Les ensembles : des notions et un langage incontournables en mathématiques

René Cori
Équipe de logique mathématique
cori@math.univ-paris-diderot.fr

Institut de Mathématiques
de
Jussieu-Paris Rive Gauche

Montpellier, 27 janvier 2017
CII-Lycée et CII-Université

Une citation préliminaire

Mettre en forme, ça profite à tout le monde !

(*un grand mathématicien et pédagogue, vers 2017 de notre ère*)

La théorie des ensembles ou le paradis de Cantor

Du paradis que Cantor a créé, nul ne doit pouvoir nous chasser.

David Hilbert, 1929

Les principes de base

- On décide qu'il y a une seul sorte d'objets mathématiques : les *ensembles*.
- On considère uniquement deux relations entre ces objets :
  - l'égalité : $=$
  - l'appartenance : $\in$

Ce point de vue s'est avéré extrêmement fécond.
À partir de ces seuls principes, et avec une liste appropriée d'axiomes (dans un langage adéquat), on peut définir toutes les notions mathématiques et exprimer toutes les propriétés.

Ce point de vue s'est avéré extrêmement fécond.
À partir de ces seuls principes, et avec une liste appropriée d'axiomes (dans un langage adéquat), on peut définir toutes les notions mathématiques et exprimer toutes les propriétés.

- Cela a permis une avancée spectaculaire pour les fondements des mathématiques.

Ce point de vue s'est avéré extrêmement fécond.
À partir de ces seuls principes, et avec une liste appropriée d'axiomes (dans un langage adéquat), on peut définir toutes les notions mathématiques et exprimer toutes les propriétés.

- Cela a permis une avancée spectaculaire pour les fondements des mathématiques.
- Et cette conception témoigne de l'unité profonde des mathématiques.

Ce point de vue s'est avéré extrêmement fécond.
À partir de ces seuls principes, et avec une liste appropriée d'axiomes (dans un langage adéquat), on peut définir toutes les notions mathématiques et exprimer toutes les propriétés.

- Cela a permis une avancée spectaculaire pour les fondements des mathématiques.
- Et cette conception témoigne de l'unité profonde des mathématiques.
- Mais il y a un inconvénient sérieux, surtout pour nous enseignants : c'est particulièrement contre-intuitif !

Deux façons de définir un ensemble

- **En extension** : on donne la liste de tous les éléments de l'ensemble. Par exemple :
  - $A = \{ 0 , 1 , a , x , y \}$
  - $Y = \{ -1 , 1 , -i , i \}$

Deux façons de définir un ensemble

- **En extension** : on donne la liste de tous les éléments de l'ensemble. Par exemple :
  - $A = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ a\ ,\ x\ ,\ y\ \}$
  - $Y = \{\ -1\ , 1\ ,\ -i\ ,\ i\ \}$
- **En compréhension** : on donne une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble. Par exemple :
  - $B = \{\ n \in \mathbb{Z} \mid (\exists u \in \mathbb{Z})(\exists v \in \mathbb{Z})(n = 9u + 6v)\ \}$
  - $Y = \{\ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\ \}$

Deux façons de définir un ensemble

Avec des variantes :

- $B = \{ 0 , 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , \ldots \}$
- $J = \{ f(x) \mid x \in I \}$

Deux sortes d'accolades

- Celles de la définition en extension sont « inoffensives ». Elles n'ont aucun effet sur le statut des variables qui pourraient apparaître dans l'énumération des éléments.

$$A = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ a\ ,\ x\ ,\ y\ \}$$

Deux sortes d'accolades

- Celles de la définition en extension sont « inoffensives ». Elles n'ont aucun effet sur le statut des variables qui pourraient apparaître dans l'énumération des éléments.

$$A = \{ \, 0 \, , \, 1 \, , \, a \, , \, x \, , \, y \, \}$$

- Celles de la définition en compréhension, inséparables de la barre verticale, ont la propriété de rendre muette la variable qui suit l'accolade ouvrante.

$$Y = \{ \, z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1 \, \}$$

Pour les définitions en compréhension

$$\{\_ \in \ldots \mid \ldots\ldots\}$$

Où cela peut-il servir ?

Où cela peut-il servir ?

PARTOUT !

Équations

$$\left\{\ x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\ \right\} = \left\{\ -\frac{1}{2}\ ,\ 3\ \right\}$$

Géométrie

$$\left\{ \; M \in \mathscr{P} \mid OM = 1 \; \right\} =$$

$$\left\{ \; M \in \mathscr{P} \mid MA = MB \; \right\} =$$

$$\left\{ \; M \in \mathscr{P} \mid MF + MF' = e \; \right\} =$$

L'inclusion. Les sous-ensembles. L'ensemble des parties

L'inclusion. Les sous-ensembles. L'ensemble des parties

- Distinguer les signes $\in$ et $\subset$.

L'inclusion. Les sous-ensembles. L'ensemble des parties

- Distinguer les signes $\in$ et $\subset$.
- Donner la définition de

« A **est inclus dans** B ».

L'inclusion. Les sous-ensembles. L'ensemble des parties

- Distinguer les signes $\in$ et $\subset$.
- Donner la définition de

  « A **est inclus dans** B ».

  Cela oblige à faire une quantification universelle !

L'inclusion. Les sous-ensembles. L'ensemble des parties

- Distinguer les signes $\in$ et $\subset$.
- Donner la définition de

  « A **est inclus dans** B ».

  Cela oblige à faire une quantification universelle !

  Pour tout x appartenant à A, x appartient à B.

Ensembles, logique et probabilités

Opération ensembliste	Connecteur logique	En langage probabiliste
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	« ET »
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	« OU »
Complémentaire : $\complement$	« NON »	Événement contraire

Ensembles, logique et probabilités

Opération ensembliste	Connecteur logique	
$A \cap B$	$\{\ x \in E\ \mid\ x \in A$ ET $x \in B\ \}$	
$A \cup B$	$\{\ x \in E\ \mid\ x \in A$ OU $x \in B\ \}$	
$\complement_E A$	$\{\ x \in E\ \mid\ x \notin A\ \}$	

Ensembles, logique et probabilités

Opération ensembliste	Connecteur logique	
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	
Complémentaire : $\complement$	« NON »	
Inclusion : $\subset$	**Implication : « $\Longleftrightarrow$ »**	**? ? ?**

Ensembles, logique et probabilités

Opération ensembliste	Connecteur logique	
Intersection : $\bigcap$	Conjonction : « ET »	
Réunion : $\bigcup$	Disjonction : « OU »	
Complémentaire : $\complement$	« NON »	
Inclusion : $\subset$	**Implication : « $\Longleftrightarrow$ »**	**Inopportun**

L'inclusion n'a pas sa place dans ce tableau.
Ce n'est pas une **opération** mais une **relation binaire** sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

Fonctions

$$\longmapsto$$

La flèche d'application : $\longmapsto$

C'est un des symboles les plus importants dans le langage mathématique !

Il a la propriété de rendre muette la variable qui apparaît à sa gauche :

$$x \quad \longmapsto \quad \cos^2 x$$

Et le reste. . .

Et le reste. . .

- Propriétés des applications (injectivité, etc.).

Et le reste...

- Propriétés des applications (injectivité, etc.).
- Fonctions caractéristiques, opérations ensemblistes et calcul modulo 2.

Et le reste. . .

- Propriétés des applications (injectivité, etc.).
- Fonctions caractéristiques, opérations ensemblistes et calcul modulo 2.
- Combinatoire et dénombrements.

Et le reste...

- Propriétés des applications (injectivité, etc.).
- Fonctions caractéristiques, opérations ensemblistes et calcul modulo 2.
- Combinatoire et dénombrements.
- Cardinalité.

Pour les années qui viennent…

Le salut par les maths discrètes et l'informatique ?