notre étude (ressources officielles, " lire et écrire la démonstration", travaux relatifs à l'activité "démonstrations bigarrées").
- Préparer un questionnaire sur l'idée que se font les élèves d'une démonstration.
- Lister les différents outils nécessaires à la démonstration choisie et offrir une stratégie permettant de pallier d'éventuels écueils chez les élèves;

Le troisième jalon est l'expérimentation: sa réalisation et son analyse a posteriori. Étant donné la situation, il s'agira davantage d'une expérimentation à réaliser au cours du second semestre. On agrémentera ainsi ce mémoire d'un complément durant cette deuxième partie de l'année.

I. Une expérience inspirante: Le jeu des démonstrations bigarrées.

I.1.Contexte

Cette expérience a été mise en place par un groupe de collègues professeurs de mathématiques, Alain BERNARD, Aymeric FRANCISCO DO CARMO, Stéphane HERRERO et Emmanuelle ROCHER.

Depuis quelques années maintenant, il figure au programme de seconde des démonstrations que les élèves doivent apprendre et comprendre. C'est autour de l'une d'entre elles que s'est construite cette expérience. Il s'agit de la position relative des fonctions identité, carré et cube suivant la valeur de la variable (que l'on considère positive).

Un constat a été établi en 2019 dans une classe de seconde d'Aymeric. A la fin de la séance sur la démonstration, les élèves étaient "langués" et ça paraissait très difficile pour les élèves; elle ne présente pas vraiment beaucoup d'attraits pour les élèves. En effet, il s'agit d'un résultat d'analyse dont les élèves peuvent se faire une idée par simple conjecture; que ce soit par un tableau de valeurs, par un algorithme, par des représentations graphiques, ou encore avec une modélisation de cubes via geogebra. Pourquoi la démontrer? Une fois que l'on a compris que 1 est une valeur bascule quel intérêt de le démontrer?

À cette problématique s'en ajoute une autre, très joliment exposée par Alain Bernard (qui est, je le rappelle, historien des mathématiques et chercheur dans ce domaine):

"Soit μ la mesure du temps passé sur différents points du programme.

Soient A ce que j'ai à enseigner habituellement et B ce que l'histoire des maths que les programmes encouragent à intégrer.

Est-il vrai que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$?

Non, il faudrait que $\mu(A \cap B) = 0$ autrement dit on peut avoir $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \varepsilon$ "

On peut donc chercher à intégrer une dimension historique dans les cours, sans surcoût inconsideré de temps. Une solution serait donc de construire une activité qui s'inspire sans le dire d'un épisode historique, puis de révéler l'histoire que cachait cette activité sans y passer beaucoup de temps. En l'occurrence ici, présenter une activité autour de la démonstration en s'inspirant de l'histoire.

Cette expérience intitulée: "Le jeu des démonstrations bigarrées ou comment une démonstration cache souvent un passé" a donc pour but de résoudre ces deux problématiques à travers une activité menée en classe. Le nom de cette expérience est inspiré d'une citation de Ludwig Wittgenstein: 'Les mathématiques sont une mixture bigarrée de techniques de preuve.' qui prend son sens au travers de cette expérimentation. Si l'on prend la définition du Larousse, bigarré renvoie à quelque chose formé d'éléments disparates. Le choix de cette démonstration est

particulièrement adapté à cette idée. Tout d'abord, elle permet une compréhension et une interprétation de la notion de puissance. Chacun des objets manipulés ici s'offrent à des représentations multiples et chacune d'entre elles renvoie possiblement à un bout d'histoire caché. C'est ainsi que la "mixture de démonstrations bigarrées" prend son sens, tant d'un point de vue pédagogique que d'un point de vue historique. De plus, elle permet aux élèves d'acquérir des stratégies globales pour comparer les fonctions, des méthodes pour résoudre les exercices futurs. Elle présente également un très fort potentiel didactique et permet de revenir sur certaines difficultés rencontrées par les élèves: associer des nombres à des grandeurs géométriques, les conventions $x = 1.x$, élever à la puissance ne revient pas forcément à augmenter. Enfin cette activité permet d'éveiller la curiosité des élèves en tournant cette démonstration sous la forme d'une énigme, pourquoi 1 est la valeur bascule?

I.2. Mise en oeuvre

Cette expérience des démonstrations bigarrées a été mise en place, une première fois, en 2021 (après la période Covid) dans deux lycées différents Cugnot puis Henaff ou travaillent respectivement Aymeric et Stéphane. Le premier jour, il a été présenté 4 méthodes de démonstration différentes et un scénario d'expérimentation sur 2h30 en mode vacances, c'est-à-dire avec 10-15 élèves volontaires en fin d'année et sous la forme d'un jeu. Cette activité n'est pas vraiment guidée, et est plutôt présentée sous la forme d'un problème ouvert.

Déroulement de la séance :

1. Présentation et introduction philosophique : explication du sens de la citation de Wittgenstein.
2. Travail collectif de conjecture: mode dialogué, pour leur montrer concrètement le résultat qui va être travaillé.
3. Principes du jeu et consignes pour le travail par groupes : les prévenir qu'il s'agit d'un exercice avec lequel ils ne sont pas familiers. Bien leur indiquer qu'il fallait démontrer avec les définitions/propriétés qui leur sont données. Il s'agit d'un jeu, dans le sens où il fallait se borner à des règles bien précises.
4. Recherche "assistée" : passage dans les rangs pour observer et éventuellement donner des indications lorsque ce devait être nécessaire.
5. Synthèse et compléments d'histoire

Quatre méthodes ont été proposées aux élèves : méthode des aires, méthodes des lignes proportionnelles, méthode par proportion continue et méthode algébrique. Chacune des méthodes de démonstration utilisait la même définition "algébrique" commune de la notion de puissance mais permettait de traiter le problème en utilisant différentes représentations. De plus, un questionnaire leur a été remis en début et en fin de séance concernant leur conception de la démonstration. Le but étant de déterminer si cette activité leur a permis de mieux appréhender cette idée et ce qu'elle représente.

Après une première analyse à chaud des résultats obtenus avec le second groupe, il a été décidé de présenter uniquement la méthode des aires aux deux groupes d'élèves présents le jour suivant.

Forts de ces deux expériences et en s'inspirant des conclusions tirées, une troisième expérience a été mise en place dans une classe de spécialité mathématiques en 1^{ère}. Elle a eu lieu sur 3 heures réparties sur une semaine. Dans un premier temps, les objectifs de l'activité ont été présentés aux élèves lors d'une première séance (30 minutes) à l'issue de laquelle ils se sont vu confier un travail préliminaire à effectuer à la maison. L'activité a eu lieu 3 jours sur une séance de 2 heures durant laquelle les élèves ont disposé d'un temps de recherche. Enfin, une courte synthèse de l'activité (30 minutes) a été présentée la semaine suivante.

I.3 - Bilan de cette expérience

Un premier bilan a été dressé à chaud après la première séance. Parmi les points positifs relevés, il a été noté que les élèves ont vraiment été très impliqués. Ils ont joué le jeu, et ont été intéressés et intrigués par la synthèse historique. Le fait d'avoir travaillé la démonstration juste avant a fortement éveillé leur curiosité quant à l'histoire qui se cache derrière. Certains ont même été contents d'avoir travaillé dessus, bien qu'ils aient trouvé l'exercice difficile. Quelques points négatifs ont aussi été évoqués. Le manque de temps s'est très vite fait ressentir, 2h30 n'ont pas été suffisant pour faire le tour de toutes les démonstrations. Les élèves ont aussi fait face à des lacunes accumulées tout au long de leur scolarité. Certaines formules d'aire sont mal connues, et des problèmes élémentaires comme l'association segment-longueur abstraites. Enfin, le point le plus remarquable et qui nous intéresse directement au vu de notre travail est qu'il n'y a à priori pas eu de changement dans la conception que se font les élèves de la démonstration.

Après cette première analyse à chaud des résultats obtenus avec ce premier groupe, il a été décidé de présenter la même méthode aux deux groupes le jour suivant. En dressant le bilan de cette deuxième activité, des conclusions similaires ont pu être tirées. Notamment au niveau du manque de temps, des lacunes des élèves malgré une forte implication dans la recherche et dans l'activité en général. Toutefois, avec l'analyse de la première séance, et le choix de restreindre les démonstrations, une meilleure anticipation des difficultés a été possible et la synthèse finale concernant le lien avec l'histoire fut beaucoup plus parlant pour les élèves.

Devant ces conclusions, la question d'une nouvelle expérimentation a vu le jour avec notamment des coups de pouces plus ciblés. Ainsi des axes d'améliorations possibles ont été dégagés : prendre le temps de travailler les démonstrations et allouer plus de temps de recherche. Il est possible de traiter une première partie préliminaire en devoir maison par exemple. C'est d'ailleurs ce qui a été mis en place lors de la troisième expérience avec la classe de spécialité. Ce devoir maison avait pour but d'habituer les élèves à élaborer des constructions à partir d'un segment unité quelconque.

Plusieurs conclusions remarquables ont été tirées de cette 3^e expérience :

1. Malgré le travail en devoir maison, certains élèves n'ont pas pu se détacher de l'idée que l'unité est le segment unité usuel. Un travail plus conséquent

peut être mis en place dans le temps pour habituer les élèves progressivement à l'idée que l'unité peut être quelconque.

2. Dans l'ensemble, la conception de la démonstration n'a pas sensiblement changé, bien que quelques réponses semblent très encourageantes. Encore une fois, un travail en amont dans le temps semble être une solution à ce problème.
3. Les élèves ont eu du mal à comprendre qu'une 'stratégie' se cache derrière cette démonstration et qu'une méthode générale de raisonnement peut émerger de cette démonstration. En l'occurrence, ici pourquoi comparer x et x^2 revient à étudier le signe de la différence, et surtout pourquoi est-ce plus intéressant de recourir à l'étude de la différence.
4. Les groupes qui ont le mieux réussi sont ceux qui ont réussi à verbaliser leur raisonnement notamment en s'appuyant sur les propriétés proposées. Malgré quelques lacunes, on peut voir un raisonnement qui s'en dégage ce qui est fortement encourageant. Ces verbalisations prennent souvent la forme d'annotations qui reflètent vraiment un cheminement, une volonté de construire un raisonnement.
5. En ce qui concerne la forme de l'activité, les élèves ont apprécié le fait de travailler et raisonner en groupe sur une problématique non guidée. Certains ont même ressenti de la satisfaction à réussir à raisonner et l'ont exprimé à travers le questionnaire.

Devant ces conclusions, il nous paraît indispensable de réaliser un travail de préparation en prévision de l'activité qui leur sera présentée. De plus, ces conclusions nous permettent également d'avoir une grossière idée des points qui peuvent être travaillés afin de préparer de manière efficace les élèves à ce travail d'un genre nouveau. Un temps de recherche en groupe en autonomie semble également plus pertinent au vu des différents témoignages. Enfin, il nous paraît important de s'intéresser davantage à leurs conceptions de démonstrations, les questionnaires, afin de tenter de comprendre leurs difficultés.

I.4. Analyse des questionnaires.

On se propose de structurer l'analyse sous la forme d'un process. On met en évidence une partie objective qui consiste à reprendre la structure du questionnaire. Ensuite une analyse sera faite parallèlement aux lectures que l'on a pu effectuer.

Contexte et contenu: Un questionnaire est distribué après la présentation du projet "jeu des démonstrations bigarrées" à une classe de seconde et de la conjecture de la propriété que l'on souhaite démontrée. Puis en fin de séance de l'activité.

Une question en début de séance :

1. En quoi consiste, selon vous, une démonstration ?

Deux questions en fin de séance:

2. Votre réponse à la question précédente (en quoi consiste une démonstration ?) serait-elle différente après cette activité ? Si oui, répondez de nouveau à la question.

3. Quel est votre ressenti par rapport à la méthode que vous avez étudiée ? Et par rapport aux autres méthodes exposées ? Avez-vous des remarques à formuler sur la séance ? Des suggestions pour l'améliorer ?

Objectifs:

- Déterminer si les objectifs de l'activité étaient atteints:
 - Découvrir les liens historiques qu'il y a avec les études effectuées.
 - Démontrer une propriété mathématique par différents registres (géométrique, algébrique etc...)
 - Comprendre le principe de démonstration mathématique
 - Est-il possible d'intégrer l'histoire des mathématiques dans un cours ? Quels en seraient les apports ?
- Notifier une évolution de leur conception de la démonstration.

Données recueillies: 25 questionnaires (17 le premier jour et 7 le deuxième jour)

Tableau récapitulatif des rendus des élèves (avec le nombre d'occurrence pour chacune des remarques indiquées entre parenthèses).⁶

	1	2	3
J1	<ul style="list-style-type: none"> - Prouver (4) - Montrer qu'une chose est vraie ou fausse (5) - Expliquer, prouver par un raisonnement - Prouver une généralité - Argumenter - Montrer une chose - Explique ce que l'on a (2) - Justifier une théorie - Montrer que c'est vrai 	<ul style="list-style-type: none"> -Non (15) car on a fait la même chose que ce à quoi je m'attendais Jouer avec les règles mathématiques J'en ai plus appris Plusieurs méthodes de démonstration (2) <ul style="list-style-type: none"> - oui Montrer une chose -> prouver une idée 	<ul style="list-style-type: none"> -Appréciation séance (2) - Ligne proportionnelle dur -différentes méthodes pour un même résultat - Besoin davantage d'explications - Exercice intéressant car différent de ce qui est fait en mathématique. - Démarches diverses, obstacles surmontables - Je n'ai pas compris mais j'ai essayé -Laisser plus de temps de réflexions - Explications orales des autres méthodes compliquées à comprendre. - La phase de recherche est appréciée - Manque de temps - Surprise des liens entre les domaines des mathématiques et les points historiques appréciés.
J2	<ul style="list-style-type: none"> - Expliquer une conjecture - Expliquer une idée, une méthode ou un exemple (3) - Expliquer une idée par un dessin ou des écritures - Renforce notre réponse: prouver expliquer 	<ul style="list-style-type: none"> - Non (5) - Oui (2) Expliquer une question grâce à des exemples, sans calculer Une démo cache un passé (une histoire) 	<ul style="list-style-type: none"> - Complicé Mais intéressant - TB cours (2) - Nouvelles manières de faire et de réfléchir - découverte de nouvelles méthodes - Méthode difficile mais plus simple après explication - Appréciation des travaux de groupes et de raisonner.

⁶ Données disponible au format numérique à la demande.

Des différents questionnaires on peut tirer quelques classes de remarques:

- Celles liées à l'exercice de démonstration
- Et celles liées à ce qui gravite autour de l'exercice.

Pour les remarques liées à l'exercice, on observe un verbatim faisant échos à l'article "*EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER ?*", tant est si bien que l'on y retrouve tous les verbes du titre. Certains voient en la démonstration une preuve, d'autres une explication, et d'autres encore, bien que plus rare, la trouve dans le schéma. Cette dernière remarque est d'autant plus intéressante qu'elle fait la part belle à la méthode adoptée par Clairaut A. (1753), dans ses *Eléments de géométrie* où il propose une "*argumentation de type explicatif*"⁷. Il se contente de montrer l'évidence des propositions à travers des schémas sans trop s'encombrer de raisonnement logico-déductif type euclidien mais en confortant le lecteur par ce que ses sens perçoivent, et ce à dessein pédagogique..

Par ailleurs, quelques-uns ont eu l'air de voir une preuve face à la clarté d'un exemple illustratif. Il s'agit là d'un point que l'on pense notable car l'exemple dans la démonstration peut tout autant être valable comme discutable. En contre-exemple, d'aucun ne le refusera. Quant à son application sous forme générique, il s'agit là d'une affaire non consensuelle. Il reste que ces quelques remarques isolées ouvrent des voies à explorer avec les élèves afin d'affiner leurs idées ou de les corriger.

Pour ce qui est des remarques les plus occurrentes, il s'agissait principalement de voir en la démonstration une limite distinguant le vrai du faux par la preuve ou l'explication. Ce qui est intéressant dans ces remarques est de différencier la valeur de vérité de l'assertion du fait de s'en convaincre. Cette distinction, sauf erreur, n'a pas l'air d'être faite. Effectivement, une assertion est soit vraie soit fausse (tout du moins, pour les adeptes du principe du tiers exclu). Et la démonstration, constituée elle-même de plusieurs pas comportant des assertions, n'est rien d'autre qu'un moyen de parvenir à la perception de la valeur de vérité du théorème étudié par le lecteur. Ainsi, la démonstration ne serait pas là pour fournir une valeur de vérité à l'assertion mais plutôt pour permettre au lecteur de l'atteindre et/ou le convaincre de celle-ci..

Finalement, les dernières observations pratico pratiques que l'on peut faire de ces différents questionnaires est la limite de temps imparti trop courte et l'importante diversité des méthodes rendant leur élaboration, au vu du format, irréalisable. Et on voit aux remarques des élèves le regret de ne pas avoir pu tout effectuer.

Notons que le calcul comme signification de la démonstration n'a pas été notifié par les élèves. Élément surprenant car à la question "*qu'est-ce-que les mathématiques*" d'aucun ne conviendrait à dire que "*le calcul*" serait une des réponses les plus présente, l'activité mathématique pour les élèves étant trop souvent essentialisée au calcul. Devons-nous comprendre qu'ils ont à l'esprit que la démonstration est "*une autre façon de faire les mathématiques*" comme le souligna un élève ou bien s'agit-il d'une distinction qu'ils opèrent entre les mathématiques et la démonstration ?

Cela nous amène à réfléchir quant à l'introduction de ce que sont les mathématiques afin de mieux identifier s'ils font un lien entre mathématiques et démonstrations et lequel ? D'ailleurs, plus généralement, on pourrait leur suggérer ce qu'est la

⁷ "*Produire et lire des textes de démonstrations*" p.70

démonstration dans différents domaines ou situation, ce qui permettrait d'en comprendre mieux son sens d'une part et d'identifier les attentes que l'on en a en fonction des domaines qui y ont recours.

En ce qui concerne les remarques d'ordre affectif on en observe bon nombre qui sont liées à des états émotionnels (j'ai bien aimé, c'était dur, ...) ou à des situations appréciées (travail de groupe). L'initiation à la recherche est visiblement une activité qu'ils ont appréciée; il y en a même qui vont jusqu'à dire qu'il s'agit là d'une nouvelle manière pour eux de faire et de réfléchir en mathématique. Pour les difficultés elles étaient vraisemblablement, dans un premier temps, d'ordre mathématiques. Toutefois, Dans "produire et lire des textes de démonstration chapitre 9 : pourquoi faire écrire des textes de démonstration aux élèves" est explicité quelques éléments permettant de mieux distinguer les difficultés rencontrées par les élèves. Parmi elles: la distinction du discours oral et écrit d'une part et ensuite l'échelle dans laquelle s'inscrit la démonstration d'autre part. Effectivement, un texte de démonstration est souvent exprimé à l'échelle d'un extrait. Son intelligibilité quant à elle se trouve à l'échelle de l'œuvre. Autrement dit, un texte de démonstration est riche en implicite et la compréhension suppose de dérouler le discours intégralement jusqu'à... jusqu'à quel point justement ? Les théorèmes élémentaires ? Les axiomes ? ou jusqu'à même les modes de raisonnements et principes tel que le tiers exclu ?

Ainsi, la compréhension de l'énoncé, la voie que l'on choisira pour le démontrer, le choix des arguments et leur compréhension, et enfin leur agencement sont autant de sources de difficultés auxquelles se retrouve confronté l'élève auxquelles s'ajoute la polysémie de la vocable "*démonstration*".

II. Qu'est ce que démontrer ?

II.1 Essai de définition de la démonstration.

“EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER (...)”⁸ des termes renvoyant à des réalités différentes ou bien partageant un sens commun ? C’est bien sûr ce dernier que l’on retiendra. Ces termes constituent un ensemble de synonyme relatant un sens que l’on perçoit assez simplement : fournir un discours convaincant à propos d’une chose. Leur présence dans les différents domaines et matières laisse entendre qu’une certaine confusion peut naître chez les élèves. Par ailleurs, comme souligné fort justement dans un article⁹ le caractère polysémique des termes relatifs à cet exercice d’une part, et du contexte dans lequel il est employé d’autre part; auxquels s’ajoutent les diverses représentations et sens qu’en ont les agents (enseignants et élèves), provoque ces confusions et suggère un primo travail de mise en place d’un contrat pédagogique en explicitant d’abord pour nous-même, puis pour les élèves, ce que l’on attend d’eux.

Sans trop en dire, tentons d’avancer en commençant par donner un sens à la démonstration.

Démontrer c’est “*Faire une démonstration, prouver quelque chose, l’établir par un raisonnement de type déductif*”¹⁰, nous dit le Larousse. Mais qu’en disent les mathématiques ou les mathématiciens ? On interrogea quelques professeurs et camarades au sujet du sens de la démonstration en mathématique. Elle s’est faite via un questionnaire, reprenant les mêmes questions que l’on adressa au groupe d’élèves avec lesquelles nous travaillerons ce deuxième semestre. Le format était différent, pour optimiser au mieux l’utilisation de ce questionnaire; on proposa un document numérique où était laissé le libre choix aux réponses. Huit parmi les premiers et deux des derniers ont répondu à notre questionnaire. Une analyse rapide des réponses laisse comprendre que la démonstration en mathématique est de *montrer la véracité, ou non, d’un “énoncé” mathématique*. Pour ses moyens ils sont bien connus des gens du domaine mais ici on veut seulement préciser qu’ils sont multiples et non restreint au raisonnement purement déductif comme le propose le Larousse. Le raisonnement par récurrence, contraposée, équivalence ou l’absurde sont autant de moyens que les mathématiques utilisent pour parvenir à leur but de démonstration.

Ce développement apparaît ici à dessein: nous disions plus haut que les élèves pourraient être confrontés à quelques confusions dans la compréhension de ce que l’on attend d’eux dans la démonstration. Et ici nous voyons qu’en effet sa définition ou sa compréhension diffère en fonction du domaine dans lequel on l’exploite. On pourrait d’ailleurs ajouter que même en mathématiques, l’attente que l’on a des

⁸ cf. Article “EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER” REPERES - IREM. N° 115 avril 2019, Emile BARON, Christophe HACHE

⁹ “EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER” REPERES - IREM. N° 115 avril 2019, Emile BARON, Christophe HACHE

¹⁰ <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/d%C3%A9montrer/23475>

démonstrations, ou devrais-je dire des textes de démonstrations, varient selon le contexte d'emploi.

Une utilisation des quantificateurs serait un texte assez classique d'analyse, alors qu'en Algèbre un texte contenant des équations serait davantage apprécié (et induisant par là même un raisonnement par équivalence).

Observons des productions d'élèves, et quel usage font-ils de la démonstration.

II.2 Des essais de démonstration.

Dans une de nos classe de 4e on a proposé quelques énoncés d'arithmétique à démontrer sous la forme suivante :

- Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.
- Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois.
-

Une première étude fut réalisée en classe en tentant de comprendre au mieux les énoncés (qu'est-ce-qu'une somme ? Qu'est-ce que deux ou trois entiers consécutifs ? qu'est qu'un nombre impaire et qu'est ce qu'un multiple de trois ?). Par la suite on essaya, par l'observation, de percevoir la vraisemblance des propositions. Puis on continua l'exercice en tentant d'exprimer symboliquement les énoncés et on conclut l'étude par la rédaction d'un texte de démonstration classique. Le lendemain, on proposa au cours d'une évaluation ces deux énoncés.

Voici une production emblématique de ce travail:

Problème 3 :
 Rappel : Soit a un nombre. On dit que a est un multiple de 3 si a est dans la table de 3 (c'est-à-dire $a=3 \times k$, k étant un nombre entier).
 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Conjecture : $1+2+3 = 6 \dots / k+(k+1) \dots$
 le nombre entier qui suit k est $k+1$
 le nombre entier qui suit $k+1$ est $k+2$

k	$k+1$	$k+2$	$6+7+8$
$\downarrow +1$	$\downarrow -1$	$\downarrow -1$	$\downarrow +1$ $\downarrow -1$
$k+1$	$k+1$	$k+1$	$7+7+7 = 21$

21 est un multiple de 3.

Donc la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 car quand on soustrait le dernier chiffre et qu'on l'ajoute au 1er chiffre ça nous fait une égalité ce qui montre bien que en additionnant cette égalité on obtient un multiple de 3.

oui, Explicites la : $(k+1) + (k+1) + (k+1) = 3 \times (k+1)$

Scanné avec CamScanner

Cette production reflète bien le travail effectué pour la raison suivante: elle s'est construite à l'aide d'une réflexion faite par l'élève qui a produit ce texte. Lors de la phase d'observation elle a fait la remarque suivante "lorsque l'on ajoute trois nombres qui se suivent ça fait trois fois le nombre du milieu à chaque fois". Remarque surprenante car on ne l'avait pas vu. Derechef, le texte de résolution paru bien plus convaincant pour les élèves sous cette forme que celle plus traditionnelle où l'on ajoute puis factorise par trois l'expression pour aboutir à notre conclusion. Elle propose de distribuer une unité du plus grand nombre au plus petit.

Une autre production, au style plus traditionnelle, accompagne ce premier rendu:

Problème 1 : et $k=0$
 Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Observation: $1+2=3$; $4+5=9$; $999+1000=1999$; $14+15=29$.

Conjecture: La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Démonstration: Soit a un nombre entiers et $a+1$ le nombre qui suit.

$$A = a + (a+1)$$

$$= 2a + 1$$

La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair. **TR.**

*Tres belle redaction!
Raisonnement exacte!*

On y voit une segmentation claire de chaque étape de sa production: Observation / Conjecture / Démonstration. On ressent un discours de la nécessité à la Euclide, néanmoins l'absence de connecteurs empêche d'y faire allusion. Il reste que le symbolisme introduit par François Viète perdure dans nos pratiques contemporaines et elle apprécie . Mais Hérigone préfèrerait sûrement davantage le texte suivant....

Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

$1+2=3$ $3+4=7$ $7+8=15$ $15+16=31$

~~I un entier consécutif~~ ~~nombre entier~~

$I+1$ $I+I+1 = 2I+1$

~~I~~

conclusion la somme de deux entiers consécutifs forme un nombre impair.

si la conclusion avait été omise. En effet, l'évidence de l'égalité fait de la phrase de conclusion une répétition dirait-il, sûrement.

Une dernière production est assez proche de ce que Clairaut propose en disant que "Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégouter les Lecteurs."

Montrer que la somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

$2+3=5$
 $7+8=15$
 $101+102=203$

Le double d'un nombre est pair, donc la somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair car on ajoute 1 unité au double d'un entier.

$7+7=14$
 $7+7+1=15$
 $7+8=15$

CS Scanné avec CamScanner

L'agencement de son texte est particulier: il rédige un texte en toute lettre pour prouver ce qu'il illustre autour. Ce qui diffère ici des autres textes, en plus de l'agencement, reste les outils de démonstration. Quand les autres utilisaient des propriétés liées à l'addition, lui il préféra une propriété autre "le double d'un nombre entier est pair". C'est cette règle, jumelée à deux règles d'incidence qui sont "un entier est soit pair soit impair" et "la parité d'un nombre diffère de celle de son successeur" qui rend son texte recevable. Il est très probable qu'il n'a pas conscience de ces éléments précis mais il apparaît assez clair que c'est ce qui compose l'essentiel de l'implicite de son discours.

La diversité de ces textes montrent quelques points et justifie l'interrogation suivante: Quels obstacles à la démonstration ?

II.3 Quels obstacles à la démonstration ?

En bon enseignant, il est nécessaire d'étayer au mieux les difficultés auxquelles les apprenants se retrouvent confrontés.

Parmi elles on peut évoquer: le registre, la maîtrise de la pensée mathématiques, la difficulté de pensée et d'expression écrite. Il n'est pas ici question de tout aborder dans le détail mais encore une fois de simplement évoquer un des éléments principaux une question d'habitude.

John Von Neumann disait "En mathématiques on ne comprend pas les choses on s'y habitue"¹¹.

¹¹ <https://citation-celebre.leparisien.fr/citations/7152>

La maîtrise de la pensée mathématiques et le registre d'étude supposent une certaine accoutumance à cet environnement: voir des textes recevables et irrecevables, observer les modes de rédaction des enseignants et s'essayer à ces mêmes. Pour la difficulté de pensée il s'agit principalement de méthodes de réflexions ou "astuces" qui sont bien connues pour cheminer dans un raisonnement (apparition de sommes nulles, découper une figure relativement à ce qui nous intéresse sont des exemples). Et enfin le travail de l'expression écrite d'une démonstration ne déroge pas de la règle bien connue "écrire, c'est réécrire".

Précisons que l'accoutumance aux registres des mathématiques suppose une connaissance des objets, des usages que l'on en a et une aisance dans cette pratique. Le sens de la lettre en est un parfait exemple.

Pour finir, l'implicite dans un texte de démonstration est inévitable et constitue une autre difficulté. Un texte de démonstration ne pourra s'inscrire que dans le cadre d'un extrait et jamais de l'œuvre (exception faite des propriétés les plus élémentaires issues directement des axiomes, ou notions communes comme les appelle Euclide). Ainsi, les élèves devront être au clair entre ce qu'ils diront mais aussi ce qu'ils ne diront pas.

En somme, la démonstration mathématique et le texte que l'on produit sont des notions distinctes et les moyens que l'on utilise pour la réaliser sont multiples et varient selon le cadre dans lequel on se place. Des difficultés sont à anticiper, à l'instar de la part d'implicite que contient les différents textes que l'on attendra.

Le contrat pédagogique avec les élèves sur cet exercice devra prendre en compte tout cela. Et un diagnostic des élèves qui participent à notre projet apparaît nécessaire avant de préciser le contrat.

III. Vers une nouvelle expérimentation

Durant le second semestre, une expérimentation va être mise en place dans la classe de 2nde de Youcef. S'inspirant de l'activité présentée lors de l'expérience d'Alain, il s'agira de faire en sorte que les élèves comprennent mieux l'idée de démonstration. Pour cela, nous avons sondé les élèves au travers d'un questionnaire afin d'avoir un aperçu global de leur conception de la démonstration. Cela nous a permis de comprendre quelques difficultés propres à ce groupe d'élèves. Nous pourrions alors envisager un plan d'action adaptée.

III. 1 Analyse du questionnaire et des rendus d'élèves

Analyse du questionnaire

Après analyse des questionnaires de l'expérience menée par l'équipe d'Alain, nous avons pensé que les réponses pouvaient être influencées par la présentation de l'activité. En effet, lors de la présentation aux élèves il leur est demandé d'émettre une conjecture sur le comportement des fonctions. Cette idée d'hypothèse revient dans quelques réponses. Nous avons alors décidé de proposer notre questionnaire avant toutes explications aux élèves.

1. En quoi consiste, selon vous, une démonstration ?

Il s'agit de prouver qu'une hypothèse est vraie ou au contraire si elle est fausse.

1. En quoi consiste, selon vous, une démonstration ?

Selon moi, une démonstration consiste en l'utilisation de tous les outils mathématiques dont on a besoin pour prouver un point de vue, une hypothèse.

De plus, nous pouvons voir que la démonstration est souvent définie par les élèves par son objectif "une démonstration sert à démontrer si c'est vrai ou faux" et parfois par la méthode utilisée.

1. En quoi consiste, selon vous, une démonstration ?

Une démonstration sert à démontrer quelque chose. Elle sert à expliquer comment on a trouvé quelque chose.

1. En quoi consiste, selon vous, une démonstration ?

Une démonstration consiste à expliquer une chose ou de prouver une chose par un raisonnement logique.

Pour amener les élèves à détailler davantage leur conception de la démonstration, nous leur avons proposé un questionnaire avec plusieurs questions:

- 1) Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques ?
- 2) A quoi sert une démonstration en mathématiques ?
- 3) Comment démontre- t-on des résultats en mathématiques ?
- 4) Selon vous, est-ce important?

Les trois premières questions amènent à voir la démonstration sous trois aspects : Quoi ? Pourquoi ? Comment ? La première question est la plus vaste et sans doute la plus compliquée même à notre niveau. La deuxième question permet aux élèves de réfléchir sur les objectifs de la démonstration. La troisième question, nous permettra de savoir ce que les élèves ont retenu (ou non) des démonstrations vues dans leur scolarité. Cela devrait les amener à réfléchir aux outils et méthodes utilisés lors d'une démonstration, ainsi que son fonctionnement.

La dernière question permet aux élèves de donner leur avis sur la démonstration, en particulier sur l'utilité de celle-ci. Cependant, sa place finale dans le questionnaire donne à sa réponse un caractère d'évidence. Cette réponse un peu induite permet de conditionner les élèves aux futurs travaux de démonstration qu'ils pourront rencontrer.

Analyse des réponses

<u>Quoi ?</u>	<u>Pourquoi ?</u>	<u>Comment ?</u>	<u>Important ?</u>
Calcul (2 réponses)	avoir un résultat (3 réponses)	pas de réponse (5 réponses)	non (2 réponses)
justification explication (3 réponses)	je ne sais pas/ pas de réponse (2 réponses)	-en posant le calcul -en développant -en expliquant -en expliquant la ou les méthodes possibles (8 réponses)	oui - pour savoir d'où vient le résultat -pour mieux comprendre/refaire un exercice -pour que le correcteur voit/le raisonnement (17 réponses)
exemple, modèle, méthode (8 réponses)	-détailler un calcul -mieux comprendre -expliquer (un raisonnement) (11 réponses)	-en utilisant un programme/formule - en suivant une méthode donnée (2 réponses)	je ne sais pas / pas de réponse (2 réponses)
pas de réponse / je ne sais pas (2 réponses)	-expliquer à quoi sert une formule - expliquer comment faire un calcul -avoir un modèle (3 réponses)	- en utilisant des propriétés -à l'aide de calcul,théorème,raisonne ment (2 réponses)	
étapes dans un raisonnement (1 réponse)	-démontrer un calcul/propriété - montrer que quelque chose est vrai ou faux (6 réponses)	-faire un résumé en langue mathématique -phrase réponse (2 réponses)	
Total élèves : 22			

Deux grandes idées ressortent des réponses des élèves: “la démonstration est un calcul” et “la démonstration est un exemple”.

Premier constat important, le mot “calcul” apparaît dans 19 questionnaires sur un total de 22 élèves. Il en ressort donc que pour la majorité de cette classe, la démonstration est inévitablement constituée de calculs. Les démonstrations de géométrie rencontrées au début du collège sont donc bien loin des pensées de ces élèves. Une démonstration sert alors à “expliquer” et “mieux comprendre” un résultat. Pour cela, les élèves “développent” et “détaillent” ces calculs.

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques?
Une démonstration en mathématique est un calcul explicite pour obtenir le résultat.

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques?
Une démonstration sert à montrer comment on a trouvé le calcul.

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques?
On démontre des résultats en le détaillant et en l'expliquant.

4. Selon vous...

Cela peut être dû aux différentes notions vues à la fin du collège, les programmes étant essentiellement tournés vers l'algèbre et la résolution d'équations. En géométrie par exemple, les démonstrations utilisant le théorème de Pythagore ou de Thalès font apparaître des calculs dans le raisonnement. Les élèves sont alors focalisés dessus car c'est l'égalité obtenue qui leur permet de conclure l'exercice. On peut penser que pour eux, le raisonnement permettant d'aboutir à cette égalité passe au second plan. De plus “le principe même d'une méthode, vectorielle ou algébrique, est de traduire les hypothèses et la conclusion sous forme d'une graphie, (...), afin de pouvoir ensuite mener des calculs sans regarder la figure, mais en regardant les calculs”¹². On comprend donc bien que le discours logico-déductif étant implicite, les démonstrations dans ces domaines apparaissent aux élèves comme des calculs détaillés.

La deuxième idée se rapporte à la démonstration “exemple”. La démonstration est alors une méthode donnée par le professeur. Celle-ci permet de mieux comprendre la résolution de certains types d'exercices. La démonstration consiste alors à dérouler la méthode comme un algorithme.

¹² “Produire et lire des textes de démonstrations” p.9

1. Quoi sert une démonstration en mathématiques ?
 faire comprendre ce qui se passe dans l'exercice et pourquoi il peut avoir un résultat

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques ?
 ça sert à démontrer et expliquer à quoi sert une formule ou un résultat en mathématique

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques ?
 Une démonstration en mathématique c'est quand on montre un exemple d'un calcul ou d'un système

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques ?
 Elle sert à expliquer comment faire un calcul ou comment utiliser un système informatique

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques ?
 On démontre en prenant un exemple d'un calcul pour mieux faire les autres

On peut ici faire le lien avec des démonstrations en algèbre où l'on demande de résoudre une équation/inéquation ou prouver une égalité entre deux expressions. Le raisonnement est alors implicite, dissimulé sous les notations mathématiques. Elle apparaît alors comme une suite d'étapes, une méthode, permettant d'aboutir au résultat. L'exemple ci-dessous met en évidence ce lien étroit entre méthode et démonstration. Dans le premier texte "on y voit aucun indice d'une structure d'enchaînement de pas . Pourtant on peut imaginer un texte qui sur le plan du sens , est très voisin et qui est structuré fortement comme une succession de pas"¹³, ici le deuxième texte.

MÉTHODE OU DÉMONSTRATION

Énoncé
 Résoudre l'inéquation : $1 - 2x < 3x + 4$

Appliquer une méthode [5]
 $1 - 2x < 3x + 4$
 $1 - 5x < 4$
 $- 5x < 3$
 $x > -3/5$

Faire une démonstration
 Si $1 - 2x < 3x + 4$, on a $1 - 5x < 4$.
 On en déduit $- 5x < 3$ et $x > -3/5$.
 Réciproquement si $x > -3/5$, $- 5x < 3$, $1 - 5x < 4$ et $1 - 2x < 3x + 4$.
 Donc x est solution de l'inéquation si et seulement si $x > -3/5$.

On peut aussi se demander s'il n'y a pas confusion entre la démonstration d'une propriété et son utilisation. En effet, un élève dit "ça sert à démontrer et expliquer à quoi sert une formule". On peut alors questionner nos pratiques et penser que cela vient de la structure donnée au cours : l'énoncé d'une propriété étant suivi par un exemple (une démonstration) utilisant cette propriété.

¹³ "Produire et lire des textes de démonstrations" p.118

Si pour la majorité, la démonstration reste une notion assez vague, certains élèves se sont montrés plus explicites sur les techniques de démonstration. L'utilisation de propriétés et de théorèmes pour démontrer est citée, la notion d'étapes de raisonnement également. L'idée de raisonnement se fait ressentir dans certaines copies. La nécessité de la démonstration qui sert à "prouver si un théorème/propriété/ autre est vrai" est également questionnée par un élève.

2. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques ?
 À l'aide de la calculatrice, théorèmes ou bien
 raisonnement mathématique.

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques ?
 Elle sert à prouver mathématiquement
 que quelque résultat est vrai,
 mais la démonstration n'est pas une
 nécessité pour qu'une chose soit vraie.

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques ?
 On utilise les propriétés.

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques ?
 C'est des étapes pour expliquer un
 raisonnement.

Pour tous (ou presque), la démonstration est importante car elle permet de mieux comprendre mais aussi de mieux se faire comprendre. Les explications et détails dans les calculs permettent de clarifier, justifier les résultats obtenus. Cela permet donc de montrer le raisonnement suivi.

4. Selon vous, est-ce important ?
 Selon moi, il est important de
 démontrer pour s'assurer d'où vient
 le résultat obtenu.

4. Selon vous, est-ce important ?
 Oui, pour que le professeur voie
 comment on démontre, pour
 savoir si la démarche est bonne ou
 mauvaise.

La variété des réponses (démonstration calcul, démonstration méthode, raisonnement) vient sans doute de la diversité des textes de démonstration présentés aux élèves. En tant qu'enseignant il est donc important de se demander quelle est l'orientation donnée à nos démonstrations : "celle ci peut chercher à mettre en évidence la structure déductive du texte, par exemple en explicitant plus ou moins les pas de démonstration; elle peut au contraire se présenter comme une méthode, un algorithme, un calcul"¹⁴. Cependant, on peut penser que globalement cette classe voit la démonstration comme une procédure automatique. Le fonctionnement de la démonstration est alors passée sous silence. Plusieurs questions sont donc soulevées par l'analyse de ce questionnaire : Bien qu'ils maîtrisent la forme de la démonstration, maîtrisent-ils pour autant le fond ? Comprennent-ils les étapes qu'ils suivent ? Ont-ils conscience des propriétés qu'ils utilisent quand elles ne sont pas explicitées ? La démonstration est-elle unique pour ces élèves ou seule la méthode du professeur est acceptable ? Savent-ils mener un raisonnement similaire en utilisant d'autres propriétés ? Ces problématiques sont des pistes précieuses pour notre future expérimentation afin de répondre au mieux aux besoins de ces élèves.

¹⁴ "Produire et lire des textes de démonstrations" p.23

III. 2 . Choix d'une démonstration et plan d'action

Les conclusions tirées par Alain et l'équipe autour du projet nous ont permis d'identifier deux problèmes majeurs au bon déroulement de cette séance. La première étant le manque de temps. La deuxième difficulté à laquelle on pourrait se voir confronté réside dans l'accumulation de lacunes des élèves dans les concepts supposés acquis précédemment. Pour pallier ces deux difficultés, il nous paraît indispensable de bien préparer en amont les élèves. L'idée serait donc d'échelonner cette expérimentation en étapes progressives autour de deux points majeurs : la conception de la démonstration et la préparation à la démonstration en question.

En ce qui concerne la démonstration que nous présenteront dans l'activité finale, nous avons porté notre choix sur possiblement deux d'entre elles :

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel *La position relative des fonctions identité, carré et cub*

L'intérêt de choisir la deuxième serait d'avoir des résultats à comparer avec celle d'Alain, ce qui apporterait une dimension d'analyse supplémentaire afin de mieux comprendre la difficulté qu'éprouvent les élèves. De plus, elle nous permettrait de nous concentrer davantage sur le travail de préparation en amont en s'inspirant notamment de leurs idées. Ce choix n'étant pas encore arrêté, on se laisse la liberté de pouvoir le modifier au courant du semestre 2 s'il s'avère être nécessaire.

Nous avons eu plusieurs idées de travaux pouvant être exploités.

En réfléchissant à ce niveau là, une nouvelle problématique a émergé. Faut-il dès à présent sensibiliser les élèves au différents types de raisonnement, ou concentrons-nous uniquement sur l'un d'entre eux en particulier (en lien avec l'activité finale) ? Si nous choisissons la première démonstration, le raisonnement par l'absurde devra être travaillé en amont. En ce sens, une idée d'activité préparatoire serait de proposer plusieurs assertions, et de leur demander de démontrer des résultats en utilisant des si alors. Il est également possible de travailler de cette manière les implications, équivalences et aussi le raisonnement par contraposée.

Nous avons aussi pensé à préparer des qcm avec plusieurs assertions demandant aux élèves, laquelle semble être une démonstration d'un résultat exposé. La 3e expérience nous incite également à travailler la verbalisation et à apprendre aux élèves à poser des mots sur leurs différentes idées.

À l'issue de cette expérience, les élèves se verront remettre le même questionnaire auquel ils ont déjà répondu. L'idée serait de comparer leurs réponses et de les analyser. Nous pourrions déterminer si oui ou non leur conception de la démonstration à changer et dans quelle mesure.

Bibliographie et sitographie

REPERE - IREM, N°115 - avril 2019 “*EXPLIQUER, JUSTIFIER, PROUVER, DÉMONTRER ?*” d’Emile BARON, Christophe HACHE Irem de Paris LDAR, Université Paris Diderot.

évelyne barbin - raymond duval - Giorgiutti Italo - Houdebine Jean - colette laborde, “*Produire et lire des textes de démonstrations*”, Ellipses, 2001

Eduscol, Raisonnement et démonstration

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/RA19_Lycees_GT_2_MATH_Raisonnement_Demonstration_1171070.pdf

Programme de mathématiques de seconde générale et technologique

https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf

Annexe 1: Quelques questionnaires

Questionnaire

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques?

Une démonstration en mathématique permet de démontrer une formule mathématique ou un programme (démontrer, expliquer...)

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques?

ça sert à démontrer et expliquer à quoi sert une formule ou un programme en mathématique

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques?

Grâce au programme et au formule pour finir avec le résultat final en utilisant programme ou formule.

4. Selon vous, est-ce important?

Oui, c'est important pour pouvoir comprendre et faire des exercices ou autre, ça permet de trouver le résultat final

Questionnaire

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques?

Une démonstration en mathématique c'est quand on montre un exemple d'un calcul ou d'un système

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques?

Elle sert à expliquer comment faire un calcul ou comment utiliser un système informatique.

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques?

On démontre en prenant un exemple d'un calcul pour mieux faire les autres

4. Selon vous, est-ce important?

Oui, car grâce à ça on comprend mieux

Questionnaire

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques?

Une démonstration est le fait de prouver qu'un théorème ou une chose est mathématiquement vraie, mais toute vérité n'est pas forcément démontrée

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques?

Elle sert à prouver mathématiquement qu'un résultat est vrai, mais la démonstration n'est pas une nécessité pour qu'une chose soit vraie

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques?

À l'aide d'un calcul et/ou même ou bien raisonnablement mathématique

4. Selon vous, est-ce important?

Oui car c'est ça qui nous permet de mieux comprendre et répondre de manière plus sérieuse une problématique.

Questionnaire

1. Qu'est ce qu'une démonstration en mathématiques?

Selon moi une démonstration c'est lorsque l'on interroge un calcul.

2. À quoi sert une démonstration en mathématiques?

Une démonstration sert à montrer comment on a trouvé le calcul.

3. Comment démontre-t-on des résultats en mathématiques?

On démontre des résultats en le détaillant et en l'expliquant.

4. Selon vous, est-ce important?

Selon moi oui, c'est important car nous apporte des connaissances.

Annexe 2: Démonstrations au programme de seconde générale.

Liste des démonstrations de 2nde	
Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.	Démonstration par l'absurde. (Critère de divisibilité par 3).
Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.	Démonstration par l'absurde. (Parité/imparité des entiers).
Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.	Démonstration directe. (Factorisation).
Le carré d'un nombre impair est impair.	Démonstration directe. (Identité remarquable + Parité/imparité des entiers).
Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	Démonstration directe. (Définition du carré + commutativité de la multiplication).
Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$	Démonstration directe. (Identité remarquable + croissance de la fonction carré).
Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Démonstration géométrique. (Aire du carré + Aire du rectangle).
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.	Démonstration par double implication. (Colinéarité)
Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.	Démonstration directe. (Pythagore + variation carré).
Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.	Démonstration directe. (Pythagore + Formules trigonométriques).
En utilisant la formule du déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.	Démonstration directe. (Formule du déterminant).
Étudier la position relative des courbes d'équation $y=x$; $y=x^2$; $y=x^3$.	Étude de fonction. (Tableau de signe).
Variation des fonctions carré, inverse, racine carrée.	Étude sur $]-\infty; 0]$ puis sur $[0; +\infty[$. (Signe d'une différence).