Comité Scientifique des IREM

LA MODELISATION

26 Novembre 2003

Dossier diffusé dans les IREM

en septembre 2004

Voir à partir de la feuille suivante

COMITE SCIENTIFIQUE

des I.R.E.M.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

LA MODELISATION

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Recueil des

contributions présentées

à la séance du 26 novembre 2003

Ce recueil a été transmis le 22 juillet 2004 à l'IREM de PARIS VII (Université Denis Diderot), que le Comité Scientifique remercie pour son aide dans la publication et la diffusion de ce travail.

SOMMAIRE

PREFACE

Jean-Pierre RAOULT, membre du Comité Scientifique
Coordonnateur pour ce recueil de contributions

Quel savoir mathématique est généré par la modélisation ?

Quelles participations extérieures l'enseignant de mathématiques peut-il rechercher ?

Ces deux questions étaient posées aux participants du Comité Scientifique des Irems du Vendredi 28 novembre 2003. Ces questions prétextes ont entraîné des prises de positions et des discussions. Il est apparu utile de rassembler après coup les textes issus de ces débats, sans transcrire les discussions. Ils ont le caractère soit de résumés d'exposés préparés en vue de cette session du comité, soit de mise en forme d'interventions effectuées en séance.

Il est apparu au cours de cette séance que la réflexion s'organisait autour de deux axes :

- dégager l'idée même de *modélisation*, à partir de différents points de vue, notamment historiques et épistémologiques, analysant en particulier la diversité des sens associés à ce terme, diversité souvent source de malentendus, et mettant l'accent sur ce qu'ont pu être, dans le passé récent (et mouvementé) de l'enseignement des mathématiques en France, les approches pouvant à divers titres être qualifiées d'initiation à la modélisation ;

- présenter des expériences, mettre en évidence des dangers, analyser la faisabilité de nouvelles tentatives (en particulier dans le cadre des TPE), estimer les besoins en matière de préparation des enseignants.

Nous nous sommes efforcés de présenter les textes dans un ordre qui va autant que possible des réflexions assez larges sur la modélisation vers l'analyse critique de ce qui peut ou ne peut pas être réalisé en classe (étant entendu que de nombreux textes participent des deux approches).

Il doit être bien clair que, si le comité scientifique prend l'entière responsabilité de ce recueil, le détail des analyses, critiques ou propositions qu'on y trouve n'engage que leurs auteurs, qui peuvent avoir privilégié, selon leurs options personnelles, la mise en garde devant des illusions ou l'incitation à aller de l'avant.

De même les avis qui peuvent s'exprimer ici sur le plan institutionnel (intérêt des Travaux Personnels Encadrés, mise en place de structures d'accompagnement pour la formation des enseignants, critique de réformes ou de leur mise en œuvre) relèvent de la place que le Comité Scientifique entend donner aux leçons tirées ou aux perspectives dégagées, en leur nom propre, par ses membres ou ses invités.

Il nous apparaît que pareille attitude se situe dans le droit fil du rôle dévolu à notre comité, qui n'a pas vocation à élaborer une doctrine, mais à stimuler la réflexion en l'étayant sur l'expression d'options scientifiques et sur la relation critique d'expériences d'enseignement.

En tant que coordonnateur de ce facscicule, j'en ai rédigé la Postface, titrée : *La place de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques : obstacles et perspectives*; je l'ai présentée devant le Comité Scientifique en sa séance du 11 juin 2004. A la lumière des travaux de cette journée du 28 novembre 2004, je me suis efforcé d'y dégager des actions envisageables dans les IREM.

Par delà la diversité des positions, le Comité Scientifique tient à souligner l'importance des relations interdisciplinaires auxquelles peuvent participer des mathématiciens, l'attention qui doit être portée à la présentation de la démarche scientifique sous-jacente et le besoin d'un encadrement des recherches et de la formation en ce sens, avec une participation active de collègues de tous les ordres d'enseignement (primaire, secondaire d'enseignement général, secondaire technologique, secondaire professionnel, enseignement supérieur).

1. Pour introduire le débat sur la modélisation

Jean-Pierre RAOULT (membre du comité scientifique), Univ. Paris V (IUT)

et Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées, Univ. Marne-la-Vallée

raoult@math.univ-mlv.fr

Pourquoi l'objet de ce débat au Comité Scientifique des IREM a-t-il été intitulé *Modélisation* et non pas, comme il aurait été peut-être plus traditionnel, *Applications des Mathématiques* (terme qui figure par exemple, au côté de *Mathématiques appliquées*, dans l'intitulé d'une section du Conseil National des Universités) ou encore, de manière plus large, *Interactions des Mathématiques* (terme qui figure, au côté de *Mathématiques*, dans le nouvel intitulé de la section 1 du Comité National du CNRS) ?

Pourtant, le terme *modélisation* est celui qui a été retenu lors de la création, à partir de 1999, d'une nouvelle épreuve orale de l'Agrégation de Mathématiques, ce qui traduit une volonté de définir une nouvelle compétence attendue des enseignants de notre discipline. Le terme *modèle* figure à plusieurs reprises dans le document édité en 2000 par le ministère de l'Education Nationale (et diffusé par le CNDP) à titre d'accompagnement des nouveaux programmes de la classe de seconde (nous y reviendrons). Est mise là en évidence, d'une certaine manière, une volonté d'appropriation par l'enseignement des mathématiques d'une part d'activité du monde extérieur aux mathématiques, alors que *applications* laisse plus le mathématicien en situation de “service” et qu'*interactions* le place en situation de parité, mais ce essentiellement avec d'autres scientifiques.

Historiquement, il est remarquable que l'on assiste actuellement, en ce qui concerne la définition du champ de l'enseignement des mathématiques, à une évolution inverse de celle qui a prévalu pendant, en gros, le dernier tiers du vingtième siècle. Personnellement, j'ai commencé ma carrière d'enseignant en 1962, et j'ai vu disparaître des programmes la dynamique puis la cinématique, devenues l'apanage de l'enseignement de la physique ; on a vu aussi s'éclipser l'astronomie (partie, elle, nulle part, sauf pour quelques sections littéraires !), alors que, sous le nom de “cosmographie”, elle avait été longtemsps un lieu d'apprentissage de la vision moderne du monde par les mathématiques. Inutile de refaire une histoire que nous connaissons tous : ceci allait de pair avec une vision “épurée” des mathématiques (je préfère ne pas dire ici “pure”, tant ce mot est chargé de débats, vrais et faux). Et il faut bien reconnaître que, pour nombre de mathématiciens de ma génération, cet élagage provoquait un vrai soulagement : élève, je souffrais devant le cours de physique, discipline pourtant hautement mathématisée dans la version qu'en offrait l'enseignement secondaire, parce que je n'étais jamais certain de “ce qu'il fallait négliger” ; en mathématiques, pas d'état d'âme : tout était également important, et le moindre chaînon manquant dans une démonstration la viciait tout entière ; alors, quelle satisfaction définitive quand tous les chaînons étaient bien présents !

Que l'on m'excuse de continuer à personnaliser encore un peu mon exposé ; ma vie de mathématicien a vite démenti cette conception de “la Mathématique” ; ayant choisi, mû plus par l'envie de contacts professionnels variés que par une vision proprement scientifique, de faire de la recherche en *statistique mathématique*, j'y ai d'abord commis des écrits que je qualifierais aujourd'hui, avec le recul, de "probabilités bourbakistes", pour constater ensuite que, pour donner véritablement de l'intérêt à mes travaux, je devais mener avec des universitaires d'autres disciplines, avec des médecins, avec des ingénieurs ... un dialogue d'une difficulté d'une autre nature que celle d'une démonstration "qui résiste", dialogue qui me conduisait (quand il aboutissait) à la mise en évidence, dans leurs problèmes, des ressorts essentiels qui soient mathématisables, à la portée des outils que je pouvais leur proposer (et donc, corrélativement, à la mise de côté d'aspects jugés d'un commun accord subalternes) ; c'est cette activité qui fut proprement, pour moi, celle de la modélisation.

Mais, quelqu'essentielle qu'ait été pour moi, dans ma vie de scientifique, cette démarche modélisatrice, je ne suis pas en droit de fonder sur elle seule un avis en matière de choix d'enseignement. Et il est bien clair que je n'étais à même d'apporter des éléments de réponse à mes partenaires que parce que j'avais déjà acquis une familiarité suffisante avec les outils mathématiques que je pouvais mettre en œuvre à leur service ; rien ne pourra donc jamais dispenser l'apprenti (lycéen, étudiant, chercheur débutant ...) de "faire des gammes" sur de tels outils.

En revanche, une certitude que j'ai (et dont une connaissance, même sommaire, de la manière dont les mathématiques se sont constituées fait une évidence) est que la problématique des utilisations de notre discipline est trop centrale pour qu'une réflexion à son propos puisse être négligée dans la formation des enseignants. En particulier, avec la mise en place des Travaux Personnels Encadrés (TPE) dans les lycées, les chances d'une participation pertinente des professeurs de mathématiques passent par le recul qui peut leur être donné par une telle réflexion, sans quoi leur rôle risque de se borner à une simple considération des équations proposées par les collègues de Sciences Physiques, de Biologie, d'Economie ..., considération réduite aux mécanismes de calcul ou, pire encore, à des exigences d'écriture "rigoureuse" ou de terminologie "correcte" qui, même fondées, apparaîtraient alors aux élèves (voire aux partenaires enseignants) comme de pure scolastique.

Inéluctable donc pour les enseignants, le contact avec la modélisation l'est-il pour autant pour les élèves ? Et les choix faits à cet égard par les instructions officielles sont ils clairs et utilisables ?

Avant d'aller plus loin dans cette réflexion, je voudrais éliminer une ambiguïté sur notre mot clef de *modélisation*. Si nous cherchons par exemple le mot *modèle* (car le terme *modélisation* en est absent) dans le document d'accompagnement des programmes actuels de la classe de seconde (chapitre *Statistique*), programmes qui ont fait l'objet des débats et des réticences de mise en œuvre que l'on sait, on trouvera :

- voir sur un cas simple ce qu'est un MODELE probabiliste,

- il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tels que celui de MODELE.

On doit prendre garde au fait que, derrière ces deux phrases, il y a en fait trois niveaux différents dans les acceptions du mot *modèle* : quand on parle de *concepts théoriques difficiles tels que celui de modèle*, on se réfère à l'appréhension de la démarche générale de la modélisation (et il bien évident que le niveau de la classe de seconde est prématuré pour ceci) ; quand on dit, à propos d'un "cas simple", *ce qu'est UN modèle probabiliste*, on évoque la mise en place concrète des outils probabilistes, avec quantification, pour rendre compte d'une situation donnée ; enfin si les rédacteurs de ces instructions avaient mis en cause *LE modèle probabiliste*, il aurait été question de l'axiomatique générale "à la Kolmogorov" que les mathématiciens pratiquent pour traiter de l'aléatoire. Il est bien difficile, dès qu'on touche à cet édifice dans un enseignement, de distinguer les mises en jeu de ces différents niveaux. Mais, pour ce qui nous intéresse ici, il est clair que nous devons nous focaliser (en probabilités-statistique mais aussi dans le cadre de modélisations non aléatoires comme par exemple les équations d'évolution) sur l'aspect le plus proche des faits, c'est-à-dire la démarche de construction d'UN modèle adapté à un contexte donné, contexte déjà suffisamment épuré pour être présentable aux élèves tout en gardant une certaine pertinence ; **la démarche générale ne peut être ici que pratiquée** (par exemple par une interrogation sur la bonne adéquation des résultats déduits du modèle) **sans être théorisée** ; quant à des "modèles mathématiques" au spectre large, tel que celui de la "théorie des probabilités", il s'agit essentiellement de chapitres du cours de mathématiques, même s'il supposent des "justifications" liées à ce qu'ils traduisent.

A la lumière de ces distinctions, lisons par exemple le chapitre *Les enjeux de la modélisation en probabilités* dans l'ouvrage *Autour de la modélisation en probabilités* publié en 2001 par la Commission Inter-IREM "Statistique et Probabilités" ; on y lit :

La démarche suggérée depuis 1991 par les programmes de probabilités du second degré peut se traduire par le schéma . . . : observation de la réalité / description de la réalité / construction d'un modèle / mathématisation du modèle / interprétation des résultats dans la réalité.

Il s'agit là bien de la démarche scientifique générale que j'avais, pour ma part, rencontrée dans mon cours de philosophie en classe terminale ("Math'Elem" selon la terminologie de l'époque) et qui m'avait alors été présentée essentiellement comme fondant la mathématisation de la physique. Et l'auteur de cet article d'analyser, avec pertinence, les "redoutables questions d'enseignement" que pose cette démarche, affirmant que *la difficulté importante est de construire des étapes intermédiaires entre l'observation de la réalité et la construction élaborée du modèle mathématique.* C'est bien sûr là que se trouve l'activité de construction d'UN modèle (par exemple UN modèle probabiliste si on revient au texte des instructions actuelles de seconde).

La réelle difficulté de cette "modélisation en actes", avec les choix d'hypothèses qu'elle suppose (par exemple, dans une situation aléatoire, pourquoi faire, même sans la théoriser, une étape qui sera en fait un postulat d'indépendance entre tel et tel évènements) incite, me semble-t-il, à placer l'apprentissage de la modélisation à sa juste place, qui est à la périphérie d'un cours de mathématiques fournissant, en son foyer, des concepts et outils dont il tâchera, certes, de faire comprendre l'origine, mais en se gardant soigneusement du piège de l'artificiel dans lequel on tombe si on essaye de faire de "pseudo-modélisations" à base d'historiettes apparemment "réalistes" mais en fait si peu crédibles qu'elles dévalorisent le concept introduit et détournent de la réelle activité du modélisateur. Mais cette mise en situation n'est pas un rejet : les zones périphériques méritent aussi d'être visitées, et qui dit "périphérie" dit "voisinages", et là nous retrouvons l'utilité des actions interdisciplinaires.

En résumé, à ce stade de mon exposé, je dirais que la place de la modélisation dans l'enseignement DES mathématiques (ou AVEC les mathématiques) au Lycée (mais aussi au tout début de l'enseignement post-baccalauréat) me paraît ESSENTIELLE (et j'en recommande l'initiation dès la seconde) mais non CENTRALE, alors que, par exemple, les notions d'aléatoire ou d'équation différentielle (je me réfère ici à des outils classiques pour les applications des mathématiques) me paraissent CENTRALES et deviennent ESSENTIELLES au moment où les élèves sont armés pour les traiter (concrètement, pour ces exemples, postérieurement à la classe de seconde). En qualifiant ainsi "d'essentielle" la place de la modélisation, je me réfère en particulier aux questions posées par Marc Legrand dans le document résultant du séminaire de l'ADIREM en 2003 à Nice quand il écrit *Quel type de savoir essentiel vise-t-on ici pour les élèves ?* et quand il situe dans cette perspective le besoin que les mathématiques *apportent un savoir structurant dans l'ensemble des savoirs scientifiques.*

Dans cette perspective, quel travail peut être mené dans les IREM (et dans tous les autres lieux où se déploient les réflexions sur l'enseignement des mathématiques) pour favoriser des activités de modélisation à la fois modestes (vu le peu de moyens disponibles pour les élèves auxquels elles sont proposées) et non caricaturales ? Ce travail, me semble-t-il, peut aller dans deux directions, l'une constructive, l'autre critique.

L'activité constructive vise à susciter et diffuser des documents pédagogiques fournissant des exemples de situations "modélisables", en ne répugnant pas à aller très profondément dans l'explicitation des prérequis, dans la motivation de l'étude, dans la description du cadre concret, dans la justification des choix, dans la conduite des calculs, dans le commentaire des conclusions ; nos collègues sont actuellement amenés à fournir de gros efforts sur des terrains auxquels ils ont souvent été peu préparés par leurs études (voir les difficultés liées à l'introduction de la simulation en seconde) ; ils méritent que ceux qui disposent de connaissances et de données pédagogiquement utilisables fassent de leur côté l'effort de les mettre à leur disposition de manière aisément comestible. De tels exemples peuvent prendre la forme d'exercices à traiter en classe ou de suggestions pour des "projets d'élèves" plus ambitieux, par exemple à proposer en TPE. Heureusement, il commence à ne pas manquer de documents en ce sens ; citons, à titre d'exemples (on m'excusera de puiser encore ici dans ma propre discipline, la statistique) les *onze fiches de statistique* qui figurent dans le document ministériel d'accompagnement des programmes de seconde (des exemples en termes de "stratégies", par exemple sur une politique nataliste, y sont particulièrement attrayants tout en n'étant pas simplistes) ou bien le document *Enseigner la Statistique au Lycée : des enjeux aux méthodes*, édité en 2001 par la Commission-Inter-IREM "Lycées technologiques" (des exemples issus de la fiabilité industrielle sont accessibles tout en restant très proches de la réalité de la pratique industrielle), ou encore le volume *Enseigner les probabilités au Lycée : ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités,* édité en 1997 par la Commission Inter-IREM "Statistique et Probabilités"

L'activité critique doit viser à susciter des débats à partir d'initiatives qui paraîtraient aux uns ou aux autres aller à l'encontre du but poursuivi, ce qui est inévitable dans la période de rodage actuelle ; il n'y a rien de choquant à exprimer ses inquiétudes vis-à-vis de telle proposition d'activité qui paraît donner une idée fausse ou rébarbative de la modélistion par son irréalisme ou sa difficulté ; il est sain de se méfier de certaines illusions telles que le “pilotage par l'examen”, parfois pratiqué par les autorités scolaires dans le but louable d'induire, à partir des sujets, de nouvelles orientations pédagogiques, mais qui risque de se faire au prix d'une inadaptation à la réalité actuelle des classes, inadaptation génératrice de réactions de refus pouvant aller à l'encontre du but poursuivi ; j'en donnerai ici pour exemple un énoncé d'exercice de préparation au baccalauréat figurant dans un manuel, relatif aux dénombrements d'animaux en liberté par la technique dite de “capture-recapture”, exercice dont la maladresse est pertinemment analysée dans *Autour de la modélisation en probabilités* (ouvrage déjà cité) ; autre exemple, les remous provoqués par l'exercice de dynamique des populations posé en filière S au baccalauréat en 2003.

Cette journée de débat sur la modélisation dans le Comité Scientifique des IREM va permettre d'enrichir la réflexion que j'ai tâché ici d'amorcer sur la place, l'ampleur et surtout la traduction concrète de l'activité modélisatrice dans l'enseignement pratiqué par les professeurs de mathématiques, seuls ou en partenariat avec des collègues d'autres disciplines. J'espère qu'elle pourra déboucher sur un débat plus large dans les IREM, sans se limiter aux commissions les plus directement impliquées par leur vocation propre (et dont le travail déjà très important a été cité dans mon exposé).

2. Modèles, modélisations et mathématisations, en vue d'activités Irems

Jean DHOMBRES (président du comité scientifique), Centre Koyré, CNRS

jean.dhombres@damesme.cnrs.fr

Les mots modèles, modélisation et peut-être mathématisation ont changé de sens. Il n'est pas mauvais de mieux voir au-delà d'enjeux de vocabulaire.

1. Points de vue épistémologiques sur les modèles

Dans les années 1970, les épistémologues concevaient un modèle comme un instrument heuristique. Cet instrument vise, par le moyen explicitement reconnu de la fiction, à briser une interprétation inadéquate du réel, en vue de frayer la voie à une interprétation nouvelle plus adéquate. (je mets ci-dessous en italique ce qui n'est qu' illustration destinée à faire comprendre).

L'exemple qui peut faire sens est le modèle de la chute des corps chez Galilée pour interpréter la trajectoire dans le vide d'un boulet lancé par un canon. Le mouvement, ou vitesse, à chaque instant a deux composantes. L'une horizontale, à vitesse constante, l'autre verticale dont la vitesse est une fonction affine du temps. D'où la calcul possible d'une trajectoire parabolique, et "l'efficacité" du modèle dans la description de la portée du canon selon l'angle de lancement, malgré la fiction d'une trajectoire dans le vide (ou absence de résistance de l'air). Ce modèle était effectivement fait contre le modèle de type aristotélicien de la physique des mécaniques d'avant Galilée. On voit le modèle précédent chez un excellent mathématicien comme Tartaglia vers 1540.Il prévoyait trois formes du mouvement, l'ascension en ligne droite, une "hésitation circulaire", et une retombée quasiment verticale. Remarquons que cet ancien modèle n'était pas dépourvu de mathématiques.

Dans la conception épistémologique des années 1970, faire un modèle ne relevait pas de la logique de la preuve et de la démonstration, mais de la logique de la découverte (selon le titre d'un ouvrage de Karl Popper bien plus ancien, mais où les mathématiques ne jouent guère de rôle). Faire un modèle, c'était aussi bien modéliser. Modéliser, c'était à la fois barrer des idées fausses (je dis bien fausses et non pas jugées fausses) et frayer la voie d'une compréhension objectivement meilleure. La meilleure compréhension se prouvait par un plus grand nombre de cas traités par le nouveau modèle. On comprend l'accord a posteriori avec la pensée de Popper, dont la question essentielle est la légitimité de l'induction en science.

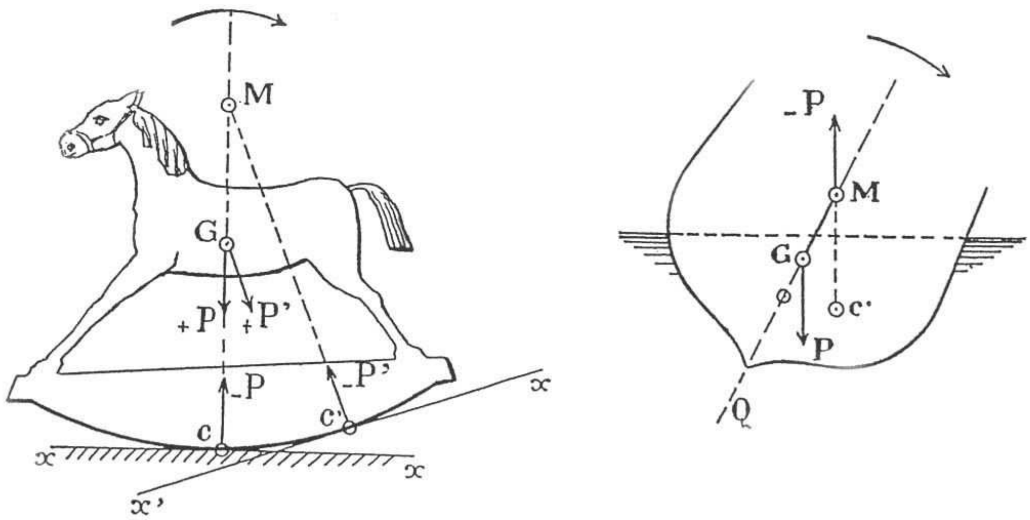
Pour ceux qui avaient une conception positiviste, il ne pouvait cependant être question d'enseigner des sciences de type mathématique par la modélisation. Car, de par la nature a priori conflictuelle d'un modèle, et en vue d'une compréhension, on aurait été contraint de donner aussi à l'élève des idées fausses (comme les idées de la physique d'Aristote, avec un mouvement contrarié, et un mouvement naturel pour la chute des corps). D'où la préférence de fournir directement la "vérité". Une telle attitude empêche de qualifier de modèle ce que l'on présente.

Ainsi, pour la chute des corps, on préférait déduire le mouvement à partir des lois mathématiques de la dynamique, sans même faire remarquer ce qui est essentiel dans le modèle de Galilée, la composition de deux mouvements indépendants (l'horizontal et le vertical). Plus précisément, on se contentait, par l'écriture en abscisse et en ordonnée, de faire jouer la géométrie analytique. Les physiciens faisaient de même, et il suffit de se souvenir de la façon dont était décrite la déviation dans un spectrographe de masse, jusqu'à la redécouverte d'un propriété de la tangente à une parabole. Ou encore de penser à la loi de Torricelli sur la vitesse de l'eau s'échappant de côté à la base d'une cuve. On ne disait donc pas que la géométrie analytique elle-même était un modèle de l'espace du mouvement. Mais on se gardait aussi bien de dire que le modèle de Galilée pour cet espace était autre, et relevait du vectoriel. Il suffit de rappeler la façon dont Galilée explique la chute des corps sur un plan incliné pour faire voir cet aspect vectoriel, que les enseignants de physique n'avaient aucune peine à faire reconnaître par le langage des forces, mais que les mécaniciens (largement positivistes) ne reconnaissaient pas vraiment (préférant l'écriture d'une force en trois coordonnées).

Je viens d'évoquer dans l'exemple ci-dessus le plan $\mathbb{R}^2$, et encore le plan vectoriel réel, comme autant de "modèles". A partir la définition de modèle que j'ai d'emblée fournie, il y a cohérence si la considération analytique (premier modèle) est présentée en vue de la considération vectorielle (modèle final), et pour que soit comprise la stratégie de démonstration scientifique. Bien sûr, on perd la notion de modèle si l'on affirme comme une évidence la "vérité" démontrable mathématiquement, selon laquelle il n'y a qu'un seul espace vectoriel réel à deux dimensions. Montrer au contraire qu'il y a un isomorphisme entre les deux représentations, vectorielle et analytique, et donc deux procédures distinctes de calcul qui donnent nécessairement le même résultat, c'est modéliser, c'est-à-dire frayer un passage des coordonnées aux vecteurs. L'isomorphisme est un théorème d'algèbre linéaire, mais on perd l'effet de la modélisation si on le présente comme un moyen d'unifier deux modèles. La conception structurelle du modèle unique (le vectoriel), était celle des mathématiques modernes, également dans les années 1970. Autrement dit, on évitait la modèlisation entendue au sens de ces mêmes années. Cela peut faire comprendre l'abandon accéléré depuis cette date de références à la physique et au réel dans l'enseignement des mathématiques en France.

Il n'empêche, une théorie mathématique, depuis la tradition euclidienne, se présente en faisant oublier la réflexion physique ou mondaine qui a pu la provoquer. Euclide omet sciemment toute mention sensible. En proposant un enseignement des mathématiques par des modèles issus du monde physique, on ne peut pas oublier que l'on va contre une tradition qui a fait ses preuves. Il y a donc un besoin évident de didactique.

La modélisation, ou la mise en mathématique, représente une autre tradition, celle de la physique mathématique (Newton, d'Alembert, Fourier, Gauss, Einstein, etc.). Je me contente de donner deux dessins de modèles destinés à faire saisir le même concept, celui de couple et aussi bien celui d'équation différentielle du second ordre pour des oscillations. Car c'est la confrontation, entendue cette fois au sens de cohabitation, qui fait saisir le sens mathématique du modèle. On n'élimine pas un modèle en faveur de l'autre : la mise en parallèle de deux situations différentes fait la modélisation de type mathématique du couple. Une erreur serait de croire qu'une seule des deux situations est en soi éclairante si le but que l'on se propose est de mathématiser l'action de rappel d'un couple. Mais on peut aussi estimer que le couple est une notion fournie toute mathématisée par la physique. En ce sens, on considérait que c'était au physicien qu'est dévolu le soin d'enseigner la modélisation.



2. Les réactions

La modélisation aujourd'hui prônée peut apparaître comme une double réaction. Une première réaction contre la forme axiomatique des mathématiques modernes, car le réel n'est pas déductible abstraitement. Et une seconde réaction contre la forme dogmatique économique de la voie positiviste, car la vérité scientifique résulte toujours d'une critique. Mais il y a eu, en plus de ces réactions, adaptation au changement que les mathématiques connaissaient elles-mêmes. Peut-on dans ce dernier cas parler de modèle et de modélisation à l'ancienne manière ? Quel avantage aurait-on à appeler modèle toute théorie mathématique ?

Quelques questions méritent d'être soulevées, alors que la réflexion épistémologique sur la modélisation est en pleine effervescence, et qu'a disparu le consensus du positivisme et du structuralisme, et sans doute la distinction entre physique mathématique et mathématiques.

a. Ce que l'on appelle réel, pour une question donnée, est le plus souvent un modèle préalable. De ce modèle, ceux qui apprennent ont déjà une connaissance, plus ou moins bien située. Fournir avec efficacité pédagogique un autre modèle, c'est à la fois faire comprendre les présupposés du modèle généralement admis, son inadéquation, et l'avantage du nouveau modèle. On ne peut échapper à la discussion critique du modèle ancien pour permettre de comprendre le modèle nouveau. La discussion sur le modèle nouveau est dans cette critique du modèle ancien. Une autre critique exigerait alors de proposer un autre modèle encore, et dans ce cas il n'est pas évident qu'il faille passer par le modèle intermédiaire, quand bien même l'histoire aurait montré cette voie. Je me demande s'il y a un quelconque avantage à enseigner autre chose qu'un modèle qui réussit. Autrement dit, il ne faut pas confondre la critique d'un modèle pour en établir un autre, critique qui peut être un acte d'enseignement, et le débat scientifique qui est bien rarement acte d'enseignement, mais un acte de recherche. Ai-je besoin de préciser ici que l'histoire des mathématiques ne s'intéresse en général qu'à ces derniers actes, et peut-être surtout dans ce qu'ils ont de moins scientifique ou de moins rationnel ?

b. Ce que l'on appelle réel, pour une question donnée, est variable dans le temps et selon les milieux sociaux. C'est largement une fiction. Les mathématiques financières, aujourd'hui en grand développement, travaillent le réel fictif que sont les espérances et prévisions des acteurs de la Bourse. Les mathématiques liées aux codes travaillent le réel inconnu il y a cinquante ans des numéros de cartes bancaires. Les mathématiques liées aux images électroniques travaillent la fiction des pixels. Ces différents réels sont-ils moins réels que le mouvement de Galilée ? Sans doute oui, parce que dans ces réels il y a plus de mathématique que dans le modèle de la chute des corps contre lequel Galilée dut lutter. Il est paradoxal, mais c'est l'état contemporain de la question, que les enseignants de mathématiques soient confrontés à plus de mathématiques dans le savoir de leurs élèves qu'auparavant. Aujourd'hui, et sans doute pour la première fois dans l'histoire, les mathématiques ne sont pas une connaissance entièrement issue de l'école. N'en demeure pas moins indéniable que la démonstration mathématique demeure une activité essentiellement scolaire. Mais de la même façon, la discussion critique sur une traduction d'une langue dans une autre est une activité essentiellement scolaire (voir le thème latin ou la version latine), alors que la traduction s'offre aujourd'hui dans de nombreuses activités.

Se présente autrement ou en en plus la question des probabilités et des statistiques. Il est utile de saisir que la compréhension des probabilités a profondément changé chez les mathématiciens, comme a changé la pratique industrielle des statistiques. Dire que l'aléatoire est le réel qui fait l'objet d'étude du probabiliste, ce n'est pas la même chose que de dire comme Laplace qu'il étudiait la théorie des hasards. Le probabiliste contemporain explique une part du monde (et peu importe qu'on dise qu'il le construit) selon un modèle structuré et considéré comme réel; Laplace cherchait des lois de calcul du hasard à partir des travaux sur la loi des grands nombres, et il modélisait. Là encore, il faut de la didactique pour aboutir au "modèle" contemporain de probabilités, mais il faut aussi une prise de conscience épistémologique de ce que sont devenues les probabilités.

c. Dire que le modèle de Galilée n'est venu de rien que du génie de Galilée, c'est jouer la fable de Descartes et de la table rase. C'est aussi celle de Bourbaki, quand même contraint de signaler des difficultés dans sa progression (le Z en marge, qui le plus souvent reprend une erreur que l'on ferait par appréciation d'un savoir précédent, ou d'une logique des seuls mots). Dire que le modèle de Galilée est naturel, c'est jouer la fable de Condillac, selon lequel l'analyse de sa propre pensée issue des affects extérieurs conduit naturellement à l'abstraction, donc à la connaissance scientifique. Tel est aussi le danger des histoires reconstruites des mathématiques où tout paraît couler de source. Les "historiettes" utiles pour l'enseignement des mathématiques, ou l'habillage efficace du réel pour faire faire des mathématiques, ne doivent pas conduire à oublier qu'il y a création par reconnaissance d'une inadéquation du modèle précédent. L'acte du maître, sa présence, sont alors fondamentaux.

d. La réflexion didactique sur la modélisation, donc sur les situations fournies à l'étude des mathématiques dans les classes par des problèmes issus du réel, un réel entendu au sens d'un modèle, a établi la nécessité de protocoles coûteux en temps de classe mais aussi en connaissances du professeur de mathématiques.

N'avons-nous pas tous ressenti de la gêne à entendre un ministre ne pas pouvoir expliquer la loi physique de la chute des corps, en dehors de la banalité mathématique de la loi du mouvement uniformément accéléré ? Mais rappelons qu'il fallut une longue séance, le 29 octobre 1894, à l'Académie des sciences, pour que Peano puisse expliquer pourquoi un chat qui tombe, quelle que soit sa position au moment de la chute, retombe sur ses quatre pattes.

e. La modélisation ne peut pas être l'habillage pour faire passer le sens mathématique d'un modèle. Sinon elle risque d'être reconnue comme un gadget d'imposture par l'élève. La modélisation exige de la part des enseignants bien plus que des connaissances mathématiques. En outre, deux raisons supplémentaires avivent la difficulté. La modélisation classique de la physique mathématique n'a guère été pratiquée par les enseignants ces dernières trente années ; la modélisation contemporaine, celle qui peut faire mode dans le bon sens du terme, fait jouer des disciplines mathématiques émergentes, et rarement enseignées. Il est évident que les Irems, par leur composante universitaire, ont un rôle à jouer de vulgarisation de ces disciplines émergentes. Cette vulgarisation ne saurait être une véritable critique, au sens du terme déjà utilisé pour passer d'un modèle à un autre. Car, et c'est une certaine nouveauté, les disciplines mathématiques émergentes ne résolvent plus nécessairement des problèmes déjà posés et elles offrent ce qu'on peut appeler un nouveau réel.

il y a là un véritable défi pour les enseignants de mathématiques : ils ne peuvent pas perdre la main, alors que les mathématiques changent sous leurs yeux ; il leur faut inventer.

Conséquences

Il devrait y avoir deux types de groupes Irem sur la modélisation et les modèles. Un premier type de groupe où l'on apprendrait des modélisations. Un autre type de groupe où l'on critiquerait des modélisations dans leur traduction en classe (fiches de TPE, mais aussi bien leçons d'agrégation sur la modélisation). Dans les deux types de groupes, d'autres intervenants que des mathématiciens pourraient intervenir et participer. Dans le premier type de groupes, la présence d'universitaires serait la bienvenue, pour expliquer ce qui se passe de neuf en mathématiques, dans un vocabulaire adapté. Des universités d'été devraient pouvoir rassembler les deux types de groupes. Il pourrait être temps que le réseau des Irems présente au ministère un projet de rénovation des Irems, élargissant la mission aux questions de l'apprentissage des méthodes scientifiques de type mathématique, à tous les niveaux d'enseignement, du primaire au supérieur (jusqu'à la licence).

Références

Paul Ricœur, *La métaphore vive*, Editions du Seuil, Paris, 1975, septième étude, Métaphore et référence, et particulièrement pp. 302 et suivantes.
Vincent Jullien, André Charpak, *Ce que dit Descartes touchant la chute des graves*, Paris, Presses du Septentrion, 1992
Giorgio Israel, *La mathématisation du réel*, Le Seuil, Paris, 1996.
Jean Dhombres, *Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions*, APMEP, mars-avril 2002, pp. 200-222.

3. Quels type de savoirs mathématiques utilise t-on dans la modélisation ?

Guy BROUSSEAU (membre du comité scientifique)

guy.brousseau@wanadoo.fr

La réponse à la question posée en titre de cette intervention est simple : ceux qui sont utiles à la “réponse” à une situation, à un problème.

L’univers représenté est un milieu, le système représentant - le modèle en est un - appartient à un autre milieu. La modélisation est un processus dans lequel des possibilités de modèles sont envisagées, rejetées et remplacées.

En première approche, toute modélisation met en présence un ensemble de modèles permettant dans l’absolu de résoudre le problème posé et un ensemble de modèles utilisables par le modélisateur. Si ces deux ensembles ne sont pas disjoints, le “bon” modèle est le moins complexe de ceux qui donnent la solution et qui sont utilisables (principe du rasoir d’Occam).

On peut remplacer la complexité structurelle par une complexité fonctionnelle qui prend en compte l’ergonomie (coûts, fiabilité, . . .) de l’opération.

Au cours de la journée à différents moments les caractéristiques des modèles et de la modélisation ont été évoquées. Je résume ici celles qui me semblent les plus liées à mon propos. Toutes considèrent un modèle par sa fonction et les conditions de son emploi par un actant, comme il est de règle en théorie des situations.

a. Statique des modèles

Un modèle est un moyen, pour un actant donné, de traiter un problème donné par l’usage d’un répertoire de connaissances “restreint”. L’actant met en présence sciemment un “univers représenté” et un “univers représentant”. Par exemple on représente une vente dans un magasin par un vecteur.

Le problème posé dans l’univers représenté n’y est pas résoluble, par exemple parce que certaines valeurs n’y sont pas observables, ou pas encore observables à l’instant présent, ou parce que certaines décisions n’y sont pas acceptables, parce que certaines manipulations n’y sont pas possibles ou parce que la complexité apparente du problème est trop grande, etc.

La création d’un “candidat modèle” consiste à identifier certains objets ou relations de l’univers représenté et à leur faire correspondre un objet de l’univers représentant.

On appelle *description* une correspondance objet à objet, un modèle dont tous les éléments objets et variables sont supposés avoir un correspondant (être “concrètement significatifs” comme aurait dit A. Régnier). De plus toutes les variables du modèle sont supposées concrètement significatives *au moment* où la description est faite par l’actant (toutes les variables ont une valeur déterminée).

Un *modèle prédictif* comprend des objets ou des valeurs calculables, et s’il est falsifiable ces valeurs sont observables (concrètement significatives). En général le modèle est le résultat d'une mise en correspondance de système à système. Ainsi on peut observer, dans l'univers représenté, des objets "négligés" dans le modèle (aux variations supposées inopérantes), des objets fixés (des conditions de validité, n'intervenant pas dans le modèle), des variables concrètement significatives entrant dans le calcul. Dans l'univers représentant, on peut observer outre les parties concrètement significatives, des variables additionnelles, non concrètement significatives, mais nécessaires au calcul, et éventuellement des objets ou des propriétés "parasites"inutiles ou même gênants mais inévitables (particulièrement visibles dans ce qu'on a appelé le calcul analogique).

Un *modèle prescriptif* est une organisation de représentants proposée à un actant qui doit agir sur l'univers représenté pour le conformer à cette organisation Par définition la proposition n'est pas un véritable modèle (sinon, il n'y aurait pas lieu d'agir sur le milieu représenté pour qu'il le devienne).

Cette symétrie apparente entre représentant et représenté conduit à des usages qui semblent inverses suivant les domaines : pour le peintre le modèle appartient à l'univers représenté alors que pour le physicien il est plutôt un représentant. Pour essayer de lever cette ambiguïté, on a tendance à considérer que le modèle est plus simple que l'objet représenté, et par conséquent, surtout, à en déduire qu'un modèle est un objet "théorique" par rapport à une "réalité". ... C'est inexact. La complexité peut augmenter ou diminuer dans les deux sens. L'utilisation du couple "réalité / modèle" est très dommageable du point de vue épistémologique et didactique. Le concept de "réalité" efface les caractéristiques de l'univers représenté, qui est généralement un ensemble de conditions particulières - une situation -, associé à un problème précis rencontré par un sujet déterminé... et le remplace par la perspective sous entendue d'une universalité, d'une permanence, d'une généralité et d'une cohérence que le modélisateur ne peut pas remettre en question. Ce qui est une forte limitation à l'étude de la modélisation en cours.

Un candidat-modèle est éprouvé, selon les situations, suivant divers point de vue. Une organisation préexistante peut être choisie comme candidat modèle. Sa première vertu est d'être consistant, *logiquement cohérent* (non contradictoire) : il doit pouvoir être vérifié dans certains cas, et *falsifiable* : il doit pouvoir être contredit dans quelques autres. Le modèle est alors *pertinent* si ses parties potentiellement concrètement significatives le sont effectivement dans la correspondance envisagée. Il est *adéquat* s'il permet de résoudre effectivement le problème qui a justifié son usage. Il est *efficace* si cette résolution se fait dans des conditions économiques (coûts, fiabilité, etc.) optimales. Un modèle satisfait ces diverses conditions.

Les raisons d'envisager un modèle peuvent être assez éloignées de sa nature ou de son usage. Ainsi dans la situation "qu'y-a-t-il dans la bouteille ?" (voir l'Annexe dans ce fascicule), les élèves qui doivent deviner le contenu à partir de tirages répétés se heurtent à l'opacité de la bouteille. Si la bouteille était transparente, ils verraient combien elle contient de boules blanches et noires. Mais il ne leur est pas permis d'ouvrir la bouteille. Alors il faut qu'ils comprennent le rapport qui existe entre le contenu de la bouteille et les apparitions de boules. Leur curiosité se porte sur ce que font les boules blanches et noires pour apparaître. Ils demandent d'abord de faire une bouteille *transparente* avec le contenu supposé de la bouteille initiale. Puis peu de temps après de faire autant de bouteilles transparentes que de contenus possibles. Le professeur pense que les élèves viennent de modéliser la bouteille initiale. Et c'est ce qui va effectivement se produire. Mais pour l'instant, le fait de vouloir des bouteilles *transparentes* montre que les élèves cherchaient plutôt une description de l'action des billes ou une explication à l'incohérence apparente de leur comportement, qu'un modèle, rôle que des bouteilles opaques remplissent aussi bien.

Un modèle est *explicatif* lorsqu'il répond à une question de cohérence ou de confrontation avec un répertoire donnée. L'actant passe alors d'une position d'utilisateur du modèle à celle, réflexive, d'analyseur du modèle, d'une situation d'action à une situation de validation ou d'invalidation du modèle. Un modèle peut être adéquat et cohérent, sans pour autant que sa structure et ses propriétés soient déductibles d'un certain répertoire. En général le besoin d'explication surgit dans la recherche d'une sorte de sur-modèle. Il débouche en général sur des aménagements du modèle et/ou du répertoire.

Par exemple, dans ses recherches d'un appareil à décollage court ou vertical, Jean de la Cierva imagine un appareil sustenté par hélice horizontale et tracté par une hélice verticale, une sorte d'hélicoptère avant la lettre, un avion sans voilure fixe. Les deux hélices sont reliées au même moteur. La Cierva n'obtient pas de décollage. Il agrandit fortement l'hélice horizontale, sans résultat. Soudain, l'arbre de transmission du moteur à la voilure tournante casse et l'appareil bondit verticalement à vingt mètres de hauteur. Le mauvais hélicoptère est devenu un bon autogyre, mais il reste à expliquer ce qui s'est passé et à construire un modèle de plus en plus adéquat du vol du plus lourd que l'air.

En définissant le modèle par sa fonction nous avons fait apparaître que le rôle (la fonction) des *différences* est aussi important que celui des *ressemblances*. Les différences peuvent concerner toutes les composantes de la situation : objets, relations, règles ou axiomes. Ce fait est souvent ignoré. En effet, pour des raisons évidentes, l'attention de l'utilisateur ou du constructeur se porte habituellement beaucoup plus sur les caractères de la situation de référence qui sont *conservés* dans ses modèles, que sur ceux qui sont ignorés ou modifiés. Et si ces derniers sont pris en considération, c'est le plus souvent pour souligner les insuffisances, les limites voire l'incohérence du modèle. Par convention, la situation de référence est identifiée à une certaine réalité, c'est-à-dire supposée non contradictoire. Or ce qui rend habituellement nécessaire, ou au moins utile, l'usage d'un modèle c'est le fait que la situation de référence ne permet pas, elle, de résoudre directement le problème posé alors que le modèle le fait.

Ceci est vrai pour les modèles descriptifs et prédictifs, et encore plus pour les modèles prescriptifs. Les modèles "explicatifs" ont un rapport plus libre avec la situation de référence parce qu'ils servent aussi bien à accepter qu'à rejeter une idée ou une explication. Les modèles faits pour être des contre exemples dans un raisonnement sont très utiles à la démarche scientifique.

En conclusion, pour identifier un modèle et l'analyser dans son rôle, il faut préciser :

- qui est l'actant, l'utilisateur ou le créateur du '"supposé modèle" et s'il l'utilise comme tel,
- si cet ensemble de conditions est simplement "utilisé" par l'actant,
- si les conditions retenues par cet actant constituent un modèle pour l'observateur ou non (c'est-à-dire s'il est "correct" ou non).

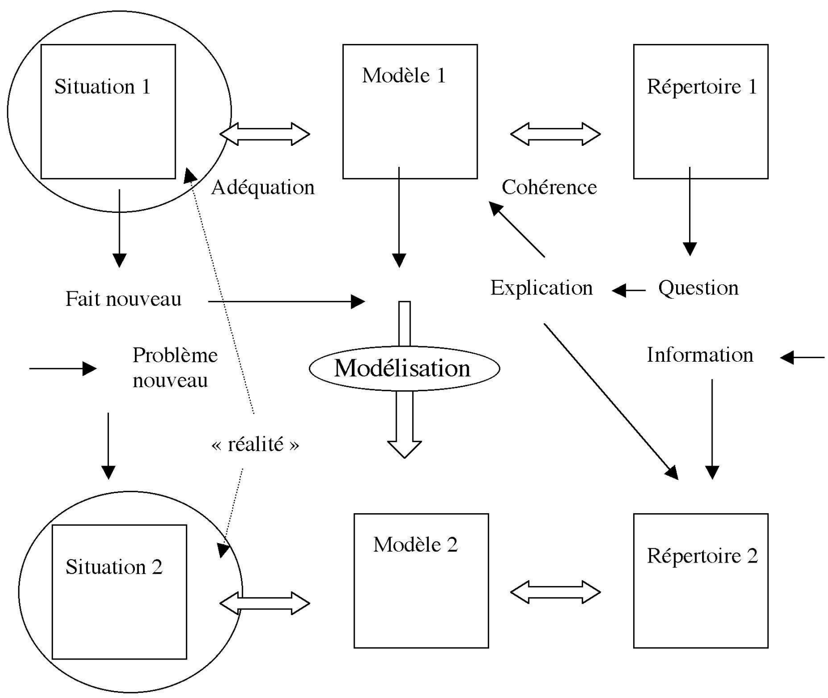
Il est fréquent de voir utiliser le terme “modèle” pour désigner de façon impropre un ensemble de conditions et d'objets posés a priori par un actant avec l'intention d'en faire un modèle, ou dans la croyance qu'il en est un, alors que sa cohérence et son adéquation n'ont pas encore été établies par lui (et peut-être ne peuvent pas l'être). Dans ce cas, cet ensemble de conditions peut “jouer le rôle de modèle” mais ne pas en être un. Que l'actant étudie cet ensemble de conditions comme supposé modèle, ou qu'il en fasse usage en croyant qu'il est un modèle (correct) alors qu'il ne l'est pas pour l'observateur de cet actant ne suffit pas pour lui conférer le statut de “modèle” pour l'observateur.

b. Dynamique des modèles, modélisation

En élargissant l'étude des modèles aux situations en justifiant l'usage, nous facilitons l'étude des processus qui en amènent l'apparition ou l'évolution.

Un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances. Conformément à notre première approche, la question et la réponse sont conditionnées par ce répertoire. Le meilleur modèle dans un répertoire peut ne pas l'être dans un autre ou même s'y révéler faux. Le fait pour un modèle d'être incorrect dans un répertoire et une situation donnés n'est pas contradictoire avec le fait qu'il soit “correct” dans une situation très voisine avec un répertoire différent.

Nous avons ainsi le schéma de la modélisation suivant :



La résolution d'une situation S1 a appelé la construction d'un modèle M1 grâce à un répertoire R1. M est cohérent avec R1 et adéquat à S1. Survient alors une perturbation qui remet en cause le système S1, M1, R1 : l'agrégation d'un fait nouveau à S1 (passage de S1 à S'), l'adjonction d'une connaissance ou d'une question nouvelle (passage d'un répertoire R1 à un répertoire R'). Alors se repose l'examen de l'adéquation et de la consistance de M1. La confrontation aboutit parfois à la création d'un nouveau modèle M2 et parfois aussi à la création de R2. et parfois à une extension ou une réduction de S1 à S2. Nous appelons création aussi bien la modification que le remplacement.

Ainsi la modélisation, en tant que fait "historique" est, pour un actant, le passage de la conception ou de l'usage d'un système S1, M1, R1 à un système S2, M2, R2, d'un candidat-modèle ou d'un modèle à un modèle différent.

4. Les mathématiques enseignées peuvent-elles bénéficier du sens fourni par la modélisation ?

Jean-Pierre FERRIER, IREM de Lorraine

ferrier@iecn.u-nancy.fr

On va expliquer que la réponse à la question posée en titre de cette communication est non, du moins si l'on prend le mot modélisation dans le sens communément admis chez les ingénieurs et les scientifiques. La modélisation ne peut apporter de sens qui puisse être pris en compte dans l'enseignement du collège ou du lycée.

LE VOCABULAIRE

Qui parle de modélisation ?

De modélisation, au sens propre du terme et à propos de l'enseignement, il a été question avec Nicolas Bouleau dans un article de la revue de l'APMEP [Bo], lequel décrit la modélisation chez les ingénieurs, ou avec Claude Lobry [L] dans sa conférence au dernier séminaire des IREM de Nice, lequel a parlé de la modélisation en biologie. On aurait pu penser également à Ivar Ekeland à propos des sciences économiques, mais il ne semble pas qu'il se soit exprimé en pensant à l'enseignement.

De ces analyses, il ressort que la modélisation est :

chez les ingénieurs :	**dans les sciences molles :**
- complexe	- subtile
- peu explicative	- très réductrice
- efficace	- instructive

On est très loin de pouvoir inspirer l'enseignement de base. Dans les deux cas le transfert vers l'enseignement, même s'il évoqué, est impossible. C'est bien trop savant et l'on pénètre beaucoup trop peu l'intimité des phénomènes.

Pour les ingénieurs, c'est l'efficacité qui prime. Et elle est au rendez-vous. En construction aéronautique toute la mise au point se fait sur ordinateur. Le premier avion construit est vendu et transporte des passagers. Il faut détruire l'idée qu'on applique des recettes. La conception des avions furtifs a donné lieu à des mathématiques très avancées.

Pour être complet, il aurait fallu donner un exemple de mathématiques pour l'ingénieur qui restent accessibles. Il s'agit de tout ce qui touche à l'infographie, que l'on s'intéresse au dessin des caractères d'imprimerie ou à la confection des pare-brise des véhicules Renault. On fait grand usage de fonctions *splines*, de courbes de l'ingénieur Bézier, ou de leurs équivalents pour les surfaces. On doit à Jean-Jacques Risler [R] l'idée de se servir de ces techniques pour illustrer la dérivabilité dans les premières années de l'université.

Le monde virtuel des fonctions splines semble ne rien devoir à la physique. En fait il lui doit tout. L'oeil humain aime les courbes tendues. L'exemple en est donné par une languette flexible — d'où le terme anglais spline — à la laquelle on impose à chaque extrémité une position et aussi une direction. C'est un bon exercice de chercher l'équation de la courbe ainsi obtenue. Qui pourrait s'y intéresser parmi les collègues mathématiciens d'aujourd'hui ?

Dans les sciences molles, on ne cherche pas à reproduire les phénomènes réels dans toute leur complexité. On cherche surtout à détruire des idées fausses, souvent tirées elles-mêmes de modèles un peu trop vite imposés. Il y a un ou deux ans un éminent biologiste expliquait les vertus de la reproduction bisexuée, beaucoup plus propice à l'adaptation au milieu que la reproduction monosexuée. Cependant il terminait sur un doute : comment un petit avantage pourrait-il compenser la brutalité de la suite géométrique 2^n traduisant le fait qu'avec des femelles seules chaque génération compte deux fois plus d'individus. L'étude d'un petit système différentiel tenant compte de la limitation des ressources du milieu remet les choses en place.

Ce dernier modèle n'est pas sans engendrer aussi des idées fausses. Sur la base d'une évolution sur le long terme, on va définir ce qu'est un milieu favorable à une population α en compétition avec une population β. Se peut-il qu'en cas d'alternance régulière entre deux milieux - le jour et le nuit par exemple - les deux soient favorables à α alors que l'alternance est profitable à β ? Comme l'a bien expliqué Claude Lobry, l'étude de deux petits systèmes montre aussi que oui.

Et en physique ?

En physique le terme intervient rarement. Il est utilisé quand le physicien commence à ne plus vraiment comprendre, donc à un niveau très élevé.

Eventuellement le physicien dira que la modélisation est de son ressort et qu'il revient au mathématicien de fournir les outils. En fait la frontière entre les responsabilités de l'un et de l'autre est floue.

A un niveau élémentaire, la modélisation peut être faite aussi bien par le physicien que le mathématicien, et personne ne parle de modéliser. A un niveau plus élévé il faut les deux. Il y a des exemples de collaboration de pointe. Cependant, dans tous les cas, chacun doit connaître une part significative de la discipline de l'autre ; ce n'est plus réalisé aujourd'hui chez les enseignants de mathématiques.

C'est dommage car on dispose de modèles simples utilisables dans l'enseignement des mathématiques à un niveau raisonnable. C'est le cas de l'optique géométrique. C'est aussi le cas dans le problème de la stabilité des navires, que Jean Dhombres [D] cite en exemple historique de mathématiques appliquées, ou de mathématiques *mixtes*, comme on disait à l'époque.

Quand Nicolas raille Bouleau à propos de ce qu'il appelle les "sciencettes", comme l'optique géométrique, parce qu'elles seraient fausses, il a raison du point de vue de l'ingénieur. Quand il faut, pour concevoir un objectif photographique, corriger l'astigmatisme, les aberrations géométriques et chromatiques et limiter la diffraction, une lentille simple ne fait pas l'affaire. Cependant l'optique géométrique est rigoureusement exacte comme modèle asymtotique en lumière monochromatique. Alors que l'optique de l'ingénieur est fausse et sa faiblesse assumée, avec des résultats qui satisfont pleinement l'utilisateur.

Pour éviter les confusions, quand on travaille des deux côtés de la frontière entre mathématiques et physique, mieux vaut parler simplement de mathématiques contextuelles.

Qui parle de modèle ?

Noter que les probabilistes utilisent le mot modèle comme d'autres parlent d'équation, différentielle ou autre, ou encore les physicien de loi.

Cependant choisir un modèle pour travailler sur ce dernier n'est pas modéliser. Car modéliser c'est expliquer le pourquoi du modèle en précisant les éléments qu'on a choisi de prendre en compte.

Lorsque Claude Allègre compare la chute libre d'une balle de tennis et d'une boule de pétanque sur les premiers mètres de la chute, il annonce qu'il peut négliger la résistance de l'air et prend l'équation - ou modèle - donné par

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

pour conclure qu'il n'y a pas de différence sensible. Ceux qui l'ont raillé auraient dû prêter plus attention à son propos.

Quand Gérard Kuntz nous explique que c'est l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}$$

qu'il faut choisir, il ne fait qu'introduire en plus la résistance de l'air, à des vitesses relativement faibles. Cette équation est elle-même inadaptée à la boule de pétanque dès que cette dernière a acquis suffisamment de vitesse.

Le choix du modèle n'est jamais arbitraire. Il dépend de ce qu'on prend en compte ou qu'à l'inverse on néglige. Une fois le contexte précisé, il doit s'imposer. L'histoire a cependant montré que la route pouvait être longue et semée d'embûches.

Lorsque la noosphère, avec des formateurs des IUFM ou des IREM par exemple, parle de la théorie des probabilités, on entend souvent que les résultats dépendent du choix du modèle. Il n'y a rien d'étonnant à cela. Les solutions d'une équation ne dépendent-elles pas de l'équation ?

Là où rien ne va plus, c'est quand ils laissent entendre que le choix du modèle est arbitraire. Il arrive à des collègues, pourtant expérimentés, de s'exprimer de façon équivoque et de favoriser involontairement cette attitude.

Prenons le jeu de franc-carreau, dû à Buffon et étudié dans une publication récente de l'IREM d'Aquitaine [^{T}]. On lance un écu dans une chambre pavée de carrés égaux ; quelle est la probabilité que l'écu soit à franc-carreau, i.e. entièrement dans un carreau ? Lorsque Buffon ramène l'étude à un seul carreau et annonce que le centre de l'écu suit une distribution uniforme sur le dit carreau, il fait preuve d'une brillante intuition, dans l'esprit d'une époque qui ignorait le besoin de justicications pédantes.

Cherchons d'abord à simplifier les choses. Si l'on se tient vers le milieu d'une grande chambre pour jeter l'écu, autant la supposer sans limites. On se placera donc dans la situation idéale d'un carrelage infini.

Cependant cela n'a pas de sens de choisir un point - le centre de l'écu - au hasard dans le plan. Ce faisant on fait l'hypothèse implicite d'une invariance, à savoir l'invariance par translation. Or il ne peut exister dans le plan — comme déjà sur la droite — de loi invariante par translation ; il existe une seule mesure non nulle invariante, à un facteur près, et elle est de masse totale infinie.

Représentons la chambre par le plan $\mathbf{R}^2$ et le carrelage par le réseau $\mathbf{Z}^2$. Comme les translations entières n'affectent pas l'évènement considéré, au lieu de chercher une mesure invariante sur le groupe $\mathbf{R}^2$ lui-même, nous allons en chercher une sur le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$. Il est alors facile de vérifier qu'il existe une loi de probabilités invariante et une seule. C'est la mesure $dxdy$, c'est-à-dire l'aire usuelle, ou encore la loi uniforme. Le quotient est un tore, mais on peut sans inconvénient l'assimiler à un carreau, car il est improbable que le centre tombe sur les bords.

On peut donner de cette présentation une version moins pédante. Cependant le principe de réduction est un support essentiel pour l'intuition. Comme premier enseignement de cet exemple, on retiendra que modéliser est un travail de pro.

Il y a un second enseignement. On a présenté des hypothèses idéalisées, asymptotiques. Qui a déjà lancé un écu dans une chambre infinie ? Mais une fois les hypothèses acceptées, le modèle s'impose de façon implacable.

Maintenant on a dit que, dans une chambre assez grande, le joueur lançait près du centre. Cela semble contredire le fait qu'il lance l'écu au hasard. Pour en avoir le cœur net, prenons un exemple simple, celui d'un joueur dont le lancer est modélisé par une densité gaussienne g_σ centrée à l'origine, supposée être aussi vers le milieu de la chambre, et d'écart-type σ. Tant que σ n'est pas trop grand, on peut supposer la chambre infinie. La probabilité que l'écu rencontre les murs de la chambre est en effet très faible. On obtient la loi sur le tore en sommant sur les translations entières. La densité sur le tore est alors donnée par la gaussienne périodisée. Or, dès que σ est comparable au côté du carreau, l'erreur que représente la différence avec la densité uniforme est extrêmement faible. Autrement dit le modèle asymptotique est beaucoup moins ridicule qu'il n'y paraît.

En revanche modéliser le lancer par une loi à la fois discontinue et uniforme sur chaque carreau serait déraisonnable. Que l'on puisse obtenir ainsi le bon résultat montre seulement qu'une modélisation absurde peut fournir un résultat acceptable. C'est un troisième enseignement.

Le problème de l'aiguille de Buffon se traite de façon analogue, mais caractériser la mesure invariante est un peu plus délicat.

L'exemple de la boite de conserve qui peut retomber sur une base ou une arête ne correspond en revanche à rien. S'il faut tenir compte de la pensanteur, d'un vissage initial impossible à probabiliser naturellement ... mieux vaut penser à autre chose.

Il faut donc se méfier des situations de pure fiction. Le spaghetto qu'on coupe en trois morceaux ou la corde qu'on choisit au hasard sur un cercle ne conduisent à aucun modèle naturel car il n'y a pas d'hypothèse. Disserter sur de tels sujets n'a pas le moindre rapport avec la modélisation. Parler de "modélisations différentes" est impropre. C'est juste une occasion comme une autre d'illustrer des modèles.

Pour terminer sur un registre élémentaire, consisérons le jeu de Bernard Parzysz où l'on tire un gagnant dans un ensemble B de bonnes réponses en tirant successivement dans l'ensemble

A de toutes les réponses jusqu'à en trouver une bonne. L'équiprobabilité des évènements "c'est b qui gagne" dans l'ensemble C des arrangements de A se montre sans calcul. On a supposé implicitement l'invariance par le groupe S_B des permutations de B. Or ce groupe opère sur C de façon invariante. On peut même ajouter à A des objets hétéroclites. D'ailleurs les transpositions suffisent. C'est l'argument de symétrie.

DEUX PHILOSOPHIES POUR LE RAPPORT A LA REALITE

Un contresens majeur.

Il est malheureux que le mot modélisation se soit introduit dans la noosphère, avec un sens nécessairement déformé et qui traduit un contresens dans le rapport à la réalité.

Quand Nicolas Bouleau dit "que les mathématiques se sont reliées historiquement aux autres sciences et que les notions se sont chargées de sens", il dépasse sans doute sa pensée mais résume sans le vouloir une opinion commune chez les enseignants. En s'exprimant comme il le fait, il accrédite l'idée que :
- les mathématiques existent a priori et elles trouvent des applications,
- les notions existent a priori et on leur ajoute du sens.

En fait les mathématiques sont en permanence forcées par la physique. "Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie", pour imiter Rudolph Bkouche [B] qui cite Poincaré dans *La Science et l'Hypothèse*.

Pour suivre encore et toujours Rudolph Bkouche, les mathématiques s'inscrivent historiquement "dans le programme de la *mathesis universalis*, laquelle n'est autre que la construction de la science rationnelle ... celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* : ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration."

Plus radicalement, Arnold [A] considère que les mathématiques sont une science physique. Il rend le formalisme responsable de la crise de l'enseignement des mathématiques en France.

Trois pommes plus trois pommes.

D'un côté, pour expliquer "trois pommes + trois pommes", on va chercher un modèle abstrait pour l'addition et on applique le modèle. De l'autre on ose s'appuyer sur l'expérience de la vie courante et construit l'addition dessus.

D'un côté, pour établir la figure d'équilibre de la chaînette, le mathématicien ne sait plus et le physicien ne veut plus ; on choisit arbitrairement un modèle, algébrique ou hyperbolique ou autre, et l'on pense avoir tout résolu. De l'autre aussi bien le mathématicien que le physicien peut s'atteler à la question, faisant intervenir pesanteur, tension et tangente ; alors l'équation s'impose.

D'un côté on définit un vecteur comme un triplet (x_1, x_2, x_3), on balance une formule pour le moment d'inertie. De l'autre on définit, selon Poincaré, un vecteur comme une force, on ose le jean qui sèche de Marc Legrand, on insiste sur le fait qu'une masse placée près de la charnière d'une porte a moins d'effet que la même placée près de la serrure. D'un côté on annonce que le sens usuel des mots est à oublier tout de suite en mathématiques. De l'autre on explique que le sens est d'abord le même et que ce n'est que plus tard qu'il faudra est plus précis.

CONCLUSION

Un post modernisme ...

Cette mode prétendûment “modélisatrice” dans l'enseignement, loin de corriger les excès des mathématiques dites “modernes”, en perpétue les travers sous une forme post-moderne.

Avec les mathématiques “modernes”, on prenait pour exemple le mathématicien professionnel. Avec la prétention “modélisatrice”, on prend pour exemple l'ingénieur mathématicien. *Dans les deux cas on confond logique de production et logique d'apprentissage.*

Avec les mathématiques “modernes”, on a ignoré le physicien par indifférence. Avec la prétention “modélisatrice”, on l'ignore par condescendance, lui concédant un piètre rôle de figurant.

Avec les mathématiques “modernes”, les mathématiques existent d'abord et après on verra. Avec la prétention “modélisatrice”, elles existent d'abord et après elles s'appliquent comme par enchantement et, en cas de conflit, c'est le modèle qui dit la vérité.

Dans les deux cas on ne peut profiter d'images préexistantes. Avec le risque d'une application en dépit du bons sens.

... **ou un retour aux sources.**

Revenir à des mathématiques qui sont à la source de la Science sera difficile. Il faudra une attitude ouverte, accepter la lame d'acier, la chaînette, le jean qui sèche, le principe de superposition qui traduit la linéarité, l'énergie entièrement répartie entre les modes qui traduit la formule de Bessel-Parseval ...

Il faudra remettre à sa place le formalisme, attendant qu'il soit utile pour le proposer.

Il faudra éventuellement remettre en cause quelques habitudes, telles que la notation fonctionnelle moderne, trop éloignée de l'idée d'une fonction en physique.

Il faudra une sélection rigoureuse des approches, car on ne peut pas à la fois enraciner profondément les notions et couvrir une surface démesurée en se permettant tous les chevauchements.

Il faudra aussi une grande cohérence. Si l'on veut imiter à l'occasion les physiciens qui ont su mettre du vernis à leurs programmes, et donc traiter des sujets un tantinet savants avec des moyens modestes, cela ne peut se faire que dans un ordonnancement impeccable.

[A], Arnold (V. I.), Tompological Problems of the theory of wave propagation, *Russian Math. Survey*, 51 :1

[Bk] Bkouche (Rudolph), *La géométrie élémentaire, une science physique ?*, à paraître dans Repères-IREM.

[Bo] Bouleau (Nicolas), *Sur le rôle des mathématiques dans la société d'aujourd'hui*, Revue de

l'APMEP. 2002 (numéro 440, p. 309)
[D] Dhombres (Jean), Conférence à l'Institut Elie Cartan (Nancy).
[L] Lobry (Claude), Conférence au Séminaire de l'ADIREM, mars 2003, Nice.
[P] Poincaré (Henri), *Les définitions en mathématiques*, 1903.
[R] Risler (Jean-Jacques),Conférence au colloque, Bussang.
[T] IREM d'Aquitaine, *L'esprit des lois continues*, 2003

5. Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique

Guy BROUSSEAU (membre du comité scientifique)

guy.brousseau@wanadoo.fr

Faire pratiquer la modélisation aux élèves, conduit immanquablement à remplacer la considération d'un "savoir à enseigner" par celle d'un ensemble de possibilités de connaissances et de savoirs alternatifs. Ce qui entraîne à coup sûr une augmentation très importante de l'entropie et de la complexité didactique, donc du temps d'enseignement. Les savoirs enseignés sont alors accompagnés d'un flux important de connaissances diverses, mais ces connaissances pour précieuses qu'elles soient ne s'évaluent pas comme les savoirs, c'est-à-dire de la façon habituelle et les décisions didactiques à prendre dans le déroulement de l'enseignement ou suivant les résultats ne sont connues ni des professeurs ni de la société.

Or les nouvelles méthodes d'évaluation sont déjà mal adaptées et assez décriées (parce qu'elles ne concernent que des savoirs de faible niveau taxonomique et qu'une faible partie des connaissances et des objectifs visées par l'éducation, et surtout parce qu'elles n'établissent aucune relation entre leurs observations et des décisions didactiques utilisables). Leur inadaptation à la modélisation risque d'aggraver les dysfonctionnements, les difficultés des professeurs et des élèves et surtout les querelles avec les parents et la société.

Même si nous possédons quelques bonnes réponses micro-didactiques et même si nous étions en mesure de les développer, le système macro-didactique n'est pas préparé à assumer et à gérer cette modification importante.

Depuis trente ans toute les réformes sont allées dans le sens de l'augmentation de la complexité de la tâche, de l'obéissance à des mots d'ordres divers non accompagnés de leur mode d'application, de l'admiration concomitante des tentatives les plus opposées et de la perte du contrôle rationnel de l'activité professionnelle des professeurs par les professeurs eux mêmes. Ces « réformes » ont développé non seulement dans le public mais aussi chez les professeurs, des conceptions magiques de la façon dont certains dispositifs ou certains facteurs doivent agir sur les résultats des élèves. Les conceptions "magiques" ont désarmé les régulations les plus raisonnables. Une réforme ne peut pas être bonne si elle ne s'appuie pas sur une connaissance meilleure mais surtout plus effective du système à réformer. Se contenter de prendre le contre-pied des décisions précédentes, en reconduisant les mêmes conceptions erronées, ne peut produire aucun progrès.

Le projet d'introduire la notion de modèle dans l'enseignement peut se traduire de diverses façons. Il convient en effet de distinguer :
- l'enseignement de modèles déjà construits et utilisés,
- l'initiation à la modélisation,
- l'initiation à la pratique de la modélisation par les élèves.

car les possibilités de réaliser et de réussir ces opérations sur une grande échelle sont très différentes.

La première solution consisterait par exemple à enseigner quelques exemples de modèles tout faits, des *mathématiques mixtes* comme autrefois la mécanique, l'astronomie, ou la géométrie descriptive. La science moderne offre de nombreux exemples de ce type.

Toute discipline, y compris les mathématiques elles mêmes, peut devenir le milieu de modélisations. Ainsi, la modélisation est une méthode pour l'étude des axiomes de la géométrie. Mais l'usage fait envisager la modélisation comme l'association d'un milieu, formé de préférence de connaissances scientifiques (astronomie, physique, biologie...) "dures" ou "molles" et d'un autre milieu habituellement plus "théorique"dans la classification comtienne. Le terme de modèle est habituellement utilisé pour désigner le milieu le plus "théorique" mais le calcul analogique qui utilise des grandeurs physiques pour effectuer de calculs était aussi une modélisation.

De sorte que dans cette voie, le nombre des connaissances à enseigner augmentera, car elle suppose au moins la présentation d'un "milieu" qui tiendra lieu d'univers représenté. Par exemple :
- l'espace est un milieu dont les géométries sont des modèles mais LA géométrie n'est pas un modèle, elle est l'étude de la consistance de ces "modèles",
- les problèmes linéaires des livres de Diophante et leurs réalisations dites "de la vie courante"(!) constituent le milieu de l'arithmétique élémentaire et des débuts de l'algèbre,
- les situations de l'expérience sur le statistiques concourent à fournir aux élèves un milieu pour l'établissement du calcul des probabilités ; ce milieu doit se substituer aux habituelles collections de raisonnements spontanés ou véhiculés par la culture qui provoquent les obstacles connus,
- la manipulation et la désignation d'objets est un milieu pour le vocabulaire logique élémentaire,
- l'énumération est le milieu de l'étude des nombres naturels,
- le mesurage est le milieu de l'apprentissage de la mesure et celui de l'apprentissage des nombre décimaux etc.

Le simple énoncé d'une situation comportant un milieu étranger au secteur de connaissances enseignées complique immédiatement la tâche des élèves et du professeur de façon souvent rédhibitoire. La complication est d'autant plus grande si ce milieu n'est pas qu'un décor, un habillage ou un cadre, etc. mais s'il intervient dans l'élaboration de la solution comme c'est le cas dans une véritable modélisation.

L'idéal éducatif, appuyé sur des observations psycho cognitives tendrait à faire préférer la troisième solution, que nous analysons dans le suite de cette intervention.

Solutions micro-didactiques.

De nombreux chercheurs et enseignants, dans les IREM (mais aussi dans d'autres organismes) ont étudié diverses solutions micro-didactiques au problème de la formation des élèves aux démarches scientifiques. Ils ont expérimenté des processus d'enseignement fondés sur cette démarche et non pas sur des processus d'apprentissage formels indépendants des connaissances apprises. Dans ces processus, les élèves acquièrent les connaissances qu'on veut leur enseigner dans des interactions avec des situations appropriées qui les conduisent à reproduire ou à simuler, en grande partie de leur propre mouvement, les processus scientifiques. Dans ce genre de processus, la modélisation joue naturellement un grand rôle. Encore faut-il la reconnaître, l'identifier et l'étudier à l'occasion.

Des solutions de ce type ont été produites "en laboratoire" pour la plupart des notions de la scolarité obligatoire, montrant la possibilité pour des maîtres "ordinaires" d'enseigner de cette façon à des élèves ordinaires (par exemple à l'école Jules Michelet).

Mais les études de didactique qui ont accompagné ces expériences ont fait connaître ou pressentir les grandes difficultés de nature macro didactiques que l'on rencontrerait à vouloir répandre (ou pire exiger) ces méthodes dans les conditions des écoles ordinaires. Ces difficultés sont de diverses natures, mais elles proviennent essentiellement de l'inadaptation des conceptions épistémologiques et didactiques qui président aux prises de décision aux différents niveaux de l'action éducative. Noosphère, décideurs, enseignants, parents, politiques, journalistes, bien qu'au service d'intérêts divergents, partagent et professent, au fond, les mêmes critères de jugement et les mêmes représentations. Ils partagent le même goût pour les explications et les solutions magiques. Ils font le même usage effronté d'exemples superficiels et d'inférences douteuses. Ils montrent le même mépris pour la recherche de connaissances scientifiques spécifiques. En un mot ils ne considèrent pas que pour gérer l'éducation il faille payer le prix d'une connaissance et d'une culture scientifique partagée. Comparable en complexité et en précision à ce que l'on trouve dans les autres branches de l'activité humaine. l'enseignement est pour beaucoup le dernier refuge de l'utopie, et souvent un fond de commerce économique et politique.

Insistons en conclusion de cette intervention sur le fait que les trois projets envisagés impliquent des augmentations du travail de la part des élèves et des professeurs !

6. Réflexions sur le travail des groupe TPE et groupe "modélisation"

Michèle ARTIGUE, IREM de Paris VII

artigue@math.jussieu.fr

Ma contribution à la réflexion du comité scientifique s'est appuyée sur le travail mené à l'IREM Paris 7 depuis 1999-2000, au sein du groupe TPE et puis du groupe Modélisation.

Le groupe TPE s'est mis en place en septembre 2000 lors de la généralisation du dispositif TPE, l'IREM ayant souhaité répondre à la demande institutionnelle d'accompagnement des enseignants qui avaient à le mettre en œuvre. Ce groupe, pluri-disciplinaire mais composé essentiellement d'enseignants de mathématiques, s'est donné deux objectifs : suivre et étudier la mise en place des TPE dans quelques établissements d'animateurs IREM présentant des caractéristiques différentes, mettre en place une formation PAF proposée aux enseignants des trois académies de la région parisienne. Très vite, le suivi comme la formation ont montré la difficulté qu'avaient les enseignants de mathématiques, comparativement à leurs collègues des autres disciplines scientifiques, à trouver leur place dans ce dispositif et c'est vers l'analyse et la compréhension de ces difficultés que s'est orienté le travail, basé sur des questionnaires et entretiens, le recueil de productions d'élèves et de ressources diverses utilisées par ces derniers ou pour la formation.

L'analyse des productions d'élèves recueillies la première année a d'abord confirmé la faible place apparente des mathématiques et permis, complétée par des entretiens, d'identifier un certain nombre de processus d'évitement des mathématiques. Elle a aussi montré l'influence négative qu'avait à ce niveau ce que les élèves percevaient comme des modèles, à savoir les articles de vulgarisation scientifique où l'on en restait presque toujours, en matière de mathématiques, à un discours allusif et flou. Le travail effectué sur les TPE recueillis dans le but d'étudier dans quelle mesure ils auraient pu engager plus de mathématiques, nous a cependant rapidement montré certaines limites de ces premières analyses en nous amenant à nous questionner sur ce que nous considérions comme mathématique. Si l'on mesurait les mathématiques engagées à l'aune de la complexité des objets mathématiques en jeu et des traitements engagés à leur propos, oui les mathématiques semblaient pauvres, se réduisant souvent à l'établissement et/ou à l'exploitation de quelques formules. Mais quand on s'engageait soi-même dans ce travail, on voyait bien combien une telle analyse était faussée, limitant le regard à des objets mathématiques épurés qui n'étaient que la face émergée d'un iceberg où s'imbriquaient étroitement dans le travail mathématiques et contextes, cette imbrication en accroissant de façon essentielle la complexité. Et, au fil de l'avancée du travail du groupe comme des formations, nous avons pu mesurer à quel point notre formation mathématique, comme celle des enseignants qui suivaient les stages, par ses limitations, nous rendait coûteux ce travail qu'en d'autres temps on a qualifié de mathématiques mixtes. Les TPE nous semblent un dispositif justement susceptible de valoriser ce type de travail même s'il exerce sur des objets modestes, et de nous faire mieux comprendre, en nous aidant à en prendre la mesure, à quel point l'enseignement des mathématiques est loin de développer les compétences qu'il nécessite, et nous faire mieux comprendre aussi pourquoi les mathématiques restent pour la plupart des personnes une discipline scolaire qu'elles sont incapables d'investir hors de l'Ecole et même hors de la classe de mathématiques.

Dans le cadre de la mise en place de la grille LMD *(Licence - Master - Doctorat)*, l'université Paris 7 a préparé un projet de master professionnel de formation de formateurs d'enseignants et l'IREM s'est associé à ce projet. Ce master est le volet professionnel du master recherche en didactique et est appelé à concerner comme celui-ci au moins les trois disciplines suivantes : mathématiques, sciences physiques et géographie. Dans le cadre de ce projet, l'IREM a élaboré en 2003-2004 une formation expérimentale sur le thème modélisation et relations entre mathématiques, sciences physiques et biologie de 36h, couplée avec un stage PAF sur le même thème de 24h. En fait deux tels enseignements expérimentaux ont été mis en place, celui-ci et un sur statistiques et probabilités, avec l'ambition de prendre en charge à travers eux, des limites évidentes de la formation actuelle des enseignants, donc des questions importantes pour la formation de formateurs. La formation s'appuie bien sûr sur l'expérience du groupe TPE. Le choix a été fait de faire vivre d'abord aux enseignants y participant quelques expériences de modélisation, en leur faisant rencontrer par rapport à chaque thème (vision et effet Doppler-Fizeau ont été les deux thèmes choisis) différents points de vue et questionnements : ceux de mathématiciens, de physiciens et d'un biologiste.

Ensuite par groupes, ils doivent approfondir la réflexion sur un des thèmes et fabriquer des ressources pour des enseignants qui souhaiteraient utiliser un tel thème dans leur enseignement ordinaire ou dans des dispositifs spécifiques comme les TPE ou les IDD, cette question des ressources nous apparaissant comme quelque chose de crucial. Il est prévu d'utiliser une partie de ces ressources dans la formation PAF et les enseignants engagés dans cette formation qui sont tous cette première année mathématiciens, sont amenés par ailleurs, au cours des premières séances du stage PAF, à analyser comment réagissent les stagiaires qui sont à la fois des enseignants de mathématiques, de physique et de biologie, à des expériences proches de ce qu'ils ont vécu eux-mêmes au début de la formation.

La question des rapports entre disciplines est donc vue ici comme une question centrale. Ceci résulte là encore du travail mené sur les TPE. Il est clair que le travail que nous avons nous-mêmes menés avec des spécialistes d'autres disciplines et en particulier avec un biologiste, expérience nouvelle pour nous, nous a montré à quel point établir une communication permettant un travail efficace en commun, n'allait en rien de soi, et comment la qualité du travail mené par les élèves en TPE en était dépendante. Dans certains établissements que nous suivions, elle a progressivement réussi à s'établir, généralement au sein de petits groupes d'enseignants mais cela a pris beaucoup de temps, généralement plus d'un an. Dans beaucoup de cas comme nous le racontaient les stagiaires des formations TPE, ce n'était pas le cas, le physicien ne voyant pas ce que pouvait apporter le professeur de mathématiques et le professeur de SVT étant souvent effrayé par le symbolisme mathématique même élémentaire ; ceci rendait d'autant plus inconfortable la place du professeur de mathématiques.

Le travail que nous avons mené sur toutes ces questions depuis 2000 est certainement un travail très modeste, à l'image d'ailleurs de ce qui peut se faire avec les moyens dont disposent aujourd'hui les IREM, mais il nous a vraiment passionnés et s'il ne nous a pas donné des solutions miracles à ces questions difficiles, il nous semble nous avoir permis de mieux les comprendre et les approcher en formation, en distinguant ce qui relève des cohérences propres à chaque discipline et des rapports qu'elles entretiennent entre elles, de caractéristiques culturelles de l'enseignement des mathématiques et de la formation des enseignants en France, de contraintes et de caractéristiques plus nettement institutionnelles. Il nous a appris aussi à avoir une vision moins limitée de ce qu'est le travail mathématique et à reconnaître toutes les compétences qui sont en jeu dans la manipulation d'objets mathématiques même très modestes dès que, comme le soulignait déjà Poincaré au début du siècle, on s'aventure vers les frontières des mathématiques, là où se nouent leurs rapports avec les autres disciplines et avec le monde qui nous entoure.

7. Modélisation et enseignement des mathématiques au lycée

Jean-Louis PIEDNOIR, Inspecteur Général de Mathématiques

jean-louis.piednoir@education.gouv.fr

On ne se risquera pas à donner une définition de la modélisation. D'une façon plus pragmatique, on s'intéressera à ce qui, dans l'enseignement des mathématiques dispensé dans les lycées, a des liens étroits avec d'autres disciplines ou avec la réalité sensible. Après un regard sur l'évolution des programmes officiels, on s'intéressera à la pratique dans les classes pour ensuite faire quelques propositions La démarche interrogée peut se décomposer en 5 phases :
- prendre une situation dite réelle ou concrète ;
- en faire une description naïve qui permet de sélectionner les aspects les plus importants ;
- construire un objet mathématique censé rendre compte de la description précédente ;
- manipuler cet objet pour aboutir à des conclusions ;
- confronter les conclusions à la situation réelle si possible.

I - Les programmes et leur évolution

Dans les programmes traditionnels élaborés entre 1945 et 1947 et qui ont duré, avec des modifications, jusqu'aux programmes dits “Lichnerowicz”de 1969, on ne parle pas de modélisation mais il y a le souci de maintenir le lien entre la mathématique et ses applications, au moins dans quelques secteurs. Ainsi en est-il de la géométrie qui peut déboucher dans certaines sections (le moderne court de l'époque, le technique) sur le dessin géométrique où l'élève confronte les résultats issus de raisonnements à la réalité en essayant de réaliser un dessin censé représenter une marqueterie, une architecture, etc. Certes la situation est artificielle mais une démarche est inaugurée. Il en va de même avec la mécanique. L'étude des mouvements uniformes, uniformément accélérés, de l'action d'une force sur un point matériel sont des items du programme. Sous l'impulsion de Maurice Fréchet, un chapitre de calcul des probabilités est introduit en 1942 dans la section “philo-sciences” appelée ensuite “sciences expérimentales” jusqu'en 1967. La statistique inductive est enseignée dans la série technique économique, ancêtre de la série B.

La révolution des “maths modernes” bouleverse le paysage. Sous l'influence du structuralisme, philosophie dominante de l'époque, les anciens programmes sont balayés. La géométrie est vue du point de vue de l'algèbre linéaire, la droite devient une classe d'équivalence dès la classe de quatrième ; cette nouvelle définition aura d'ailleurs les honneurs du Canard Enchaîné ! Le calcul des probabilités tourne à la théorie de la mesure et la statistique se restreint à la statistique descriptive et devient l'occasion de manipuler le vocabulaire ensembliste appris précédemment.

Le décalage entre les possibilités de la grande majorité des potaches, les compétences des professeurs et les programmes officiels est tel qu'une réaction s'impose. En 1983 paraissent de nouveaux programmes. La géométrie traditionnelle marquée par l'étude des figures fait un retour en force mais les cas d'égalité des triangles laissent la place aux transformations comme outils de démonstration. La statistique descriptive fait son apparition au collège vue sous l'angle "organisation des données". L'introduction des probabilités se fait par l'observation de la "stabilisation des fréquences", même si sont privilégiées les situations d'équiprobabilité et partant l'occasion d'appliquer le chapitre "dénombrements". Les commentaires des programmes insistent sur les liens à établir avec l'observation, sur l'exploitation de situations issues des autres disciplines.

Cette démarche est encore accentuée avec la mise en place des nouveaux programmes de seconde, première, terminale des sections générales à partir de la rentrée 2000. En seconde, on initie, à propos de l'aléatoire, les élèves à la simulation ; cette démarche ne sera pas exploitée ou très peu en 1ère et terminale. Dans la série ES, une étude des graphes à partir de problèmes à résoudre est introduite pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Un nouvel exercice transdisciplinaire apparaît : le travail personnel encadré (TPE). Dans celui-ci, l'élève doit, pour étudier un sujet qu'il a choisi, faire intervenir deux disciplines.

II - Les difficultés rencontrées dans les classes

Il y a parfois de grands écarts entre les intentions affichées et la réalité observable des classes. Dans leur grande majorité, les professeurs sont mal à l'aise quand il faut faire une approche des mathématiques à partir des applications. On objecte, à juste titre, que la démarche modélisante demande du temps alors que l'horaire attribué à l'enseignement des mathématiques s'est rétréci. On peut estimer à une année complète d'enseignement ce recul, en cumulant les réductions d'horaire réels de la 6ème à la terminale. Les modes traditionnels d'évaluation sont inadaptés pour juger de l'assimilation de la démarche modélisante alors que l'examen terminal, le baccalauréat, régule l'enseignement dispensé : l'élève et sa famille demandent d'abord au professeur de le faire réussir aux épreuves ; c'est humain !

La formation initiale reçue par le professeur ne le prépare pas à enseigner autre chose que le contenu mathématique pur et dur. C'est d'une façon autodidacte, après réussite aux concours, que la minorité des professeurs s'intéressant à la modélisation a acquis des compétences. Dans un passé récent, on ne parlait pas de modélisation mais un certificat de physique était obligatoire pour la licence de mathématique et celle-ci comprenait de la mécanique rationnelle. Cela a disparu. L'ignorance sur les applications des mathématiques est grande parmi les licenciés de la discipline.

Le cloisonnement disciplinaire fait qu'un scientifique ne veut pas s'aventurer sur un autre terrain que celui qui lui est familier. Comme en plus, l'habitude de travailler en équipe est minoritaire, on rencontre de grandes difficultés à introduire quelque chose qui ressemble à de la modélisation.

Il n'est pas non plus toujours facile de s'initier simplement aux démarches scientifiques propres à certaines mathématiques appliquées. Le professeur voit sous la dénomination statistique par exemple, des procédures qui lui paraissent disparates, donc dénuées de sens sans que quelqu'un lui explicite l'objectif poursuivi.

Le résultat est là. Trop souvent la statistique (comme la géométrie dans l'espace) fait partie des items du programme qui ne sont pas traités quand le temps manque (c'est surtout vrai en 2nde et en 1ère). Le cahier de statistique, recommandé par les textes officiels, est quasi inexistant. Dans les TPE, les sciences de la vie se sont taillé la part du lion et, le plus souvent, le rôle du professeur de mathématiques est d'aider les élèves à faire un tableau avec le logiciel Excel ou à calculer des proportions. Il est vrai que très souvent les sujets choisis par les élèves sont tels que, quand une modélisation mathématique est possible et intéressante, elle fait appel à des mathématiques souvent difficiles et hors programme.

Quand démarche modélisante il y a, elle est rarement menée jusqu'au bout. Le réel dont on part est un pseudo-réel, la confrontation des conclusions du modèle avec le sensible est inexistante. On peut aboutir à une caricature : on prend un problème mathématique et on cherche un habillage pour le rendre réel.

III - Une démarche à clarifier et à poursuivre

Il existe des essais pour acclimater la démarche de modélisation dans l'enseignement secondaire. Citons les document d'accompagnement des programmes sur les équations différentielles explicitant les passages physique - mathématique. Le pseudo concret est acceptable dès lors que le temps manque pour une étude complète d'un phénomène réel. Mais le programme officiel est aussi source de difficulté. En 1ère, une procédure de test d'adéquation est au programme. On parle de risque d'erreur mais l'introduction des deux erreurs n'est pas au programme. Cela entraîne chez les professeurs des incompréhensions, des erreurs dans l'enseignement, dans les sujets d'examen proposés. Une clarification s'impose.

Pourtant, initier aux liens entre mathématiques et réalité est de plus en plus indispensable. Les mentalités des jeunes évoluent, en 20 ans la composition sociale du milieu lycéen a changé. Si on veut faire éclore des vocations scientifiques, il faudra donner du sens aux apprentissages, montrer leur utilité. Il devient difficile de faire aimer la discipline en faisant uniquement admirer sa beauté formelle. Cela existe encore mais il faut aussi autre chose.

Comme il faut se garder de tout excès, comme on l'apprenait autrefois dans les Écoles normales primaires, il est bien évident que la modélisation ne recouvrira pas tout le champ de l'enseignement mathématique. Y compris pour être efficace sur le champ de la modélisation, il faudra toujours "faire ses gammes", apprendre à calculer, apprendre à démontrer sur des situations simples donc artificielles.

Pour avancer, deux conditions paraissent incontournables. Primo, fournir aux enseignants des produits semi-finis qu'ils pourront adapter à leurs élèves. Cela a été fait pour l'enseignement des mathématiques dans les sections de techniciens supérieurs, sous l'impulsion notamment de l'inter-IREM technique, cela peut se faire ailleurs. Secundo, assurer, et pas seulement par volontariat, une formation continue solide aux professeurs en exercice. Cela ne dispense pas les universités de s'interroger sur le programme des DEUG et des licences à dominante mathématique et d'y introduire des contenus préparant à la modélisation.

8. Différents types de modélisation dans l'enseignement

Marc LEGRAND (membre du comité scientifique), IREM de Grenoble

marc.legrans@ujf-grenoble.fr

Il me semble que quatre activités fort différentes peuvent se cacher derrière le même vocable de modélisation :

I. Une modélisation "historiette ou prétexte" qui consiste à plaquer un '"réel" qui servirait de support concret au modèle mathématique qu'on veut enseigner ou faire fonctionner.

II. Une modélisation type "modèle à suivre" ou règle d'action de l'ingénieur : le modèle n'explique peut-être pas (ce n'est pas son but), mais si on l'applique, "ça marche" !

III. Une modélisation type "modèle scientifique achevé" qui explique et rationalise un "réel", modèle qui est présenté tout fait. Il ne s'agit donc pas ici de construire ou de montrer comment on pourrait construire un modèle explicatif, mais d'enseigner que dans tel ou tel cas précis, c'est systématiquement à tel ou tel modèle standard (par ex. $\frac{mm'}{d^2}$ pour la gravitation) qu'on se réfère pour remplacer le réel qu'on étudie par un modèle qui permet de le penser. *Ce qui compte après coup dans cet enseignement-là, c'est que l'élève comprenne bien ce nouveau réel construit dans lequel il aura à résoudre des problèmes souvent très mathématiques sans avoir à se soucier de la réalité initiale.*

IV. Enfin ce que l'on pourrait appeler "l'acte de modélisation scientifique" où, partant d'un réel plus ou moins bien délimité et d'une question à la fois très précise mais aussi souvent très vague car trop ambitieuse, on choisit / définit des paramètres pertinents, on nomme / renomme, définit / redéfinit les objets, on construit des règles ou axiomes traduisant les relations entre les objets, tout cela afin de construire un modèle (monde imaginaire ou réel reconstruit) à la fois pertinent vis-à-vis du questionnement initial et simultanément assez "mathématisé" pour que l'on puisse à la fois calculer, comprendre pourquoi ça marche ou au minimum y appliquer la cohérence mathématique du principe de non contradiction.

Dit très rapidement, I , III et IV se situent dans une logique d'apprentissage, alors que II est dans une logique de production et il semble important (excepté peut-être dans un enseignement technique immédiatement mis en œuvre) de ne pas mélanger ces deux logiques qui sont trop contradictoires : quand on apprend, plus on perd du temps à chercher à comprendre en travaillant de façon erratique et plus on en gagne ; on ne peut adopter ce principe quand il s'agit de produire, car ce n'est pas le moment !

La première action de modélisation "historiette" (assez répandue dans une école où l'on a mauvaise conscience de faire de l'abstraction, où l'on veut répondre à une exigence de sens par le concret sans en payer véritablement le prix) est souvent plus médiatique et démagogique que de nature à faire réellement entrer l'élève dans une problématique scientifique.

La seconde, "règle d'action"', n'a pas sa place - comme on l'a souligné - dans un enseignement général.

La troisième, “modèle scientifique achevé” (la plus répandue à l’école et à l’université), permet de montrer comment fonctionnent les résultats de la science, permet d’apprendre à faire fonctionner ces résultats dans des situations bien répertoriées, mais ne montre pas comment fonctionne la science, ne permet pas d’intérioriser le fonctionnement de la science (elle tend plus à cacher qu’à montrer comment le scientifique est conduit à faire des choix pour gagner en simplicité et en fiabilité et ce qu’il lui en coûte en terme de signification et de pertinence).

Cette modélisation scientifique, quasi exclusive aujourd’hui dans l’enseignement, plaît beaucoup au professeur de mathématiques car elle ne l’oblige pas à entrer dans un débat philosophico-scientifique sur ce qu’on garde ou néglige, elle permet de retrouver très vite le confort d’un univers totalement mathématisé où l’on ne néglige rien, elle plaît aussi au professeur de physique, de biologie, etc. car elle “anoblit” ses théories par les maths (cela semble plus rigoureux, moins contestable, plus facile à enseigner, à traduire en terme d’exercices et de problèmes et à évaluer, etc.).

Les inconvénients majeurs de cette façon de “montrer la science” est que cela présente la science comme un univers de dogmes et de certitudes à ceux qui ne se posent pas trop de questions, et à l’inverse, cela risque de créer des incompréhensions et des paradoxes insurmontables pour un élève/étudiant qui cherche effectivement à faire le lien entre modèle et réalité. Ce dernier risque de ne pas comprendre pourquoi on passe sous silence des phénomènes qui lui paraissent pertinents et qu’on mette au contraire en exergue ce à quoi il n’aurait jamais pensé. Pourquoi définit-on ce qui se voit avec une grande précision et pourquoi appauvrit-on ainsi avec une définition alambiquée ce qui paraît être une donnée de l’évidence ? etc. etc. ! !

La quatrième activité, “l’acte de modélisation scientifique” (que l’expérience des statistiques proposée par G. Brousseau à l’école élémentaire ou le pétrolier proposé par Legrand - Di Martino mettent bien en lumière) où l’on invite les élèves ou les étudiants à choisir et à discuter de façon erratique les paramètres et règles pertinents qui vont définir le modèle, est très coûteuse en temps et en investissement de la classe ou de l’amphi, mais elle me semble être la seule à permettre de redéfinir la place des mathématiques au sein de la démarche scientifique (comme le soulignent Brousseau - Lobry - Ferrier - Legrand, le mathématicien ayant alors vocation à peser la pertinence, la cohérence, la consistance des arguments qui vont dans le modèle choisi permettre d’inférer de nouveau faits à partir de faits donnés).

Il est clair que cette activité introduit dans la classe ou l’amphi toute la richesse et l’incertitude de la vie dans laquelle des raisons non uniquement mathématiques vont nous pousser à prendre en compte ou au contraire à négliger ceci ou cela. Pour ne pas se rabattre très vite sur une des trois activités précédentes, l’acte de modélisation en classe ou en amphi nécessite de pouvoir pratiquer avec les élèves ou les étudiants une forme de débat scientifique qui peut mettre le professeur en péril s’il n’a pas le recul épistémologique nécessaire et les outils didactiques du contrat didactique, du conflit (socio)cognitif et des obstacles épistémologiques.

Mais n’est-ce pas le rôle des IREM que d’aider le professeur à acquérir les compétences qui lui permettraient de mieux exercer son métier d’enseignant des mathématiques au cœur des sciences et de la démarche scientifique !

ANNEXE

Un exemple de modélisation en situation : Variante autour de la "bouteille de Brousseau" (compte-rendu d'une expérience en CM2)

Françoise RICHARD, IREM de Grenoble

francoise.richard@univ-savoie.fr

Note du coordonnateur : *Françoise Richard n'ayant pas proposé de titre pour cette contribution, j'en ai choisi un qui fait référence à une terminologie à la fois familière et largement répandue dans le milieu de ceux qui s'intéressent à l'enseignement des probabilités et statistiques et en particulier à la mise en œuvre dans ce secteur de la "théorie des situations" de Guy Brousseau ; cela fait trente ans que cette fameuse "bouteille" est un archétype de situation didactique proposée à fin de modélisation probabiliste, "déclinable" dès le niveau de l'école élémentaire ; c'est pourquoi il était particulièrement opportun que ce soit elle qui fasse l'objet de la seule contribution de type "compte-rendu de réalisation" lors de cette journée du Comité Scientifique des IREM consacrée à la Modélisation.*

Il s'agit ici de la présentation de travaux de Guy Brousseau sur une expérience de premier enseignement de statistiques et de probabilités. Cette expérience

- s'est déroulée pour la première fois en 1973-1974 à l'école Jules Michelet de Talence,
- a donné lieu à un article récent : **An experiment on the teaching of statistics and probability**, publié dans *Journal of Mathematical behavior*, 20 (2002) 363-441,
- a fait l'objet d'un enseignement de didactique de Guy Brousseau à l'Ecole d'été de Didactique d'Août 2003, école d'été à laquelle participait un membre de notre groupe modélisation qui l'a soumis à notre attention.

Ces travaux ont été étudiés par notre groupe de l'IREM de Grenoble sur la modélisation et, vu l'intérêt que nous y avons trouvé, ils ont été la matière d'un atelier que nous avons proposé et animé à un week-end de regroupement et de confrontations entre les différents groupes. La discussion et l'échange qu'ils ont permis sur des positions antérieurement très éloignées et souvent antagonistes, ont conforté chez nous la conviction que cette ingénierie ouvrait une brèche où la modélisation respirait.

Pour garder cette respiration, les choix suivants ont été faits dans mon exposé devant le Comité Scientifique des IREM :

- maintenir très présente la réalité de la classe de CM2 avec les interventions des élèves sans en théoriser la structure,
- m'en tenir au tout début du processus d'enseignement, à savoir la situation initiale, sa mise en scène et son défi,
- dégager simplement les éléments essentiels de cette situation et des interventions de la maîtresse qui permettent aux jeunes élèves d'entrer dans un processus de modélisation plein de rebonds.

La situation mathématique : 5 jetons, noirs ou blancs, dans un sac X.
La tâche : étudier la composition du sac à l'aide de tirages.

Nous allons décrire la mise en place de la situation expérimentale dans une classe de CM2 par G. Brousseau et son équipe.

Première séance : une curieuse devinette !

La présentation

La maîtresse a préparé **trois** sacs de tissu noir : A, B, C. Elle a devant elle **une** boîte contenant **beaucoup** de jetons noirs et blancs.

La maîtresse. Voici trois grands sacs **vides** (elle les retourne) ils s'appellent A, B et C.
Je plonge ma main dans la grande boite et SANS REGARDER, après avoir bien brassé, je prends 5 jetons, je ferme bien la main et toujours sans regarder je la plonge dans le sac A. J'ouvre la main.
Il y a maintenant 5 jetons dans le sac A, **mais je ne sais pas combien il y a de blancs ou de noirs. Le savez-vous, vous ?**

La classe. Nooon !

La maîtresse. Mais vous pouvez vérifier à travers le sac qu'il y a bien 5 jetons. Jean, viens vérifier.

La maîtresse. Maintenant, je fais la même chose dans les deux autres sacs.

Le défi

La maîtresse. Vous allez essayer maintenant de **deviner quelle est la composition de chaque sac.** Mais comme on n'a **pas le droit de regarder** dans les sacs et que **personne ne connaît leur contenu exact, personne ne pourra vous dire si vous avez deviné juste. Il faudra vous convaincre vous même.**

La maîtresse. On aura donc le droit de regarder un peu dans le sac, mais attention ON NE POURRA REGARDER QU'UN JETON A LA FOIS, ET ON LE REMETTRA AUSSITOT DANS LE MEME SAC ! On appellera ça **un tirage**.

La maîtresse. Alors, chacun va pouvoir venir, à son tour, faire UN tirage dans chaque sac, et **vous me direz ce que vous avez appris**.

Commentaires

La mise en scène met bien en lumière l'objectif du travail :
• connaître ce qui est caché, mission apparemment impossible ou renvoyant à des dons de médium,
• ramener ensuite la classe sur un terrain plus mathématique avec la *permission de regarder un jeton à la fois en le remettant aussitôt et de dire ce qu'on a appris*, c'est-à-dire l'outil du tirage avec remise,

• noter avec force l'exigence scientifique en jeu : *il s'agit de vous convaincre vous-mêmes car personne ne connaît le contenus des sacs.*

Signalons rapidement les effets du défi dans la **phase 1** (5 séances) :

- propositions de notations du type *nnnbbnbnb*, fidèles au déroulement des tirages, puis totalisatrices du type $5n$ $4b$;
- recherche d'invariants parmi les séries de tirages : plus de noirs que de blancs dans le sac A ;
- apparition d'une "méthode" cherchant à identifier les tirages et le contenu des sacs : faire 5 tirages "puisqu'il y a 5 boules dans un sac" ;
- relevé des contradictions entre les "invariants" et les identifications $2n$ $3b$ dans A ;
- rectifications de la méthode des 5 tirages, par enregistrement de distributions d'effectifs : $4n$ $1b$ (3 fois), $3n$ $2b$ (4 fois), $2n$ $3b$ (2 fois), après éliminations des "impossibles" 5b ou 5n ;
- mise au point d'un critère de décision d'arrêt : "avoir deux de différence sur les effectifs" ;
- critique de ce critère, adopté dans un premier temps et réutilisé pour d'autres sacs, car il apparaît conduire encore à une contradiction et est alors jugé peu sûr ;
- introduction de fréquences : "trois élèves tirent chacun 5 boules, on totalise combien on a observé de blancs et de noirs et on divise par 3 pour trouver la composition de A" : $10n$ $5b$ donne $3,33n$ et $1,66b$.

Dans la **phase 2** (3 séances) un pas décisif est accompli par la proposition d'un élève de *fabriquer un sac dont on connaîtra la composition afin de voir s'il est vrai que les tirages ressemblent au contenu.*

Ce **pas** (recours à un modèle pour expérimenter) nous paraît fondamental dans la démarche de modélisation, ; nous l'attribuons à la grande intransigeance du début (personne ne connaît le contenu exact des sacs) et au refus fermement opposé aux demandes réitérées des élèves d'ouvrir les sacs.

L'expérimentation est menée avec un matériel plus pratique pour effectuer les tirages, une bouteille opaque au bouchon transparent qu'il suffit de secouer et renverser pour noter un tirage. Les méthodes se poursuivent en s'améliorant ; en particulier il est fait appel à 150 séries de 5 tirages sur une bouteille A (constituée par la maîtresse à partir du sac A) d'où il ressort que A contient 3n et $2b$.

Dans la **phase 3**, conduite par la maîtresse, nous retrouvons les calculs et représentations graphiques classiques des longues séries des fréquences sur les $10k$ premiers tirages.

Ces trois phases se poursuivent dans l'expérimentation par :
Phase 4 : la convergence et la décision statistique (4 séances) ;
Phase 5 : les intervalles de décision (5 séances)
Phase 6 : les évènements et leur probabilité (7 séances).

Je renvoie les lecteurs à l'article publié en anglais en espérant que ce court exposé et ce succinct compte rendu leur aient cependant mis l'eau à la bouche et que Guy Brousseau, qui a pu apporter de multiples éclairages le jour même, y retrouve "ses petits" qui, j'en suis sûre, donneront beaucoup d'autres petits.

POSTFACE
La place de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques : obstacles, perspectives et rôle des IREM

Jean-Pierre RAOULT (membre du comité scientifique), Univ. Paris V (IUT)

et Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées, Univ. Marne-la-Vallée

raoult@math.univ-mlv.fr

J'ai été chargé par le Comité Scientifique des IREM de rédiger pour ce recueil cette "postface", rassemblant des avis qui se sont exprimés durant cette journée d'études, en particulier en matière d'actions envisageables dans les IREM. Ce texte est par ailleurs proposé à la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) à titre d'Annexe à son rapport "L'enseignement des Mathématiques en relation avec les autres disciplines" ; à ce titre il n'engage que son auteur, et non les instances des IREM. Il est par ailleurs prévu que le Comité Scientifique des IREM réalise une bibliographie commentée d'un certain nombre de travaux effectués dans les IREM sur ce thème ; celle-ci devrait être disponible au début de l'année 2005.

Au delà d'un accord général sur la nécessité d'introduire des formes d'activité modélisatrice dans l'enseignement des Mathématiques (avec cependant certaines différences d'approche quant à sa dénomination et ses contenus), tous les participants à la journée d'étude du Conseil Scientifique des IREM sur la modélisation ont tenu à souligner les obstacles auxquels se heurte cette introduction. A première vue, le recueil de ces contributions pourrait donc apparaître comme constituant, pour une bonne part, un catalogue de mises en garde. Cette vigilance nous semble relever de ce que la communauté des IREM est en droit d'attendre de son Comité Scientifique, dès lors qu'elle ne conduit pas nécessairement à des renoncements mais au contraire débouche sur des réflexions relatives à des actions paraissant réalisables dans le cadre des IREM et éventuellement sur l'énoncé d'hypothèses relatives aux conditions qui pourraient favoriser, au plan institutionnel (programmes, moyens, formations), la levée, au moins partielle, de tels obstacles.

Ce texte est donc organisé autour d'un recensement des obstacles qui se présentent et, face à chacun de ceux-ci, des propositions avancées quant aux actions susceptibles de permettre à la modélisation de prendre dans nos enseignements la place réellement formatrice qui lui revient. La typologie de ces obsacles, telle que je l'ai utilisée pour structurer ce texte, est sans doute largement arbitraire, et la retransmission des avis qui en ont été déduits quant à la place des IREM dans ce combat présente une certaine redondance. J'espère cependant avoir ainsi rendu compte de l'essentiel des opinions qui se sont exprimées lors de la session organisée par le Conité Scientifique sur ce thème le 26 novembre 2004 et des possibilités de travaux, pour les IREM, qui y sont été envisagées.

Les difficultés que présente l'introduction de la modélisation dans nos enseignements, relèvées plus ou moins intensément selon les contributions, sont de plusieurs natures :

Obstacles conceptuels : sait-on bien de quoi on parle sous ce vocable commode de "modélisation" ? quelle acception de ce terme est susceptible d'enrichir notre activité éducatrice ?

Obstacles culturels : les enseignants de mathématiques disposent-ils de la culture scientifique nécessaire pour dépasser le cadre strict de l'enseignement du cœur de leur discipline (ou de ce qui est aujourd'hui jugé être ce cœur par la plupart d'entre eux) pour, seuls ou en liaison avec les collègues d'autres disciplines, proposer aux élèves des activités porteuses de sens ? l'activité modélisatrice en classe ne risque-t-elle pas de se développer aux dépens des apprentissages fondamentaux ?

Obstacles pédagogiques : la réflexion sur les situations pédagogiques permettant d'aborder des séances consacrées à la modélisation a-t-elle été menée avec suffisamment d'ampleur ? comment elle popularisée ? existe-t-il suffisamment d'outils, d'exemples, de programmes informatiques proposant des activités déjà bien élaborées à la disposition des enseignants ?

Obstacles sociaux : les élèves sont-ils intellectuellement disponibles pour des activités leur ménageant une certaine liberté de réflexion ? ces activités sont-elles compatibles avec l'exigence des familles demanderesses avant tout de préparations efficaces aux épreuves conditionnnant l'avenir professionnel de leurs enfants ?

Obstacles institutionnels : les disponibilités horaires des mathématiques en lycée, collège, voire école primaire, sont-elles suffisantes pour y placer des activités exploratoires, donc gourmandes de temps ? les enseignants, auxquels ont déjà été demandées de nombreuses réadaptations de leur mode d'activité, dont ils n'ont pas toujours pu percevoir le bien-fondé, sont-il disponibles pour de nouvelles évolutions, elles aussi exigeantes en investissement personnel (préparations de cours d'un type nouveau, recherches de documents, élaboration de projets, réunions interdisciplinaires) ?

Nous allons revenir sur ces différents types de difficultés.

> **Nous nous efforcerons de préciser à chaque fois sur ce que pourrait être le rôle des IREM à cet égard, et ce qui nous parait en constituer les limites.**

Obstacles conceptuels :

Que l'activité modélatrice du réel soit intimement imbriquée avec la création mathématique est relevé par la plupart de nos intervenants, le paradoxe étant que, si on proposait un enseignement des mathématiques largement piloté par des modèles issus du monde physique, on irait à l'encontre d'une tradition qui, du moins dans notre pays, a maintenant fait ses preuves. De plus modéliser, c'est largement évoluer en dépassant des idées fausses au profit d'une compréhension meilleure, et il est difficile, voire souvent impensable, de faire suivre à l'élève pareil cheminement. En d'autres termes, face à un phénomène, il n'y en général pas UN modèle, mais des "candidats-modèles", dont le scientifique doit apprécier la cohérence et la pertinence, selon les rôles qu'il doit leur faire jouer (prédictif, prescriptif, explicatif, selon la typologie proposée par Guy Brousseau), mais dont l'abondance risque d'être perturbatrice pour l'élève.

Il n'est pas question ici de reprendre les débats sur les différents concepts de "modèle" que l'on peut trouver au fil des interventions, souvent replacés dans une perspective historique. Plus empiriquement, suivant ici encore Guy Brousseau, on va distinguer trois niveaux auxquels est évoqué ce terme de "modèles" à propos de leur introduction dans l'enseignement :
- l'enseignement de modèles déjà construits et utilisés,
- l'initiation à la modélisation,
- l'initiation à la pratique de la modélisation par les élèves.

Le premier niveau (modèles déjà construits et utilisés) relève de la présentation des mises en relation de nombre de nos outils mathématiques avec les besoins de description du monde sensible qui leur ont donné naissance ; en d'autres termes, il s'agit de "mathématiques contextuelles" (d'aucuns disent "mathématiques mixtes"), qui relèvent d'une ancienne pratique pédagogique mais ont sans doute été trop abandonnées par l'enseignement contemporain.

> **Les IREM sont ici en position favorable pour favoriser le fonctionnement de groupes interdisciplinaires non destinés uniquement à fabriquer directement des exemples de modélisation en actes (nous y reviendrons), mais à rétablir une culture commune déficiente.**

Le second niveau (initiation à la modélisation) est plus délicat : ceci suppose une approche globale, une démarche reprenant, dans un contexte donné, le catalogue des données, des questions, des besoins d'outils pour y répondre, des formalismes adaptés, des constats d'insuffisance, des retombées utilisables (allant de la présentation bien "lisible" des résultats à l'aide à la décision dans le laboratoire, l'entreprise ...).

> **Les réflexions que peuvent mener ici les IREM se situent assez en amont, associant des mathématiciens, des scientifiques d'autres disciplines, des philosophes, des professeurs de français ou même de langues étrangères (pour la recherche de documents) ; la question de leur popularisation et de leurs retombées est cruciale.**

Le troisième niveau (initiation à la pratique de la modélisation par les élèves) est celui pour lequel la réflexion didactique parait le plus développée et le seul qui peut être envisagé dès l'école primaire, si l'on veut bien prendre le mot "modélisation" dans un sens "naïf" du type :

“émergence d’un processus rigoureux, à partir de l’observation et dans une visée opératoire” (ainsi formulé, ce sens peut sembler trop général et recouvrir presque toute activité scientifique, mais, décliné dans le cadre de la classe de mathématiques, il renvoie à des activités spécifiques).

Les IREM se sont déjà fortement impliqués dans l’élaboration et la diffusion de cadres permettant de telles réalisations, que ceux-ci soient construits par des mathématiciens entre eux ou en partenariat avec des enseignants d’autres disciplines scientifiques ou techniques (un gros travail a été fait en direction des lycées professionnels et technologiques). Ces efforts peuvent sans doute être poursuivis, amplifiés, adaptés et éventuellement critiqués.

Obstacles culturels :

Le constat a été largement fait que les études supérieures suivies par les futurs enseignants de mathématiques ne les mettent plus assez en contact avec d’autres disciplines, voire les en détournent, délimitant dans leur esprit un champ restreint des mathématiques. Une preuve récente en a été donnée par les fortes réticences du corps enseignant des lycées vis-à-vis de programmes nouveaux de statistique, dès lors que ceux-ci ne reposaient pas sur le jeu classique des définitions, énoncés et démonstrations. Plus généralement, un problème majeur est celui de la manifestation de la “vérité” dans la bouche du professeur de mathématiques : celui-ci ne peut-il la situer que dans le cadre hypothético-déductif ou bien est-il également fondé, à la faveur de la mise en scène de modélisations, à la faire naître de la confrontation au réel ?

L’attitude volontariste consistant à généraliser, dans le cadre des IREM mais aussi, plus généralement, dans les établissements scolaires, des “coordinations” interdisciplinaires est apparue ici insuffisante, voire parfois dangereuse car pouvant, faute de bases d’entente communes suffisamment solides entre les partenaires, conduire à des solutions illusoires, si non fondées sur des problématiques scientifiques réelles. L’expérience acquise dans les IREM conduit à argumenter en faveur de la réinsertion d’une culture scientifique plus large lors de la formation des étudiants et en particulier des futurs enseignants dans les universités (dès le premier cycle) et les IUFM.

Cette étroitesse de culture scientifique engendre nécessairement la crainte, voire la conviction, chez nombre de professeurs, que les activités de modélisation nuisent aux apprentissages fondamentaux. Par delà la question du temps total disponible (nous y reviendrons), on peut affirmer que cet effet pervers serait effectif si les séances consacrées à des modélisations étaient disconnectées du reste de l’enseignement des mathématiques ; au contraire, bien conçues, évitant en particulier les placages artificiels et sans réelle insertion dans le concret, ces séances peuvent être un guide pour la compréhension de la présence de certaines notions dans les programmes ou encore constituer une occasion de mise en œuvre de techniques auxquelles on s'est exercé plus classiquement (et, bien sûr, majoritairement en temps) à d'autres moments.

> **Les documents élaborés dans les IREM mettent souvent opportunément l'accent sur ces interpénétrations entre l'enseignement "usuel" et des exemples de modélisations ; encore faut-il, ici encore, que la conception de leur rôle par les enseignants les prédispose à admettre celles-ci.**

Obstacles pédagogiques :

Même si, nous l'avons dit plus haut, le travail d'élaboration de documents (au sens large : papier, video, internet, accès à l'usage approprié de logiciels de calcul, de simulation, d'imagerie ...) pour la modélisation doit être mené activement, on peut affirmer que la matière mise à la disposition de nos collègues est loin d'être négligeable, car de nombreux organismes s'y sont employés, des IREM au Ministère de l'Education Nationale. Mais le manque d'assurance de certains enseignants, déjà évoqué, peut avoir deux conséquences contradictoires : soit les bloquer dans l'usage de ces documents, soit les y livrer avec insuffisamment d'esprit critique.

> **Les IREM peuvent favoriser, comme ils le font déjà, le fonctionnement de groupes au sein desquels la critique du matériel disponible serait activement menée, quelle qu'en soit la provenance, puis diffusée le plus largement possible. Plus en amont, on peut saluer le projet de mise en place, avec le concours de l'IREM de Paris VII, d'un master professionnel de formation de formateurs d'enseignants ; les préoccupations qui nous animent ici n'en sont pas absentes ; les retombées d'une telle création ne seront pas immédiates mais à terme il peut y avoir là un facteur de changement d'esprit salutaire.**

Obstacles sociaux :

La relation dans le triangle Ecole / Elève / Famille est fortement (de plus en plus, disent certains) dominée par l'obsession de la réussite à l'examen, avec tout ce que ceci a de normatif (au point de rendre largement inopérantes des tentatives d'agir justement par ce biais pour favoriser la prise en compte de modélisations dans les classes). A l'université, la dénonciation de l'attitude "consumeriste" des étudiants est fréquente. A ce titre, la place des activités de type "Itinéraires De Découverte" (en collège) ou "Travaux Personnels Encadrés" (au lycée) pose un problème : vaut-il mieux les sanctionner à l'examen et leur conférer ainsi un statut égal à celui des activités plus traditionnelles, ou bien les maintenir en dehors de la compétition pour en faire un espace de liberté de pensée ?

> **Quel que soit le statut des activités modélisatrices au regard de leur "utilité" consacrée, les IREM sont, heureusement, un lieu de recherches suffisamment libre pour à la fois développer des exemples très intimement**

liés à l'attente immédiate de formation exprimée par les élèves (ce fut souvent le cas vis-à-vis des enseignements technologiques) ou des exemples plus "ludiques", le souci constant étant d'éviter la gratuité qui est toujours très pertinemment et rapidement ressentie par les élèves comme une marque de mépris vis-à-vis de l'occupation qu'on leur propose et donc d'eux-mêmes.

Obstacles institutionnels :

Aujourd'hui, en France, aucune réflexion du type de celle que nous menons ici ne peut faire abstraction du fait que les enseignants de Mathématiques ont vécu très douloureusement à la fois la diminution des horaires de leur discipline et la baisse de l'audience qui était conférée à leur matière en tant que l'un des volets majeurs de la formation intellectuelle. Ceci explique en particulier le malaise créé par l'introduction des IDD et des TPE, vus chez beaucoup plus comme une occasion supplémentaire de diminuer la part des mathématiques que comme une chance d'introduire celles-ci, auprès de certains jeunes particulièrement motivés, dans des cadres proches de leurs utilisations.

Les IREM peuvent s'appuyer sur leur expérience pour faire valoir que la maturation des notions et outils mathématiques dans les jeunes esprits suppose qu'on ne diminue plus, voire qu'on rétablisse en partie, le temps imparti à notre discipline ; ce besoin sera d'autant plus fondé que l'on inclura des activités ne reposant pas sur les affirmations péremptoires du professeur mais sur des analyses de situations concrètes ; en effet celles-ci exigent du temps afin de permettre la mise en œuvre de schémas individuels de doutes et de conflits de propositions que l'enseignant a pour tâche de faire converger. Mais les travaux menés dans les IREM peuvent aussi contribuer à faire des formules du type IDD ou TPE des occasions précieuses de formation scientifique (les actions de l'IREM de Paris VII présentées lors de cette journée d'études du Comité Scientifique des IREM en sont un exemple). La présence accrue d'enseignants d'autres disciplines au sein même des IREM serait ici fort utile.

Composition du Comité Scientifique des IREM

NOVEMBRE 2003

André Antibi, Nicole Bopp, Guy Brousseau, Gilles Christol, Jean Dhombres (*Président du Comité Scientifique*), Catherine Dufossé, Jean-Pierre Kahane, Gérard Kuntz, Marc Legrand (*Président de l'ADIREM*), Louis Magnin, Marie-Lise Peltier, François Pluvinage, Jean-Pierre Raoult, Jean-Alain Roddier

SEPTEMBRE 2004

André Antibi, Michèle Artigue, Eric Barbazo, Jean-Paul Bardoulat, Marie-Claire Combes, Jean-Marie Crolet, Gilles Damamme (*Président de l'ADIREM*), Jean Dhombres, Daniel Duverney, Catherine Dufossé, Gérard Kuntz, Marc Legrand, Jeannette Marchal, François Pluvinage, Pascale Pombourcq, Jean-Pierre Raoult(*Président du Comité Scientifique*), Claudine Robert, Guy Rumelhard, Jacques Simon, Catherine Taveau, Jacques Treiner.

RESUME

Quel savoir mathématique est généré par la modélisation ?

Quelles participations extérieures l'enseignant de mathématiques peut-il rechercher ?

Ces deux questions étaient posées aux participants du Comité Scientifique des Irems du Vendredi 28 novembre 2003. Ces questions prétextes ont entraîné des prises de positions et des discussions. Il est apparu utile de rassembler après coup les textes issus de ces débats, sans transcrire les discussions. Ils ont le caractère soit de résumés d'exposés préparés en vue de cette session du comité, soit de mise en forme d'interventions effectuées en séance.

C'est l'objet du présent fascicule. Précisons que, si le comité scientifique prend l'entière responsabilité de ce recueil, le détail des analyses, critiques ou propositions qu'on y trouve n'engage que leurs auteurs, qui peuvent avoir privilégié, selon leurs options personnelles, la mise en garde devant des illusions ou l'incitation à aller de l'avant.

De même les avis qui peuvent s'exprimer ici sur le plan institutionnel (intérêt des Travaux Personnels Encadrés, mise en place de structures d'accompagnement pour la formation des enseignants, critique de réformes ou de leur mise en œuvre) relèvent de la place que le Comité Scientifique entend donner aux leçons tirées ou aux perspectives dégagées, en leur nom propre, par ses membres ou ses invités.

MOTS-CLEFS

Modèles. Modélisation. Mathématisation. Interdisciplinarité. Travaux Pratiques Encadrés.

Coordination pour la réalisation de ce document

Jean-Pierre Raoult

raoult@math.univ-mlv.fr

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
Université de Marne-la-Vallée
5, boulevard Descartes, Champs-sur-Marne
77454 MARNE-LA-VALLEE CEDEX 2

Fax : 01.60.95.75.45