Des tice dans l'enseignement des mathématiques

Dans les années quatre-vingts, à l'époque du plan *Informatique Pour Tous*, les thuriféraires de l'informatique pédagogique, affirmaient que les ordinateurs, en prenant en charge les aspects technique, permettraient de se mieux concentrer sur les aspects conceptuels de l'enseignement des mathématiques. La suite a montré que cela ne marche pas, mais cet échec était prévisible si l'on sait que l'activité mathématique, comme toute activité intellectuelle, exige de prendre en charge les aspects techniques qui l'accompagnent, aspects techniques qui participent de cette activité. Mais à l'époque toute critique de l'informatique pédagogique passait pour de la technophobie. Ce renvoi à la technophobie permettait d'éviter tout débat et on s'appuyait sur la "modernité" pour soutenir non seulement l'intervention de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques mais l'adaptation de cet enseignement à l'informatique. Cette conception "modernitaire" est toujours présente comme le montrent l'invention de l'épreuve pratique de mathématiques dans le baccalauréat **S**, épreuve heureusement emportée par l'ouragan des réformes ministérielles, ou l'introduction d'un chapitre d'algorithmique dans les programmes de seconde qui conduit à confondre l'usage des algorithmes dans l'activité mathématique, usage bien antérieur à l'invention des ordinateurs[1], et l'implémentation de ces algorithmes dans une machine.
Mais il ne suffit pas de critiquer un usage qui prend de plus en plus de place dans l'enseignement au nom de l'adaptation d'icelui au monde moderne ; il faut comprendre les raisons qui ont conduit à inventer l'informatique pédagogique, raisons qui s'inscrivent dans ce que l'on appelle l'informatisation de la société[2].
L'informatique pédagogique pose deux problèmes, un problème d'ordre idéologique : quelles sont les raisons profondes qui ont conduit à inventer l'informatique pédagogique, un problème d'ordre épistémologique portant sur une analyse de l'activité intellectuelle, et particulièrement de l'activité scientifique . Ce sont ces deux problèmes que nous nous proposons d'aborder ici

Aspects idéologiques

On pourrait remonter au vieux fantasme de créer une machine vivante et pensante et considérer que la cybernétique d'abord et l'informatique ensuite ont donné corps à ce fantasme. L'homme après avoir fabriqué des prothèses prolongeant son activité matérielle[3] a inventé des prothèses prolongeant son activité pensante. On pourrait parler du boulier chinois mais celui-ci reste sous le contrôle de celui qui l'utilise ; plus intéressantes pour notre propos sont les prothèses "boîtes noires", depuis la machine à calculer de Pascal jusqu'aux calculateurs contemporains, prothèses qui donnent l'illusion que la machine pense. Ainsi ce qui faisait l'exception humaine, penser, peut être mis en machine, remettant en question la place de l'homme dans le monde. Après les blessures narcissiques définies par Freud[4], l'héliocentrisme de Copernic, la théorie de l'évolution de Darwin, l'inconscient de Freud, blessures qui remettaient en cause la place centrale de l'homme dans le monde, l'intelligence machinale démolit la dernière ligne de défense de l'homme conduisant à ce que Gunther Anders a appelé la honte prométhéenne[5]. Que devient l'humanité de l'homme si celui-ci est dépassé par les machines qu'il a construites ? L'homme est ainsi à la fois fasciné et effrayé par ses créations.
Reste à l'homme à se situer par rapport à la machine, à la fois redéfinir sa place dans un

[1] Jean-Luc Chabert & *als, Histoire d'Algorithmes, Du caillou à la puce*.
[2] Simon Nora, Alain Minc, *L'informatisation de la société*.
[3] J.D. Bernal, *The Extensions of Man*.
[4] Sigmund Freud, *Introduction à la psychanalyse*, p. 266
[5] Gunther Anders, *L'Obsolescence de l'Homme*.

monde partagé entre la machine et l'homme et redéfinir cette entité qu'il croyait réservée à son espèce, l'intelligence. Sur le premier point, on peut noter les élucubrations de Bruno Latour sur les relations entre humains et non humains[6] ou celles, plus subtiles, de Georges Simondon sur les relations entre les hommes et les objets techniques qu'il a fabriqués[7]. Sur le second point, nous renverrons à un article de Joëlle Proust sur la notion générale d'intelligence, l'intelligence humaine n'étant plus qu'un cas particulier[8].

On atteint ici les limites de la rationalité pour entrer dans une nouvelle forme de pensée magique, une nouvelle forme d'animisme pourrait-on dire. Les divinités d'aujourd'hui sont ces nouvelles machines pensantes qui s'installent autour de nous et qui ont conduit à ce que l'on pourrait appeler *l'idéologie du cyber*[9]. Mais, et c'est la différence avec l'animisme traditionnel, la pensée magique d'aujourd'hui et l'idéologie du cyber qui l'accompagne s'appuient sur des considérations scientifiques. On pourrait citer Wiener et l'invention de la cybernétique mais surtout Von Neumann qui, en comparant le fonctionnement d'un ordinateur avec le cerveau humain, a fait faire un bond fantastique à l'informatique[10]. On a vite confondu analogie et relation d'équivalence pour conclure que si un ordinateur fonctionne comme un cerveau humain, alors un cerveau humain fonctionne comme un ordinateur. Si les inventeurs de la cybernétique et de l'informatique ne sont pas responsables de ce nouvel animisme, on peut considérer que celui-ci s'inscrit dans ce qui est peut-être un invariant anthropologique, le religieux, la forme la plus importante de ce que Pierre Legendre appelle la dimension dogmatique[11]. Ainsi le développement scientifique conduit à de nouvelles formes de croyances, l'irrationalisme contemporain puisant sa source dans un rationalisme poussé à l'extrême[12].

Le retournement de l'analogie de Von Neumann a conforté une idée ancienne, *"penser c'est calculer"*, idée qui sera reprise tout au long de l'époque moderne. C'est elle qui conduit à rechercher un langage universel, que ce soit sous la forme de la caractéristique universelle de Leibniz, de l'idéographie de Frege ou de l'algèbre de la logique de Boole. De telles recherches conduiront à distinguer dans le langage la part syntaxique, laquelle peut être algébrisée, et la part sémantique laquelle échappe à toute réduction algébrique, même si les efforts n'ont pas manqué pour conduire cette part sémantique à une telle réduction. C'est ainsi qu'un contresens a conduit, *via* une interprétation erronée du formalisme hilbertien, à ne voir dans les mathématiques qu'un langage. Hilbert, mathématicien, mettait pourtant en garde contre se contresens lorsqu'il écrivait :

"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."*[13]

Mais cette mise en garde n'a pas empêché la réforme dite des mathématiques modernes qui, non seulement s'appuyait sur une réduction des mathématiques au formalisme, mais se

6 Bruno Latour, *Petites leçons de sociologie des sciences*.

7 Gilbert Simondon, *Du mode d'existence des objets techniques*.

8 Joelle Proust, "L'Intelligence Artificielle comme Philosophie".

9 Sur l'idéologie du cyber, nous renvoyons à l'ouvrage de Pierre Lévy, *Cyberculture*.

10 John Von Neumann, *The Computer and the Brain*.

11 Pierre Legendre, *La fabrication de l'homme occidental*.

12 Rudolf Bkouche, "Des pseudosciences", à paraître.

13 David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, p. iii

proposait de réduire l'enseignement des mathématiques à l'enseignement d'un formalisme. Ce que l'on peut appeler l'*illusion langagière*. Ainsi se mettait en place, même si ce n'était pas l'objectif des promoteurs de la réforme[14], ce que l'on peut appeler *une conception logicialiste de l'enseignement*, l'élève n'étant plus qu'un logiciel à construire pour qu'il puisse ensuite utiliser les connaissances accumulées dans sa mémoire, au sens informatique du terme[15], afin de résoudre les problèmes qu'on lui pose. Une forme d'enseignement programmé pourrait-on dire ! L'échec de la réforme, loin de remettre en question la conception logicialiste, l'a, au contraire, amplifiée. La réduction langagière que proposait la réforme n'était pas la bonne façon de programmer le logiciel élève. On peut alors considérer la contre-réforme comme la recherche de nouvelles formes de fabrication du logiciel "élève", ce qui a conduit à mettre en avant l'activité de l'élève, activité qui devrait le conduire à construire lui-même le savoir qu'on voulait lui apprendre, ce que l'on pourrait appeler l'*activisme pédagogique*[16]. Ce qui apparaît comme paradoxal, c'est que l'illusion langagière et l'activisme pédagogique puisent aux mêmes sources, l'épistémologie génétique piagétienne, et qu'elles peuvent être considérée comme deux formes de la conception logicialiste définie ci-dessus.
Cette conception logicialiste allait prendre d'autant plus d'ampleur qu'au moment de la contre-réforme se développait une tendance à l'informatisation de l'enseignement, laquelle s'inscrivait dans le contexte général de l'informatisation de la société caractéristique du monde contemporain, comme nous l'avons déjà remarqué. En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, puisque c'est essentiellement de cet enseignement que nous parlerons, on proclamait que l'informatique allait transformer la façon de faire des mathématiques et par conséquent son enseignement. Après la caricature de Hilbert que constituait la réforme des mathématiques modernes, on passait à une caricature d'informatique. On vit alors fleurir de nombreux logiciels dont certains étaient loin d'être sans intérêt par les possibilités qu'ils offraient, non à l'apprenti, mais à celui qui avait déjà une bonne pratique des mathématiques. Se rejouait alors la même confusion que lors de la réforme des mathématiques modernes, mais cette confusion était marquée par le caractère supposé concret de la manipulation d'une machine ce qui s'inscrivait dans l'esprit de la contre-réforme. On pouvait alors affirmer que les mathématiques devenaient une science expérimentale, comme si le caractère expérimental se réduisait à la seule manipulation de machines[17].

De l'enseignement à la formation

Nous avons cité, au début de cet article, l'argument des thuriféraires de l'informatique pédagogique qui proclamaient que si les ordinateurs prennent en charge les aspects techniques, cela laisserait plus de temps pour l'étude des aspects conceptuels. Proclamation qui était non seulement une erreur pédagogique mais une incompréhension de l'activité mathématique, voire de l'activité intellectuelle. Toute activité intellectuelle comporte une part technique, l'oublier revient à réduire l'activité intellectuelle à une simple procédure vidée de tout sens. Paradoxalement, c'est en négligeant la part technique de l'activité intellectuelle que l'on réduit celle-ci à une simple procédure analogue à un programme d'ordinateur.

---

[14]On peut considérer la réforme comme l'une des dernières grandes manifestations de l'humanisme scientiste. Cf. Gilbert Walusinski, *Guide Blanc : pourquoi une mathématique moderne?*

[15]Ici encore on assiste à la symétrisation d'une analogie. Si le terme "mémoire" utilisée pour définir ce qui est enregistré par un ordinateur est une heureuse métaphore pour parler de la capacité d'enregistrement de la machine, l'analogie inverse qui consiste à comparer la mémoire humaine à la mémoire de la machine n'a aucune pertinence et son usage non contrôlé peut se révéler nocif.

[16]Sur l'illusion langagière et l'activisme pédagogique, cf. Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique"

[17]Rudolf Bkouche, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)".

Cette réduction procédurale de l'activité intellectuelle est la conséquence d'une confusion que l'on retrouve souvent dans le discours de la psychologie cognitive, l'identification de l'activité intellectuelle à l'analyse faite par celui qui l'étudie. Le désir de scientificité des sciences humaines va ainsi à rebours de la scientificité des sciences de la nature.
Les sciences de la nature ne sont pas une copie du monde, elles sont une représentation du monde construite par l'esprit humain, représentation qui s'exprime *via* le discours scientifique. En ce sens, le discours scientifique est à la fois un moyen d'accès à la connaissance du monde et un écran. On peut dire que la science commence lorsque le sujet connaissant s'éloigne du monde pour mieux l'appréhender ; c'est ce recul qui permet de rendre le monde intelligible, c'est-à-dire compréhensible pour l'esprit humain. Mais c'est aussi ce recul qui marque les limites de la connaissance scientifique.
C'est ce recul constitutif de toute activité scientifique qui fait souvent défaut dans les théories de l'apprentissage et qui conduit à confondre le phénomène que l'on étudie et le discours construit par ceux qui l'étudient. C'est cette confusion qui marque les limites moins peut-être des théories de l'apprentissage, encore que se pose la question de la scientificité de ces théories, que de l'utilisation de ces théories dans l'enseignement.
La question se pose alors des raisons du succès de cette confusion puisqu'elle apparaît depuis quelques années au centre de la réflexion sur l'enseignement. A côté du désir de scientificité qui a marqué les recherches sur l'enseignement dont l'épistémologie génétique de Piaget reste l'un des grands moments, il faut s'intéresser aux raisons pratiques qui ont conduit au développement de ces recherches : définir des conditions suffisantes de réussite des élèves. Si l'idée d'énoncer des conditions suffisantes de réussite des élèves peut apparaître quelque peu naïve, à l'époque où s'exprimait encore une volonté de démocratiser l'enseignement, la recherche de telles conditions apparaissait comme une tâche nécessaire à cette démocratisation.
Cela allait contribuer à situer les difficultés réelles de l'apprentissage d'un domaine de la connaissance moins dans ce domaine lui-même que du côté de l'élève qui deviendra peu à peu une machine apprenante (un *apprenant* comme on dit dans le jargon). Cette machinisation de l'homme est ancienne et l'on pourrait remonter au matérialisme des *Lumières* avec un ouvrage comme *L'Homme machine* de La Mettrie[18]. Mais ce qui n'était que spéculation prendra forme au fur et à mesure que le machinisme industriel se développera. Pourquoi ne pas considérer l'homme comme un objet technique à former ; le terme "formation", qui tend aujourd'hui, à remplacer le terme "enseignement", n'est pas anodin, il signifie qu'on forme la matière humaine comme les métallurgistes donnent forme au métal en fusion pour construire un objet fini. L'élève en formation devenant l'analogue du métal à former, les nécessités de la formation impliquent que l'on connaisse les propriétés de l'élève pour comprendre les difficultés de l'enseignement devenu formation. Nous avons dit ailleurs comment cela conduit à substituer aux obstacles épistémologiques définis par Bachelard, lesquels relèvent du domaine de la connaissance enseigné, des obstacles didactiques inventés par les divers théoriciens de l'apprentissage tentant de définir l'objet-élève[19]. La conception logicialiste apparaît alors comme un moyen d'accomplir cette tâche et l'informatique devient l'outil magique qui l'accompagne. On peut enfin passer au stade industriel de la formation. Mais en même temps disparaît l'objectif premier de l'enseignement, donner à l'élève l'autonomie qui lui permettra de se passer du maître, c'est-à-dire ce qui fait de l'enseignement un lieu d'émancipation. L'enseignement devient dressage.
A l'encontre de l'idéologie de la formation qui réduit l'élève à une machine, si l'on veut retrouver à un enseignement qui relève à la fois de la transmission des connaissances et de la

---

[18]Julien Offray de La Mettrie, *L'Homme-Machine*, édition présentée et établie par Paul-Laurent Assoun, "Bibliothèque Médiations", Gonthier/Denoël, Paris 1981
[19]Rudolf Bkouche, "De la formation des maîtres", à paraître dans *Repères-IREM*.

maîtrise d'icelles, il nous faut revenir sur le lien entre les aspect techniques et les aspects conceptuels de l'activité intellectuelle[20]. Nous nous restreindrons dans ce texte à l'activité mathématique mais ces considérations peuvent s'étendre, *mutatis mutandis*, à toute forme d'activité intellectuelle.

Aspects épistémologiques

Nous voulons montrer, dans ce paragraphe, comment, dans l'activité mathématique, les divers aspects, techniques et conceptuels, s'entremêlent et qu'il semble peu pertinent de les distinguer *a priori*. Une telle distinction conduit à une opposition *a priori* sens *vs* technique. Si cette distinction prend sens *a posteriori*, dans l'activité elle-même on ne peut distinguer un moment du sens et un moment de la technique.
C'est ainsi qu'on a opposé le sens d'un calcul et les techniques de calcul ce qui a conduit certains à dire qu'il fallait enseigner le sens avant les techniques. On peut lire ainsi dans les programmes de 2002 de l'école élémentaire :

"Les techniques opératoires usuelles ne sont pas abandonnées, mais leur mise en place est envisagée lorsque les élèves disposent d'un des connaissances qui permettent d'en comprendre le fonctionnement."[21]

Que signifie un tel galimatias lorsque l'on sait que la compréhension des opérations est inséparable de leur pratique ? On confond ici l'activité de calcul, y compris celle que l'on va enseigner aux élèves et leur demander de pratiquer, et l'analyse de cette activité. On pourrait poser la question sous la forme suivante : quel est le sens d'un calcul pour celui qui ne sait pas l'effectuer ? Et on peut gloser longtemps sur les divers types de réponses sans pour autant cerner la question.
On peut donner une définition formelle de l'addition, celle-ci ne sera compréhensible que pour qui sait effectuer des additions, en fait c'est moins la définition formelle qui importe que la pratique de l'addition sous ces deux formes : la connaissance des tables d'addition et la résolution de problèmes additifs. Il n'y a pas d'un côté la récitation de la table d'addition et de l'autre la reconnaissance d'une situation additive dans un problème, ou plutôt une telle distinction est seconde.
On retrouve cette même distinction entre la connaissance du cours et la résolution de problèmes. Qu'est-ce que cela veut dire : connaître un cours ? On pourrait donner l'exemple de ceux qui savent réciter l'énoncé d'un théorème sans pour autant savoir reconnaître les problèmes que ce théorème permet de résoudre, autant dire qu'ils ne connaissent pas le théorème. Il y a dans la connaissance un aspect global qu'il faut prendre en compte. Il est vrai que cela va à l'encontre de l'évaluation, laquelle semble devenir l'objectif premier de l'enseignement, mais c'est une question que nous ne pouvons aborder ici si ce n'est pour rappeler que le culte de l'évaluation est devenu l'un des premiers obstacle à l'enseignement[22].
Les remarques ci-dessus rappellent que l'on ne peut distinguer, dans l'activité mathématique,

---

[20] Nous usons ici de l'adjectif "intellectuel" que nous opposons à sa substantivation qui laisse trop souvent entendre que l'activité intellectuelle est la spécificité d'une catégorie particulière de personnes que l'on appelle des intellectuels.

[21] *Qu'apprend-on à l'Ecole Elémentaire ?*

[22] Si l'évaluation est l'objectif, on ne peut que souscrire à cette affirmation de Philippe Meirieu : *"Si l'on observe, en effet, ce qui structure "une discipline d'enseignement", on est bien obligé de convenir que ce sont d'abord des "tâches", c'est-à-dire des exercices qui obéissent très largement à des conventions et qui constituent* ***le référent de l'enseignement dispensé*** (souligné par moi) *ainsi que* ***les moyens d'en évaluer les résultats***" (cf. Philippe Meirieu, *Le Choix d'éduquer*, p.124). Autant dire que le savoir disparaît derrière l'enseignement, mais alors à quoi sert l'enseignement ?

la part de la rigueur et la part de l'intuition.
Sans intuition on ne peut rien faire d'autre que répéter, sans pour autant savoir ce que signifie ce que l'on répète. L'intuition intervient dans toute activité mathématique, elle peut être vraie ou fausse mais elle est présente sinon on ne sait pas ce que l'on fait. Mais l'intuition ne suffit pas pour savoir si une propriété que l'on cherche est vraie ou non, c'est le rôle de la démonstration que de suppléer, dans un premier temps, aux limites de l'intuition. C'est ainsi que l'on peut entendre ces définitions que donne Legendre au début de ses *Eléments de Géométrie*.

*"**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.*
***Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **démonstration**."*[23]

Legendre parle d'évidence sans préciser s'il s'agit d'évidence empirique ou d'évidence rationnelle, mais cela importe peu ; dans toute science on part d'évidences, quitte à les remettre en cause si nécessaire. C'est la connaissance de ces évidences, connaissance globale et directe, que j'appellerai intuition. Le rôle du raisonnement déductif est alors, selon Legendre, d'augmenter la connaissance par le seul usage d'un discours bien réglé. C'est la connaissance ainsi construite qui définit la connaissance rationnelle, mais pour reprendre le point de vue de Legendre, cette connaissance issue d'un discours rationnel augmente le champ de l'évidence, autrement dit augmente la part intuitive de la connaissance. Kelix Klein écrira plus tard :

"Il ne faut pas toutefois se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente ; découvrir au moyen de l'Analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est faire que le premier pas."[24]

Ainsi le discours rationnel apparaît comme un détour pour augmenter la connaissance. Cette conception du détour rationnel n'est pas seulement un discours pour savant, c'est un point essentiel de l'enseignement des mathématiques.
Tout cela implique que l'enseignement des mathématiques, mais ce n'est pas le cas des seules mathématiques, doit s'appuyer à la fois sur l'intuition et sur la rigueur. Enrichir la connaissance scientifique d'un élève, c'est lui permettre d'augmenter le champ de son intuition ?
Si on revient sur les réformes de ces dernières années, on peut considérer que la réforme des mathématiques modernes éliminait l'intuition de l'enseignement, peut-être avec l'espoir que l'acquisition du formalisme libèrerait l'intuition, c'est cela que nous avons appelé l'illusion langagière. La contre réforme, en mettant l'accent sur le concret, a pris le risque d'éliminer la part de rigueur nécessaire à tout enseignement mathématique mais n'a en rien développé l'usage de l'intuition. Le slogan fondateur *"on observe, on conjecture, on démontre"* suppose que l'intuition naît de l'observation, ce qui n'est qu'une hypothèse vide ; pour la remplir, il faudrait formaliser la notion d'intuition, tâche autocontradictoire. Il est vrai que cette autocontradiction ne semble pas gêner les "théoriciens de l'apprentissage" qui ont cherché dans l'informatique pédagogique une façon de réaliser le slogan fondateur. Il suffit de voir, dans les diverses épreuves dites pratiques proposées aux élèves, la demande récurrente *: émettre une conjecture*. Une telle demande n'a de sens que si les élèves ont appris à émettre une conjecture, c'est-à-dire ont appris les règles de l'émission de conjecture, autrement dit la

---

[23]Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, p. 4
[24]Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, p. 38

conjecture n'est plus qu'un artifice pédagogique. On pourrait ici parler de pensée oxymorique. Tout au plus ajoutera-t-on à la question *"qu'est-ce que je dois dire ?"* que se pose l'élève en face d'une question à laquelle il ne sait pas répondre une nouvelle question *"quelle est la conjecture à émettre ?"*. On ne peut ainsi que construire de l'échec, échec qui peut, comme trop souvent, être occulté par une réussite formelle au sens où l'élève, plutôt que de chercher à comprendre ce qu'on lui enseigne, cherchera les trucs qui font réussir. Et l'on sait que l'institution, soucieuse de réussite des élèves, ce qu'on appelle aujourd'hui l'obligation de résultats, saura proposer ces trucs aux élèves. Mais il est vrai que depuis longtemps c'est la réussite formelle qui reste l'objectif premier de l'enseignement[25].

De l'usage des machines dites intelligentes

On ne sait pas ce que veut dire qu'une machine est intelligente, cela supposerait une théorie générale de l'intelligence telle celle que propose l'article de Joëlle Proust cité au début de cet article. Il nous semble plus important de parler de l'usage intelligent des machines par l'homme. Et ici nous parlons de l'usage de l'informatique dans l'enseignement.
Nous aborderons trois questions, celle des calculatrices, celle des logiciels de géométrie dynamique, enfin celle de l'algorithmique puisque l'on sait qu'une chapitre d'algorithmique a été introduit, au nom de la modernité, dans les derniers programmes de seconde. Nous avons déjà abordé les deux premières questions dans un article antérieur[26] et nous nous contenterons de revenir que quelques points particuliers. Quant à la dernière question elle est caractéristique de la façon réductrice de poser la relation entre le calcul et l'informatique.

calcul et calculatrices

Les calculatrices sont de magnifiques instruments de calcul et on peut considérer qu'elles remplissent le rôle de prothèse que l'on attend d'elles, faire des calculs que l'homme ne peut faire à la main soit parce qu'ils sont fastidieux, soit parce qu'ils sont trop longs. La question est moins d'en interdire l'usage que de définir sa pertinence dans l'enseignement, ce qui conduit à considérer cette pertinence à chaque étape de l'apprentissage du calcul.
Dans les programmes de 2002 de l'école élémentaire[27], on définissait trois types de calcul, le calcul mental, le calcul posé (i.e. le calcul écrit) et le calcul sur machine. Si on reconnaît l'importance du calcul mental, on minimise le rôle du calcul posé au profit du calcul sur machine plus moderne. Cette dernière position relève plus de la fascination devant les merveilleuses machines de la modernité que de l'usage raisonné de ces machines, encore une fois on retrouve la forme de pensée magique contemporaine.
Mais à côté de cette fascination il faut aussi voir la réduction du calcul à sa seule fonction utilitaire, ce qui conduit à oublier les nombres. La question est ici moins de savoir ce que sont les nombres que de savoir les appréhender, c'est-à-dire les connaître intimement. Et la pratique du calcul participe de cette intimité. C'est parce que l'on calcule, mentalement et par écrit, que l'on apprend à connaître les nombres et les relations qu'ils entretiennent entre eux. L'enseignement de l'arithmétique permettait cette intimité, la réforme des mathématiques modernes était déjà une remise en cause de cette intimité, la structure des nombres prenant le

[25]On peut considérer que le fort taux de réussite au baccalauréat est l'un des meilleurs exemples d'échec occulté comme le montre les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'enseignement supérieur. Mais ces derniers sont-ils prêts, après l'enseignement secondaire, à aborder des études supérieures. La question n'est pas celle de la qualité des étudiants, elle est celle de la faiblesse de l'enseignement secondaire actuel.
[26]Rudolf Bkouche, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)".
[27]*Qu'apprend-on à l'Ecole Elémentaire ?*

pas sur les nombres[28].
Nous donnerons ici deux exemples, d'abord la transformation des opérations d'arithmétique en lois de composition, ensuite la définition des fractions.
La notion de loi de composition est moderne, elle est liée aux conceptions ensemblistes et on peut la considérer comme une notion première de l'algèbre moderne. Mais cette conception structurale n'efface pas la notion classique d'opération. Pour comprendre la distinction entre ces deux notions, celle d'opération et celle de loi de composition, on peut dire que la première est dynamique et la seconde statique. Une opération participe de l'acte de comptage qu'elle prolonge : ainsi l'addition permet de compter le nombre d'objet de deux collections d'objets mises ensemble lorsque l'on connaît le nombre d'objets de chacune d'elles. C'est cette conception dynamique qui conduit à dire : "cinq et sept font douze" et ici le verbe faire exprime une action. Une loi de composition au contraire est statique. La redéfinition des opérations de l'arithmétique en loi de composition sur l'ensemble des nombres s'inscrit dans une algèbre générale. Cette algèbre générale ne relève pas de l'enseignement élémentaire, elle apparaît à la fois comme une structuration et une généralisation de l'arithmétique élémentaire et ne prend sens que pour qui a déjà rencontré des opérations portant sur des objets autres que les nombres. L'exemple classique est celui des polynômes, le calcul sur les polynômes apparaissant comme la première extension du calcul sur les nombres. Plus complexes apparaissent les opérations sur des objets autres que les nombres comme, par exemple, les transformations géométriques. Mais ce n'est pas le lieu ici d'insister sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre.
On a fait une erreur analogue en ce qui concerne les fractions. Alors qu'une fraction constitue une opération, le fractionnement, c'est-à-dire le découpage en parties égales, on a défini les fractions comme des opérateurs et on s'est pour cela appuyé sur la définition des fractions de l'algèbre commutative moderne. On définit pour ce faire, sur l'ensemble des couples d'entiers naturels, une relation d'équivalence $(n,m) \approx (p,q)$ si et seulement si $nq = mp$. On peut alors définir sur le quotient les opérations d'addition et de multiplication et retrouver le classique calcul des fractions. On trouve cela dans tous les traités classiques d'algèbre commutative. Mais cette définition formelle, aussi intéressante soit-elle pour l'algébriste, occulte l'opération de fractionnement qui est à l'origine des fractions, en ce sens elle ne saurait participer de l'enseignement élémentaire. L'opération de fractionnement non seulement définit les raisons de l'invention des fractions mais permet de construire les opérations arithmétiques sur les fractions comme on peut le voir dans les traités classiques d'arithmétique[29].
Effectuer les opérations "à la main" comme on dit souvent pour le calcul écrit, permet de voir comment on fait, c'est-à-dire de comprendre ce que l'on fait. C'est encore le cas avec les machines analogiques comme le boulier. Au contraire, le calcul sur machine reste une opération incontrôlable dans laquelle on ne sait pas ce qu'on fait. Il suffit de connaître le mode d'emploi : taper 6, taper +, taper 9, taper =, et on lit sur l'écran 15. Que signifie cette suite d'opérations, sinon une règle à suivre. Celui qui sait calculer sait que cette suite d'opérations représente une addition, celui qui ne sait pas calculer ne pourra tout au plus que raconter la suite des opérations qu'il a faites sans savoir de quoi il s'agit. Que la calculatrice soit un outil performant pour celui qui sait s'en servir, on le sait et il n'est pas question de refuser la calculatrice, mais cela n'en fait pas un outil d'apprentissage. On n'a que trop tendance à confondre, dans l'enseignement d'aujourd'hui, le "comprendre" de l'apprentissage et la nécessité de performance[30]. Nous verrons que cette confusion est présente dans la plupart des

[28]On a suffisamment expliqué à l'époque l'importance des structures mathématiques, importance qu'il n'est pas question d'ignorer ou de minimiser, mais les structures peuvent-elle constituer une introduction à l'enseignement ?

[29]Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*

[30]L'idéologie de la performance dans l'enseignement n'est qu'une copie de l'entreprise si on considère que l'école

usages dits pédagogiques des machines.
L'introduction du calcul formel dans les calculatrices n'a fait que renforcer la fascination informatique[31]. Ainsi certains se sont demandés s'il fallait encore enseigner les identités remarquables réduites à leur seul usage technique. On oubliait ainsi leur rôle dans l'établissement des propriétés algébriques des polynômes comme celle qui énonce qu'un polynôme P est divisible par x-a si et seulement si P(a)=0. Le calcul formel se réduirait ainsi à la seule technique et celle-ci se réduirait au seul usage de logiciels de calcul. On oublie ainsi les mathématiques que réclame la mise au point de logiciels de calcul formel.

constructions géométriques et logiciels

Les logiciels de géométrie dynamique sont des simulations de constructions à la règle et au compas, c'est-à-dire de constructions qui se résolvent *via* des équations d'ordre au plus égal à deux. Géométriquement ils réalisent les opérations suivantes :
- construire un point
- construire une droite passant par deux points
- construire l'intersection de deux droites
- construire un cercle de centre donné et passant par un point donné
- construire l'intersection d'une droite et d'un cercle
- construire l'intersection de deux cercles

Les opérations ci-dessus sont les opérations élémentaires ; une construction géométrique à la règle et au compas peut être définie comme un algorithme combinant les opérations élémentaires[32]. C'est ainsi que l'on peut lire certaines constructions géométriques données dans les *Eléments* d'Euclide, nous citerons la construction d'une droite d'origine donnée égale à une droite donnée (proposition 2 du Livre I)[33].
Ces logiciels sont appelés dynamiques parce qu'on peut y déformer les figures en utilisant des transformations définies par des constructions élémentaires et en imposant certaines règles de conservation. Cette possibilité de déformation permet d'étudier le déplacement d'un point dépendant d'un autre point *via* une configuration convenable ; on peut considérer que ces déformations généralisent les systèmes articulés[34].
On peut alors être tenté, comme cela a été le cas pour les calculatrices, de faire des logiciels de géométrie des outils pédagogiques. Pour montrer les limites de cette tentation nous aborderons deux questions, d'une part celle des constructions géométriques, d'autre part celle de l'émission de conjectures.
En ce qui concerne les constructions géométriques, il nous faut revenir sur la distinction entre l'analogique et le numérique. L'analogique renvoie aux relations matérielles entre les différents constituants d'un système matériel, que ce soit le lien entre un sujet et des objets extérieurs, lien qui se définit *via* les cinq sens, ou que ce soit les relations entre les divers constituants du système, alors que le numérique renvoie une représentation numérique.
Une construction "à la main" avec des instruments comme la règle et le compas est directe et permet à celui l'effectue de contrôler à chaque instant ce qu'il fait. Confronté directement au matériau sur lequel il dessine (le papier ou le tableau), sa seule contrainte est de respecter les

---

est d'abord le lieu de production des futurs rouages de l'économie. Mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici. Nous renvoyons aux ouvrages de Jean-Pierre Legoff et de Nico Hirtt cités dans la bibliographie.

[31]Qu'on se rappelle le vent de folie qui a accompagné l'apparition de la TI 92.

[32]Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, p. 89-172

[33]Euclide, *Les Eléments*, p. 197-199. Rappelons qu'Euclide appelle droite ce que nous appelons segment de droite. Pour une analyse de cette construction du point de vue algorithmique nous renvoyons à notre article cité "Du caractère expérimental des mathématiques".

[34]Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, p. 64-88

règles imposées par la géométrie et en cela il est en prise directe avec les objets qu'il se propose de construire.
La situation est différente avec un logiciel de géométrie dynamique. Celui-ci s'appuie sur une réécriture numérique de la géométrie, en ce sens il ne donne pas accès aux objets géométriques mais seulement à leur représentation numérique. On pourrait parler ici de construction décalée[35].
Une construction géométrique repose sur une double exigence, d'une part une exigence théorique, la mise en place de l'algorithme qui la permet, c'est-à-dire de la suite d'opérations à effectuer, d'autre part la maîtrise des instruments. La construction à la machine exige une condition supplémentaire constituée par ce que l'on pourrait appeler des contraintes informatiques, ainsi la nécessité de "marquer" les points intermédiaires pour que la machine les enregistre. En cela la machine exige une plus grande rigueur que la construction à la main et suppose que ses utilisateurs aient acquis une première pratique des constructions géométriques.
En ce qui concerne l'usage de la machine pour émettre des conjectures, c'est moins l'usage de la machine qui est en cause que le slogan fondateur rappelé ci-dessus. Cela nous conduit à expliciter quelques critiques de ce slogan.
Premier point, toute observation suppose un raisonnement préalable qui permet de distinguer, dans ce que l'on voit, l'important et l'anecdotique. Cette distinction, loin d'être objective, est liée au sujet observant et un élève observant peut s'intéresser à tout autre chose que ce que l'on attend qu'il observe[36]. Cela implique que l'observation s'apprend et par conséquent s'enseigne.
Second point, une fois un phénomène observé, on le considère comme vrai et par conséquent il n'y a aucune raison de chercher à la démontrer. *"Je regarde le ciel, j'observe qu'il est bleu, cela me suffit pour dire que le ciel est bleu, point n'est besoin de le démontrer"*. La question se transforme si on demande : pourquoi le ciel est bleu ? mais cette question dépasse le cadre de la seule observation.
Troisième point. Si, observant un phénomène, on se pose la question du "pourquoi", on aborde un nouveau problème. C'est donc la question du pourquoi qui importe et cette question s'inscrit dans un cadre qui dépasse la seule observation, laquelle, isolée, ne donne pas en général les clés du pourquoi.
On pourrait citer comme exemple la somme des angles d'un triangle. Dans sa thèse sur la démonstration[37], Nicolas Balacheff raconte une expérience de didactique menée dans une classe, expérience dans laquelle on demande aux élèves de mesurer les angles de divers triangles et de calculer la somme des angles d'un triangle. La plupart des élèves trouvent alors des sommes qui se situent entre 178 et 182 degrés. Qu'est-ce que cela montre ? Et à supposer que les élèves conjecturent, sous la pression bienveillante du professeur, que la somme est constante, comment pourrait-ils le démontrer. Le seul intérêt de cette "activité" est le bon usage du rapporteur, mais rien de plus. En fait il s'agit plus de jouer à la recherche, laquelle est réduite à une suite d'opérations : d'abord on expérimente, ensuite on conjecture, enfin on démontre. Mais le problème reste entier : comment va-t-on démontrer ? Alors qu'il eût suffi de reprendre la démonstration euclidienne en remarquant que celle-ci revient à construire trois angles égaux aux angles du triangle ayant le même sommet[38]. On pourrait "moderniser" cette

[35]De façon générale on peut considérer la simulation comme une expérience décalée (cf. "Du caractère expérimental des mathématiques")

[36]Exemple d'activité : alors que l'homothétie était au programme de seconde, on présentait à des élèves des petites maisons homothétiques dont on avait joint les points homologues. On attendait que les élèves observent que les droites joignant les points homologues sont concourantes, ce que nombre d'entre eux n'ont pas remarqué. Mais pourquoi l'auraient-ils remarqué quand bien même ils l'auraient vu ?

[37]Nicolas Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*.

[38]Euclide, *Les Eléments*, p. 255-256

activité en dessinant des triangles avec un logiciel de géométrie dynamique, puis lire la mesure des angles et leur somme en utilisant le menu convenable, le problème resterait le même, le rapporteur en moins. Il y a cependant une différence essentielle entre les deux "activités". Dans l'activité présentée par Balacheff, l'élève se heurte à la matière et on peut considérer que le résultat cherché correspond à une réalité physique, ce qui renvoie au caractère physique de la géométrie élémentaire. Dans l'activité à la machine, le caractère physique disparaît ; par contre, si on sait que le logiciel est une représentation numérisée de la géométrie euclidienne, le fait que les figures dessinées sur l'écran satisfont les propriétés de la géométrie euclidienne est une simple tautologie. Certains diront que ce n'est pas grave puisque les élèves ne le savent pas.

l'algorithmique

Les nouveaux programmes de seconde ont introduit l'algorithmique. Cette introduction peut être intéressante si on sait le rôle qu'ont joué les algorithmes dans le développement des mathématiques. Ce qui pose problème cependant c'est moins cette introduction que la façon dont elle s'inscrit dans les programmes? C'est ainsi qu'on peut lire dans le premier projet de programme :

"Le programme a été conçu et écrit pour être enseigné et mis en œuvre avec l'outil informatique. L'utilisation de logiciels (calculatrice, ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démons- tration et change profondément la nature de l'enseignement."[39]

Il s'agit en fait d'adapter l'enseignement des mathématiques à l'outil informatique. C'est ainsi qu'il faut comprendre le recul de la géométrie qui apparaît dans la première version des programmes. La géométrie est réduite à la seule géométrie analytique sous sa forme numérisée. On sacrifie ainsi à l'idéologie du tout numérique, le numérique étant lui-même réduit à l'usage des ordinateurs.
Si ce recul de la géométrie s'est heurté à l'opposition d'un grand nombre de professeurs de mathématiques[40], la nouvelle version du programme, tout en ajoutant une partie de géométrie un peu plus conséquente, conserve cette volonté de réduction des mathématiques.
Quant à l'algorithmique, même si on précise qu'elle est une composante essentielle de l'activité mathématique, elle apparaît comme liée à l'informatique et son enseignement est lié à l'utilisation de logiciels[41].
Si le texte cité ci-dessus n'apparaît plus dans la version définitive des programmes, on trouve dans la partie "algorithmique " des *Ressources pour la classe de seconde* proposée sur le site *Eduscol* du ministère le texte suivant :

"Le programme de seconde a été conçu pour être enseigné et mis en œuvre en s'appuyant assez largement sur les progrès de la science et de la technique informatiques, qu'il s'agisse de logiciels ou de la pensée algorithmique. Depuis une dizaine d'années le développement de l'usage de logiciels (calculatrice ou ordinateur) a permis de développer chez les élèves la

[39] Projet de programmes de la classe de seconde, année 2009-2010.

[40] Nous renvoyons à la pétition lancée par des mathématiciens de l'Université de Lille. On peut trouver cette pétition sur le site des IREM

[41] Il faut ajouter que c'est la première fois qu'on demande à des professeurs d'enseigner un domaine qu'ils ne connaissent pas ou qu'ils connaissent peu. Mais il faut qu'un professeur s'adapte, dira-t-on, ce qui participe de la désintellectualisation du métier.

capacité d'expérimenter, suscitant le sens de l'observation tout en faisant naitre de nouvelles questions relatives à la nature de la démonstration."[42]

On peut considérer cette présentation du programme de seconde comme un résumé des poncifs de l'informatique pédagogique.

En guise de conclusion

L'homme a inventé des machines merveilleuses. Peut-être faudra-t-il du temps pour apprendre à les utiliser de façon intelligente. L'usage à tout va de ces machines a conduit à deux attitudes opposées que nous pourrions appeler la technolâtrie et la technophobie. Si nous ne pouvons développer ces questions dans cet article, nous pensons qu'il est important d'expliquer combien l'introduction de l'informatique pédagogique dans l'enseignement des mathématiques, d'une part dénature l'enseignement des mathématiques confortant la réduction procédurale de la discipline issue des théories de l'apprentissage et particulièrement de la didactique[43], d'autre part réduit l'informatique à un simple gadget pédagogique. Si la question de la place de l'informatique dans l'enseignement se pose, que ce soit sous la forme d'un enseignement spécifique ou que ce soit sous la forme de son intervention dans les diverses disciplines enseignées, on ne saurait réduire cette place à quelques amusettes dont la seule justification est d'en proclamer la modernité.

Bibliographie

Gunther Anders, *L'Obsolescence de l'Homme* (sur l'âme à l'époque de la deuxième révolution industrielle) (1956), traduit de l'allemand par Christophe David), Editions de l'Encyclopédie des Nuisances, Editions IVEA, Paris 2001

Nicolas Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*, Université Joseph Fourier, Grenoble 1988

J.D. Bernal, *The Extensions of Man* (1972), Paladin, 1973

Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique" *Repères-IREM* n°9, octobre 1992, p. 5-12

Rudolf Bkouche, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)", *Repères-IREM*, n°70, janvier 2008, p. 33-76

Rudolf Bkouche, "De la formation des maîtres", à paraître in *Repères-IREM*

Rudolf Bkouche, "Des pseudosciences", à paraître

Jean-Luc Chabert & *als, Histoire d'Algorithmes, Du caillou à la puce*, Belin, Paris 1994

Euclide, *Les Eléments, volume 1, Livres I à IV*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, "Bibliothèque d'Histoire des Sciences", PUF, Paris 1990

Sigmund Freud, *Introduction à la psychanalyse*, petite bibliothèque payot, Paris 1975

David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952

[42] http://eduscol.education.fr/D0015/Doc_ress_algo_v25.pdf

[43] On comprend l'engouement des didacticiens pour l'informatique pédagogique ; ils y ont trouvé un matériau supplémentaire pour faire valoir leurs thèses.

Nico Hirtt, ……
Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
Bruno Latour, *Petites leçons de sociologie des sciences*, "Points-Sciences", Editions La Découverte, Paris 1993
Jean-Pierre Le Goff, *Le mythe de l'entreprise*, ……
Pierre Lévy, *Cyberculture* (rapport au Conseil de l'Europe), Odile Jacob, Paris 1997
Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, (professées au Collège de France en 1940-41) préface de Paul Montel (1950), Editions Jacques Gabay, Paris 1987
Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823
Pierre Legendre, *La fabrication de l'homme occidental*, Mille et Une Nuits/ARTE Editions, Paris 1996
Philippe Meirieu, *Le Choix d'éduquer*, deuxième édition, ESF éditeur, Paris 1991
Simon Nora, Alain Minc, *L'informatisation de la société* (rapport à M. le Président de la République), "Points-Politique", La Documentation française, Paris 1978
Joelle Proust, "L'Intelligence Artificielle comme Philosophie" in *Le Débat*, numéro 47, novembre-décembre 1987, p. 88-102
Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* "L'Esprit des Sciences", Ellipses, Paris 1998
Gilbert Simondon, *Du mode d'existence des objets techniques*, Collection"Analyse et Raisons", Aubier-Montaigne, Paris 1969 (première édition: 1959)
Gilbert Walusinski, *Guide Blanc : pourquoi une mathématique moderne?* Armand Colin, Paris 1970
Qu'apprend-on à l'Ecole Elémentaire ? préface de Jack Lang, CNDP-XO éditions, Paris 2002, p. 106

Rudolf Bkouche
octobre 2009